УДК 519.633

ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

К.З. Хайрисламов[1]

Рассматривается течение Пуазейля в трубе для неньютоновской жидкости, динамическая вязкость которой зависит от скорости сдвига по степенному закону. Интегрированием уравнений Навье-Стокса получено аналитическое выражение для профиля скорости в сечении трубы, а также выражение для потока жидкости через сечение трубы, которые обобщают закон Пуазейля для ньютоновской жидкости.

Ключевые слова: течение Пуазейля, неньютоновская жидкость, вязкая жидкость.

1. Уравнения движения.

Уравнения движения вязкой жидкости в инвариантном виде (т. е. независимо от выбора системы координат) записываются следующим образом [1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\upsilon) = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial t} + div(\rho\upsilon\otimes\upsilon) = \rho F + divT, \end{cases} \tag{1}$$

где ρ и υ – соответственно плотность и скорость жидкости, F – плотность массовых сил (далее полагаем $F=0$), T – тензор напряжений (запись $\upsilon\otimes\upsilon$ обозначает тензорное произведение).

Тензор напряжений выражается следующим образом:

$$T = (-p + \mu' div\upsilon)G + 2\mu e, \tag{2}$$

где p – давление, μ – динамический коэффициент вязкости, μ' – 2-й коэффициент вязкости, G – метрический тензор (определяемый системой координат), e – тензор скоростей деформаций, который определяется как

$$e = \frac{1}{2}\left(\nabla\upsilon + (\nabla\upsilon)^T\right), \tag{3}$$

где ∇ – оператор набла, а символ T обозначает транспонирование.

Несложно показать, что в цилиндрических координатах (r,φ,z) для ковариантных компонент имеют место следующие соотношения:

$$div(\upsilon) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\upsilon_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\upsilon_\varphi}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(r\upsilon_z)\right), \tag{4}$$

$$div(\rho\upsilon) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\rho\upsilon_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\rho}{r}\upsilon_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho\upsilon_z)\right). \tag{5}$$

$$\left(div(\rho\upsilon\otimes\upsilon)\right)_i = div(\rho\upsilon_i\upsilon) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\rho\upsilon_i\upsilon_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\rho\upsilon_i\upsilon_\varphi}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho\upsilon_i\upsilon_z)\right),\ i\in\{r,\varphi,z\} \tag{6}$$

$$\begin{cases} e_{rr} = \dfrac{\partial\upsilon_r}{\partial r}, \quad e_{r\varphi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\upsilon_r}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\upsilon_\varphi}{\partial r}\right) - \dfrac{\upsilon_\varphi}{r}, \quad e_{rz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\upsilon_r}{\partial z} + \dfrac{\partial\upsilon_z}{\partial r}\right), \\ e_{\varphi\varphi} = \dfrac{\partial\upsilon_\varphi}{\partial\varphi} + r\upsilon_r, \quad e_{\varphi z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\upsilon_\varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial\upsilon_z}{\partial\varphi}\right), \\ e_{zz} = \dfrac{\partial\upsilon_z}{\partial z}. \end{cases} \tag{7}$$

[1] Хайрисламов Кирилл Зинатуллаевич – аспирант, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: haigh1510@gmail.com

$$divT = -\nabla p + \nabla\left(\mu' div\upsilon\right) + 2div\left(\mu e\right), \tag{8}$$

где компоненты $div\left(\mu e\right)$ равны:

$$\begin{cases} \left(div\left(\mu e\right)\right)_r = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\mu e_{rr}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\mu}{r}e_{\varphi r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(r\mu e_{zr}\right)\right) - \dfrac{\mu}{r^3}e_{\varphi\varphi}, \\ \left(div\left(\mu e\right)\right)_\varphi = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\mu e_{r\varphi}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\mu}{r}e_{\varphi\varphi}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(r\mu e_{z\varphi}\right)\right), \\ \left(div\left(\mu e\right)\right)_z = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\mu e_{rz}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\mu}{r}e_{\varphi z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(r\mu e_{zz}\right)\right). \end{cases} \tag{9}$$

