УДК 517.948

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В.П. Танана[1], А.А. Ерыгина[2]

Изучена задача определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости. Получена оценка точности метода регуляризации А.Н. Тихонова с параметром регуляризации, выбранным из принципа невязки.

Ключевые слова: регуляризация, модуль непрерывности, оценка погрешности, некорректная задача.

Введение. В настоящей работе получена оценка точности метода регуляризации А.Н. Тихонова [1] с параметром α, выбранным из принципа невязки [2, 3] при решении задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости, зависящей от температуры.

Эта задача в известной статье Лифшица [4] была сведена к интегральному уравнению первого рода, что доказывает ее некорректность.

Ввиду важности для физиков знание оценки погрешности приближенного решения данной задачи следует актуальность приведенных в статье исследований.

1. Постановка задачи. Связь энергетического спектра бозе-системы с ее теплоемкостью, зависящей от температуры, описывается интегральным уравнением первого рода

$$Sn(\varepsilon)=\int_0^\infty S\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)\frac{\varepsilon}{\theta}n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{C(\theta)}{\theta};\ \ 0\le\theta<\infty, \tag{1}$$

где $S(x)=\dfrac{x^2}{2\operatorname{sh}^2(x/2)}$, $C(\theta)$ – теплоемкость системы, $\theta=kT$, T – абсолютная температура, а k – константа, определяемая системой, $n(\varepsilon)$ – спектральная плотность [4].

Обозначим через H действительное пространство измеримых на $[0,\infty)$ функций $f(x)$ с нормой, определяемой формулой

$$\|f(x)\|_H^2=\int_0^\infty |f(x)|^2\frac{dx}{x}. \tag{2}$$

Заметим, что интеграл в формуле (2) понимается в смысле Лебега.

Предположим, что при $\dfrac{C(\theta)}{\theta}=\dfrac{C_0(\theta)}{\theta}\in H$ существует точное решение $n_0(\varepsilon)\in H$ уравнения (1), которое единственно и удовлетворяет соотношению $n_0(\varepsilon)\in G_r$, где

$$G_r=\left\{n(\varepsilon):n(\varepsilon)\in H,\int_0^\infty\frac{n^2(\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon+\int_0^\infty[n'(\varepsilon)]^2\varepsilon d\varepsilon\le r^2\right\}, \tag{3}$$

где $n'(\varepsilon)$ – производная от функции $n(\varepsilon)$, но вместо точного значения правой части $\dfrac{C_0(\theta)}{\theta}$ уравнения (1) известны некоторое приближение $\dfrac{C_\delta(\theta)}{\theta}\in H$ и уровень погрешности $\delta>0$ такие, что $\left\|\dfrac{C_\delta(\theta)}{\theta}-\dfrac{C_0(\theta)}{\theta}\right\|_H\le\delta.$

Требуется определить приближенное решение $n_\delta(\varepsilon)\in H$ уравнения (1) и оценить уклонение $\|n_\delta(\varepsilon)-n_0(\varepsilon)\|_H$ от точного решения $n_0(\varepsilon)$ в метрике пространства H.

[1] Танана Виталий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра вычислительной математики, Южно–Уральский государственный университет.
E-mail: tvpa@susu.ac.ru
[2] Ерыгина Анна Александровна – магистрант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет.
E-mail: anya.erygina174@gmail.com

Если предположить, что $\frac{C(\theta)}{\theta}, n(\varepsilon) \in H$, то уравнение (1) становится некорректной задачей.

