УДК 517.521.8

ПОВЕДЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ГРОНУОЛЛА ВНЕ ОБЛАСТИ СУММИРУЕМОСТИ

Л.В. Матвеева[1]

Продолжается исследование полиномов Гронуолла, начатое в работе автора «Оценка скорости сходимости последовательности полиномов Гронуолла» и продолженное в других работах автора.

Ключевые слова: методы суммирования, полиномы Гронуолла, скорость сходимости.

Пусть однозначная функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности начала координат. Тогда функция $f(z)$ раскладывается в степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Обозначим m-ую частичную сумму этого ряда через $s_m^f = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$, через S_f множество особых точек функции $f(z)$ и через A_f – максимальную область, в которую продолжается $f(z)$. Частичную сумму ряда функции $\frac{1}{1-z}$ обозначим через $\sigma_n(z)$.

Определение. Линейный метод B, определяемый бесконечной матрицей $(b_{m,n})$, суммирует ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ к $f(z)$ равномерно внутри области $D \subset \mathbb{C}$ если существует такой номер m_0, что для любого компакта $Q \subset D$ и для всех $m \ge m_0$ ряды $\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} s_k^f(z)$ равномерно сходятся к функции $f(z)$ на компакте Q.

Определение. Область $U \subset A_f$ назовем C-областью функции $f(z)$, аналитичной в некоторой окрестности начала координат, если существует линейный метод, суммирующий последовательность $\{s_m^f(z)\}$ к $f(z)$ равномерно внутри U.

Естественно рассматривать такие линейные методы, максимальные C-области которых включают в себя круг сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

В работах [1,2] показано, что если метод $(b_{m,n})$ суммирует $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ к $1/(1-z)$ в некоторой области D, то можно описать область D_f, в которой этот метод, будет суммировать $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ к $f(z)$. Поэтому изучение C-областей метода суммирования достаточно провести для геометрического ряда $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

[1] Матвеева Любовь Васильевна – кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: lvmatveeva@gmail.com

Гронуолл в работе [3] описал широкий класс методов суммирования расходящихся рядов. Метод Гронуолла $\left[F(w);\frac{1}{1-w}\right]$ задается отображающей функцией $F(w)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k w^k\,(c_1\neq 0)$ и весовой функцией $\frac{1}{1-w}$, и элементы его матрицы определяются по формулам

$$c_{m,n}^F=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{(1-F(w))F^n(w)}{(1-w)w^{m+1}}dw\ (m,n\geq 0),$$

где интегрирование ведется по γ – простому достаточно малому контуру вокруг начала координат. На отображающую функцию $F(w)$ в работе [1] накладываются три условия: 1) $F(w)$ аналитична в замкнутом единичном круге $\overline{K}$, исключая, может быть, точку $w=1$, и однолистна в K; 2) $F(w)$ непрерывна в $\overline{K}$, $F(0)=0$, $F(1)=1$, $F(K)\subseteq K$; 3) ряд Тейлора $F(w)$ абсолютно сходится при $w=1$.

Определение. Полином $P_m^F(z)=\sum_{n=0}^{m}c_{m,n}^F\left(\sum_{k=0}^{n}z^k\right)$ будем называть m-м полиномом Гронуолла метода $\left[F(w);1/(1-w)\right]$.

Из условия $F(0)=0$ следует, что $c_{m,n}^F=0$ при $n>m$, поэтому степень m-го полинома Гронуолла не превосходит m. Область $T(F)$, ограниченную кусочно-гладкой кривой $\tau(F)=\{z:z=[F(e^{ix})]^{-1},x\in[0;2\pi]\}$, назовем областью суммируемости метода $\left[F(w);1/(1-w)\right]$. Как доказано в работах [3] и [4], метод $\left[F(w);1/(1-w)\right]$ суммирует ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k$ к $1/(1-z)$ в области $T(F)$. Вне этой области последовательность $P_m^F(z)$ расходится. Условие $F(K)\subseteq K$ означает, что область суммируемости метода $\left[F(w);1/(1-w)\right]$ включает область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k$.

В работе [5] оценивалась скорость сходимости полиномов Гронуолла в случае аналитической отображающей функции внутри области $T(F)$. В работе [6] показано, что последовательность $P_m^F(z)$ на границе области $T(F)$ ограничена для каждого $z\neq 1$. В настоящей работе показано, что вне области суммируемости последовательность полиномов Гронуолла $P_m^F(z)$ расходится достаточно быстро со скоростью порядка $\frac{1}{\rho^{m+1}}$, где $0<\rho<1$.