Для случая осевой симметрии, т. е. когда $\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = 0$, $\upsilon_\varphi = 0$, формулы (4)–(9) упрощаются и принимают вид:

$$div\left(\upsilon\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\upsilon_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\upsilon_z\right)\right), \quad div\left(\rho\upsilon\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho\upsilon_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\rho\upsilon_z\right)\right); \tag{10}$$

$$\left(div\left(\rho\upsilon\otimes\upsilon\right)\right)_i = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho\upsilon_i\upsilon_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\rho\upsilon_i\upsilon_z\right)\right),\ i\in\{r,z\}; \tag{11}$$

$$\begin{cases} e_{rr} = \dfrac{\partial\upsilon_r}{\partial r}, \quad e_{r\varphi} = 0, \quad e_{rz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\upsilon_r}{\partial z} + \dfrac{\partial\upsilon_z}{\partial r}\right), \\ \qquad e_{\varphi\varphi} = r\upsilon_r, \qquad e_{\varphi z} = 0, \\ \qquad\qquad e_{zz} = \dfrac{\partial\upsilon_z}{\partial z}; \end{cases} \tag{12}$$

$$\left(div\left(\mu e\right)\right)_r = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu e_{rr}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\mu e_{zr}\right)\right) - \frac{\mu}{r^3}e_{\varphi\varphi}, \tag{13}$$

$$\left(div\left(\mu e\right)\right)_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu e_{rz}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\mu e_{zz}\right)\right). \tag{14}$$

2. Течение Пуазейля

Предположим, что в цилиндрической системе координат $\left(r,\varphi,z\right)$ течение вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ_0 записывается в виде

$$\upsilon_\varphi = \upsilon_r = 0,\ \upsilon_z = u\left(r\right),\ 0\le r\le R, \tag{15}$$

причем $u\left(R\right) = 0$, а течение стационарно. Т. е. рассматривается установившееся течение жидкости в прямой цилиндрической трубе радиуса R с условием прилипания на стенке.

Условие несжимаемости означает, что $div\left(\upsilon\right) = 0$. Тогда тензор скоростей деформаций e согласно (12) определяется следующим образом:

$$e_{rz} = e_{zr} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial r},$$

остальные компоненты равны нулю.

Далее предположим, что динамическая вязкость μ есть функция тензора e, т. е.

$$\mu = \mu\left(\mathrm{II}_e\right),$$

где $\mathrm{II}_e = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ – 2-й главный инвариант тензора e [1, 2], а жидкость подчиняется степенному закону, а именно справедливо соотношение

$$\mu = \mu_0\left(-4\lambda^2\mathrm{II}_e\right)^{\frac{n-1}{2}} = \mu_0\left(\lambda^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}, \tag{16}$$

где μ_0, λ, n – постоянные, $n>1$ (дилатантная жидкость [3]).

Для записи уравнений движения несжимаемой жидкости в безразмерном виде отнесем величины r и z к R, скорость к средней скорости в трубе V, плотность к ρ_0, время к R/V, вязкость к μ_0, давление к P, а компоненты тензора скоростей деформаций к P/μ_0, где $P=\mu_0 V/R$. Тогда второе уравнение в (1) принимает вид

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+div(\upsilon\otimes\upsilon)\right)=-\nabla p+div(2\mu e), \tag{17}$$

где $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho_0 RV}{\mu_0}$ – параметр, называемый числом Рейнольдса. Выражение в скобках в левой части уравнения (17) обнуляется согласно формулам (10)-(11) и принятым допущениям о стационарности течения и несжимаемости среды. Правая часть (17) преобразуется с помощью формул (12-14), и в безразмерном виде течение Пуазейля описывается соотношениями

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\partial \tau}{\partial z}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau)}{\partial r}, \tag{19}$$

где $u=u(r)$, $0\le r\le 1$, $u(1)=0$, $\tau=\mu\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\mu=\left(k\left|\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|\right)^{n-1}$, $k=\dfrac{\lambda V}{R}$.

Решением последних уравнений является функция

$$u(r)=\frac{n\,sign(p_z)}{k(n+1)}\left(\frac{k|p_z|}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\left(r^{\frac{n+1}{n}}-1\right), \tag{20}$$

где $p_z=\Delta p/L$, Δp – разность давлений на концах рассматриваемого участка трубы длины L, а давление p есть линейная функция координаты z.

Подстановка в (20) $n=1$ дает известный профиль Пуазейля $u(r)=\dfrac{p_z}{4}(r^2-1)$ для жидкости с постоянной вязкостью.