2. Метод регуляризации А.Н. Тихонова. Метод регуляризации А.Н. Тихонова [1] для приближенного решения уравнения (1) заключается в сведении его к вариационной задаче

$$\inf\left\{\int_0^\infty \left[\int_0^\infty S\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)\frac{\varepsilon}{\theta} n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{C_\delta(\theta)}{\theta}\right]^2 \frac{d\theta}{\theta} + \alpha\int_0^\infty [n'(\varepsilon)]^2 \varepsilon d\varepsilon + \alpha\int_0^\infty n^2(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} : n(\varepsilon) \in H^1[0,\infty)\right\}, \quad (4)$$

где $H^1[0,\infty)$ – гильбертово пространство, определяемое нормой

$$\|n(\varepsilon)\|^2_{H^1[0,\infty)} = \int_0^\infty \frac{n^2(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_0^\infty [n'(\varepsilon)]^2 \varepsilon d\varepsilon, \text{ а } \alpha > 0.$$

Известно из [5], что для любой функции $\frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \in H$ существует единственное решение вариационной задачи (4).

Для определения значения параметра регуляризации α в задаче (4), используется принцип невязки [2, 3], который сводится к решению уравнения

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty S\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)\frac{\varepsilon}{\theta} n_\delta^\alpha(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{C_\delta(\theta)}{\theta}\right]^2 \frac{d\theta}{\theta} = \delta^2 \quad (5)$$

относительно α.

Известно [3], что при выполнении условия $\int_0^\infty \left[\frac{C_\delta(\theta)}{\theta}\right]^2 \frac{d\theta}{\theta} > \delta$, уравнение (5) имеет единственное решение $\bar{\alpha}(C_\delta, \delta)$.

Приближенное решение $n_\delta(\varepsilon)$ уравнения (1) определим формулой

$$n_\delta(\varepsilon) = n_\delta^{\bar{\alpha}(C_\delta,\delta)}(\varepsilon),$$

соответствующий метод регуляризации определим семейством операторов $\{R_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ непрерывно отображающей H в H и определяемый формулой

$$R_\delta\left[\frac{C_\delta(\theta)}{\theta}\right] = \begin{cases} n_\delta(\varepsilon), & \left\|\frac{C_\delta(\theta)}{\theta}\right\|_H > \delta, \\ 0, & \left\|\frac{C_\delta(\theta)}{\theta}\right\|_H \le \delta. \end{cases}$$

3. Оценка погрешности метода $\{R_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ на классе решений G_r. Оценку погрешности метода $\{R_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ определим с помощью семейства функционалов $\{\Delta_\delta(R_\delta) : 0 < \delta \le \delta_0\}$ определяемых формулой [6]

$$\Delta_\delta(R_\delta) = \sup\left\{\left\|R_\delta\left(\frac{C_\delta(\theta)}{\theta}\right) - n_0(\varepsilon)\right\|_H : n_0(\varepsilon) \in G_r, \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \in H, \left\|Sn_0(\varepsilon) - \frac{C_\delta(\theta)}{\theta}\right\|_H \le \delta\right\}. \quad (6)$$

Обозначим через $w(\delta,r)$ модуль непрерывности в нуле оператора S^{-1} на множестве $S[G_r]$

$$w(\delta,r) = \sup\{\|n(\varepsilon)\|_H : n(\varepsilon) \in G_r, \|Sn(\varepsilon)\| \le \delta\}. \quad (7)$$

Для величины $\Delta_\delta(R_\delta)$ в [7] получена оценка

$$\Delta_\delta(R_\delta) \le 2w(\delta,r); 0 < \delta \le \delta_0, \quad (8)$$

где $w(\delta,r)$ определен формулой (7), а $\Delta_\delta(R_\delta)$ формулой (6).

4. Оценка модуля непрерывности $w(\delta,r)$, определенного формулой (7). Сделаем замену переменных

$$\varepsilon = e^t \text{ и } \theta = e^\tau; \quad -\infty < t < \infty, -\infty < \tau < \infty \quad (9)$$

после которой оператор S сведется к оператору A типа свертки

$$Au(t)=\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau-t)u(t)dt;\ \infty<t<\infty,-\infty<\tau<\infty, \tag{10}$$

$$u(t)=n(e^t),$$

$$K(x)=\frac{e^{-3x}}{2\operatorname{sh}^2\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)},$$

кроме того $u(t), Au(t)\in L_2(-\infty,\infty)$.