Теорема. Для любой точки z, лежащей вне замыкания области суммируемости $T(F)$, найдутся такие точка $w_0\in K$ и постоянная $C\neq 0$, что

$$\lim_{m\to\infty}P_m^F(z)w_0^{m+1}=C.$$

Доказательство. Так как точка $z\,\overline{\in}\,T(F)$, то $z\in(F(K))^{-1}$ по определению области $T(F)$. Так как функция $F(W)$ инъективна на K, то точка $w_0\in K$, определяемая равенством $z=\frac{1}{F(w_0)}$, является простым полюсом функции $\Phi(w,z)=\frac{1-F(w)}{1-zF(w)}$.

Обозначим через γ – простой достаточно малый контур вокруг точки w_0. Так как w_0 – простой полюс функции $\Phi(w,z)$, то

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\Phi(w,z)\frac{dw}{w^{k+1}}=-\frac{1-F(w_0)}{zF'(w_0)w_0^{k+1}}=\frac{C_1}{w_0^{k+1}},$$

где $C_1 = -\dfrac{1-F(w_0)}{zF'(w_0)} \neq 0$.

Возьмем простой достаточно малый контур μ вокруг начала координат, не пересекающий контур γ. По теореме о вычетах получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mu}\Phi(w,z)\frac{dw}{w^{k+1}} + \frac{C_1}{w_0^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=1}\Phi(w,z)\frac{dw}{w^{k+1}}.$$

Просуммируем полученные равенства и перенесем $C_2 = \dfrac{C_1}{w_0 - 1}$ в правую часть:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mu}\Phi(w,z)\frac{dw}{w^{k+1}} - \frac{C_2}{w_0^{m+1}} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=1}\Phi(w,z)\frac{dw}{w^{k+1}} - C_2.$$

Обозначим через M максимум функции $|\Phi(w,z)|$ на окружности $\{w : |w|=1\}$. Тогда

$$\left| w_0^{m+1}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mu}\Phi(w,z)\frac{dw}{w^{k+1}} - C_2 \right)\right| \le \left| w_0^{m+1}(mM + |C_2|)\right|,$$

Последнее выражение стремится к 0 при $m \to \infty$, так как $|w_0| < 1$. Отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty} w_0^{m+1}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mu}\Phi(w,z)\frac{dw}{w^{k+1}} = C_2.$$

Так как в работе [1] показано, что для $z \neq 1$

$$P_m^F(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{(1-F(w))dw}{(1-zF(w))(1-w)w^{m+1}}.$$

И так как

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mu}\Phi(w,z)\frac{dw}{(1-w)w^{m+1}} = \sum_{k=0}^{m}\oint_{\mu}\Phi(w,z)\frac{dw}{w^{k+1}},$$

то $\lim\limits_{m\to\infty} P_m^F(z)w_0^{m+1} = -\dfrac{zC_2}{1-z} = C$, где $C = -\dfrac{zC_2}{1-z}$. Теорема доказана.

Следствие. Для любой точки z, лежащей вне области суммируемости $T(F)$, найдутся такие точка $w_0 \in K$, номер m_0 и положительные постоянные C_1, C_2, что для всех $m \ge m_0$ справедливы неравенства

$$\frac{C_1}{|w_0|^{m+1}} < |P_m^F(z)| < \frac{C_2}{|w_0|^{m+1}}.$$

Доказательство. По предыдущей теореме найдутся такие точка $w_0 \in K$ и постоянная $C \neq 0$, что $\lim\limits_{m\to\infty} P_m^F(z)w_0^{m+1} = C$. В качестве C_1, C_2 можно по определению предела взять такие положительные постоянные, что $C_1 < |C| < C_2$.

Теоремы о скорости сходимости полиномов в зависимости от точки z [1, 2, 4] позволяют по поведению последовательности полиномов Гронуолла определить принадлежность точки к области суммируемости.

Кроме того, полиномы Гронуолла позволяют построить метод суммируемости с областью, захватывающей часть луча за особой точкой функции $f(z)$ [1, 7].