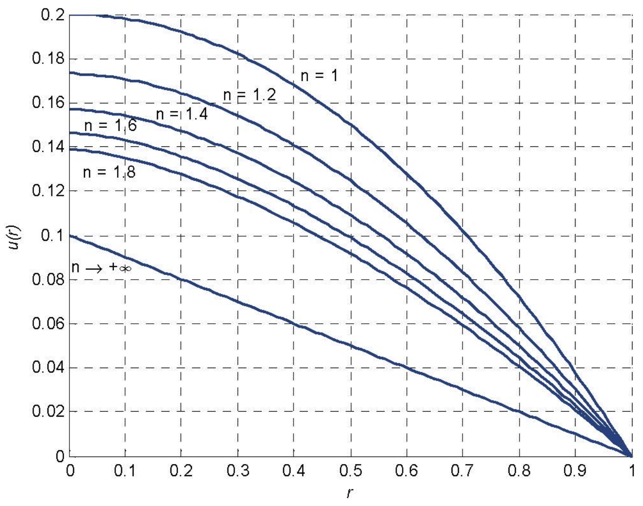

График скорости $u(r)$ при различных значениях n ($k=10$, $p_z=-0{,}8$)

На рисунке показаны графики скорости $u(r)$ в зависимости от значения n, включая $n\to+\infty$ – в этом случае, как следует из (20), $u(r)=\dfrac{\mathrm{sign}(p_z)}{k}(r-1)$.

Поток, численно равный объему жидкости, протекающему через сечение трубы в единицу времени, определяется как

$$Q = 2\pi \int_0^R r u(r) dr,$$

или

$$Q = \pi \int_0^R u(r) dr^2 .$$

Проинтегрировав по частям и воспользовавшись условием $u(R) = 0$, получим

$$Q = -\pi \int_0^R r^2 \frac{\partial u}{\partial r} dr .$$

Переходя в (20) обратно к размерным величинам, получим

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\operatorname{sign}(p_z)}{\lambda} \left(\frac{\lambda |p_z| r}{2\mu_0} \right)^{\frac{1}{n}},$$

откуда

$$Q = -\frac{n\pi R^3}{3n+1} \frac{\operatorname{sign}(p_z)}{\lambda} \left(\frac{\lambda |p_z| R}{2\mu_0} \right)^{\frac{1}{n}} . \tag{21}$$

Для жидкости с постоянной вязкостью ($n = 1$) получаем закон Пуазейля $Q = -\dfrac{\pi R^4 p_z}{8\mu_0}$.

Литература

1. Серрин, Дж. Математические основы классической механики жидкости / Дж. Серрин; под ред. Л.В. Овсянникова. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 256 с.

2. Georgiou G.C. The time-dependent, compressible Poiseuille and extrudate-swell flows of a Carreau fluid with slip at the wall / G.C. Georgiou // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 2003. – Vol. 109, № 2. – P. 93–114.

3. Уилкинсон, У. Неньютоновские жидкости / У. Уилкинсон, под ред. А.В. Лыкова. – М.: Мир, 1964. – 216 с.

POISEUILLE FLOW OF A FLUID WITH VARIABLE VISCOSITY

***K.Z. Khayrislamov*[1]**

The Poiseuille flow in a pipe for non-Newtonian fluid was examined. It is assumed that fluid viscosity is dependent on shear rate by power law. By solving Navier-Stokes equations we obtained velocity and volumetric flow rate solutions which summarize Poiseuille law for a Newtonian fluid.

Keywords: Poiseuille flow, non-Newtonian fluid, viscous fluid.

References

1. Serrin Dzh. *Matematicheskie osnovy klassicheskoy mekhaniki zhidkosti* (Mathematical fundamentals of classical mechanics of fluids). Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury, 1963. 256 p. (in Russ.). [Serrin J. Mathematical principles of classical fluid mechanics. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959. 148 p.]

2. Georgiou G.C. The time-dependent, compressible Poiseuille and extrudate-swell flows of a Carreau fluid with slip at the wall. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2003. Vol. 109, no. 2. pp. 93–114.

3. Uilkinson U. *Nen'yutonovskie zhidkosti* (Non-Newtonian Fluids). Moscow: Mir, 1964. 216 p. (in Russ.). [Wilkinson W.L. Non-Newtonian fluids; fluid mechanics, mixing and heat transfer. Pergamon Press, New York, 1960. 138 p.]

Поступила в редакцию 6 марта 2013 г.

[1] Khayrislamov Kirill Zinatullaevich is Post-Graduate student, Applied Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: haigh1510@gmail.com