Заметим, что после замены (9) класс корректности G_r, определяемый формулой (3) перейдет в множество M_r

$$M_r=\{u(t):u(t)\in W_2^1(-\infty,\infty),\ \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty} |u'(t)|^2\,dt\le r^2\}. \tag{11}$$

Теперь определим модуль непрерывности в нуле оператора A^{-1} на множестве $N_r{=}AM_r$ формулой

$$\overline{w}(\delta,r)=\sup\{\|u(t)\|_{L_2}:u(t)\in M_r,\|Au(t)\|_{L_2}\le\delta\}. \tag{12}$$

Лемма 1. Пусть $w(\delta,r)$ определен формулой (7), а $\overline{w}(\delta,r)$ формулой (12). Тогда справедливо равенство $\overline{w}(\delta,r)=w(\delta,r)$.

5. Оценка модуля непрерывности $\overline{w}(\delta,r)$, определенного формулой (12)

Полагая, что $u(t)\in L_1(-\infty,\infty)\cap L_2(-\infty,\infty)$, определим преобразование Фурье F

$$F[u(t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{ipt}dt\ . \tag{13}$$

Из теоремы Планшереля следует изометричность преобразования F в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$. Чтобы отличать комплексное пространство от действительного, будем обозначать его $\overline{L}_2(-\infty,\infty)$. Таким образом, оператор F, определяемый формулой (13) будет изометрично в метрике $\overline{L}_2(-\infty,\infty)$ отображать множество $L_1(-\infty,\infty)\cap L_2(-\infty,\infty)$ в пространство $\overline{L}_2(-\infty,\infty)$.

Ввиду того, что пространство $L_1(-\infty,\infty)$ плотно в $L_2(-\infty,\infty)$, расширим оператор F на все пространство $L_2(-\infty,\infty)$. Это расширение обозначим через $\overline{F}$.

Теперь оператор $\overline{F}$ будет изометрично отображать пространство $L_2(-\infty,\infty)$ в $\overline{L}_2(-\infty,\infty)$. В дальнейшем образ оператора $\overline{F}$ обозначим через Y и заметим, что Y будет являться подпространством $\overline{L}_2(-\infty,\infty)$.

После преобразования $\overline{F}$ оператор A сведется к следующему

$$\hat{A}\hat{u}(p)=\hat{K}(p)\hat{u}(p);\ \hat{u}(p)\in Y,\ \text{а}\ \hat{A}\hat{u}(p)\in\overline{L}_2(-\infty,\infty), \tag{14}$$

где $\hat{u}(p)=\overline{F}[u(t)]$, а ввиду того, что $K(x)\in L_1(-\infty,\infty)$

$$\hat{K}(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{ixp}dx.$$

Из вида $K(x)$ будет следовать, что

$$\hat{K}(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(2-ip)x}e^{-x}}{\operatorname{ch}(e^{-x})-1}dx.=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(2-ip)x}e^{-e^{-x}}}{(e^{-e^{-x}}-1)^2}d(e^{-x}).$$

Сделав в последнем выражении замену $z=e^{-x}$, получим

$$\hat{K}(p)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{-(2-ip)}e^{z}}{(e^{z}-1)^2}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{z^{-(2-ip)}e^{z}}{(e^{z}-1)^2}dz.$$

Используя свойства гамма и дзета-функций [8]

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^{\infty}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz\,,$$

получим, что

$$\hat{K}(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2-ip)\Gamma(2-ip)\zeta(2-ip)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(3-ip)\zeta(2-ip)\,,$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера, а $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана.