Литература

1. Матвеева, Л.В. Оценка скорости сходимости последовательности полиномов Гронуолла. / Л.В. Матвеева // Исследования по функциональному анализу: сб. науч. тр. – Свердловск, Ур. гос. ун-т, 1978. – С. 49–64.

2. Матвеева, Л.В. Области равномерной сходимости и теорема Окада / Л.В. Матвеева // Наука ЮУрГУ: сб. науч. тр. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2011. – Т. 3.– С. 149–152.

3. Gronwall, T.H. Summation of series and conformal mapping / T.H. Gronwall // Ann. Math. – 1932. – Vol. 33, № 2. – P. 101–117.

4. Birindelli, C. Contributo all' analisi dei metodi di sommazione di Gronwall / C. Birindelli // Rendic. del Circolo Matemat. de Palermo. – 1937. – Vol. 61. – P. 157–176.

5. Матвеева, Л.В. Полиномы Гронуолла с аналитической отображающей функцией / Л.В. Матвеева // Наука ЮУрГУ: сб. науч. тр. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. – Т. 2. – С. 153–156.

6. Матвеева, Л.В. Поведение полиномов Гронуолла на границе области суммируемости / Л.В. Матвеева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2012. – Вып. 7. – № 34(293). – С. 165–168.

7. Матвеева, Л.В. Оценка скорости сходимости последовательности полиномов Гронуолла II. / Л.В. Матвеева // Исслед. по матем. анализу: сб. науч. тр. – Свердловск, Ур. гос. ун-т. – 1979. – С. 30–37.

BEHAVIOR OF GRONWALL POLYNOMIALS OUTSIDE THE BOUNDARY OF SUMMABILITY REGION

L.V. Matveeva[1]

In this paper we continue the study of Gronwall's polynomials which was started by the author in "The evaluation of convergence rate of the sequence of Gronwall's polynomials" and continued in other works.

Keywords: methods of summation, Gronwall polynomials, convergence rate.

References

1. Matveeva L.V. Otsenka skorosti skhodimosti posledovatel'nosti polinomov Gronuolla (Estimates of the rate of convergence of the sequence of polynomials Gronwall). *Issledovaniya po funktsional'nomu analizu: sb. nauch. tr.* (Research on functional analysis: a collection of scientific works). Sverdlovsk, Ur. gos. un-t, 1978. pp. 49–64. (in Russ.).

2. Matveeva L.V. Oblasti ravnomernoy skhodimosti i teorema Okada (Areas of uniform convergence theorem and Okada). *Nauka YuUrGU: sb. nauch. tr.* (Science of SUSU: a collection of scientific works). Chelyabinsk: Izd-vo YuUrGU, 2011. Vol. 3. pp. 149–152. (in Russ.).

3. Gronwall T.H. Summation of series and conformal mapping. *Ann. Math.* 1932. Vol. 33, no. 2. p. 101–117.

4. Birindelli C. Contributo all' analisi dei metodi di sommazione di Gronwall. *Rendic. del Circolo Matemat. de Palermo.* 1937. Vol. 61. pp. 157–176.

5. Matveeva L.V. Polinomy Gronuolla s analiticheskoy otobrazhayushchey funktsiey (Gronwall polynomials with analytic mapping function). *Nauka YuUrGU: sb. nauch. tr.* (Science of SUSU: a collection of scientific works). Chelyabinsk: Izd-vo YuUrGU, 2009. Vol. 2. pp. 153–156. (in Russ.).

6. Matveeva L.V. Povedenie polinomov Gronuolla na granitse oblasti summiruemosti (Behavior of Gronwall polynomials on the boundary of summability domain). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika, mekhanika, fizika".* 2012. Issue 7. no. 34(293). pp. 165–168. (in Russ.).

7. Matveeva L.V. Otsenka skorosti skhodimosti posledovatel'nosti polinomov Gronuolla II (Estimates of the rate of convergence of the sequence of polynomials Gronwall II). *Issledovaniya po funktsional'nomu analizu: sb. nauch. tr.* (Research on functional analysis: a collection of scientific works). Sverdlovsk, Ur. gos. un-t, 1979. pp. 30–37. (in Russ.).

Поступила в редакцию 30 мая 2013 г.

[1] Matveeva Liubov Vasilievna is Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Department of mathematical and functional analysis, South Ural State University.
E-mail: lvmatveeva@gmail.com