Для оценки снизу поведения функции $\left|\hat{K}(p)\right|$ при $p\to\infty$ приведем некоторые известные свойства гамма-функции, сформулированные в [8, стр. 16 и 19]:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \tag{15}$$

$$\overline{\Gamma}(z)=\Gamma(\overline{z})\,, \tag{16}$$

где $\overline{z}$ сопряжено z, а $\overline{\Gamma}(z)$ сопряжено $\Gamma(z)$ и

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\,. \tag{17}$$

Таким образом, из (15) следует, что

$$\left|\Gamma(3-ip)\right|=\sqrt{1+p^2}\sqrt{4+p^2}\left|\Gamma(1-ip)\right|, \tag{18}$$

а из (16) и (17), что

$$\left|\Gamma(1-ip)\right|=\sqrt{\frac{\pi p}{\operatorname{sh}\pi p}}\,. \tag{19}$$

Из (18) и (19) для любого $p\geq 2$ справедлива оценка

$$\left|\Gamma(3-ip)\right|\geq\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}p}\,. \tag{20}$$

Теперь перейдем к оценке снизу модуля дзета-функции Римана $\zeta(2-ip)$.
Так как

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\,, \tag{21}$$

то из (21) следует, что

$$\zeta(2-ip)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{ip\ln n}}{n^2}\,. \tag{22}$$

Учитывая, что $\left|e^{ip\ln k}\right|=1$, из соотношения (22) получим

$$\zeta(2-ip)\geq 1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\geq\frac{1}{3}\,. \tag{23}$$

Таким образом, из (20) и (23) следует, что при $p\geq 2$ справедлива оценка снизу

$$\left|\hat{K}(p)\right|\geq\frac{2}{3}e^{-\frac{\pi}{2}P}\,. \tag{24}$$

Теперь рассмотрим расширение $\hat{A}_1$ оператора $\hat{A}$, определенного формулой (14) на все пространство $\overline{L}_2(-\infty,\infty)$

$$\hat{A}_1\hat{u}(p)=\hat{K}(p)\hat{u}(p);\ \hat{u}(p),\hat{A}_1\hat{u}(p)\in\overline{L}_2(-\infty,\infty)\,. \tag{25}$$

Рассмотрим множество $\hat{M}_r\subset\overline{L}_2(-\infty,\infty)$ и определяемое формулой

$$\hat{M}_r=\{\hat{u}(p):\hat{u}(p),p\hat{u}(p)\in\overline{L}_2(-\infty,\infty),\ \int_{-\infty}^{\infty}(1+p^2)\left|\hat{u}(p)\right|^2dp\leq r^2\}\,. \tag{26}$$

Тогда из (11) и (26) следует, что

$$\overline{F}[M_r]\subset\hat{M}_r. \tag{27}$$

Теперь рассмотрим модули непрерывности, в нуле определяемые формулами

$$\hat{w}(\delta,r)=\sup\{\|\hat{u}(p)\|_{\bar{L}_2} : \hat{u}(p)\in \bar{F}[M_r], \|\hat{A}\hat{u}(p)\|_{\bar{L}_2}\le\delta\}, \tag{28}$$

$$\hat{w}_1(\delta,r)=\sup\left\{\|\hat{u}(p)\|_{\bar{L}_2} : \hat{u}(p)\in \hat{M}_r, \|\hat{A}_1\hat{u}(p)\|_{\bar{L}_2}\le\delta\right\}. \tag{29}$$

Из унитарности преобразования $\bar{F}$ и формул (10), (12), (14) и (28) следует, что

$$\hat{w}(\delta,r)=w(\delta,r), \tag{30}$$

а из (14), (25), (27)–(29), что

$$\hat{w}_1(\delta,r)\ge\hat{w}(\delta,r). \tag{31}$$

Таким образом, из (30) и (31) следует, что

$$w(\delta,r)\le\hat{w}_1(\delta,r).$$

Для удобства изложения оператор $\hat{A}_1$, определенный формулой (25) заменим обратным $\hat{A}_1^{-1}$, который обозначим через $\hat{T}_1$

$$\hat{T}_1\hat{f}(p)=\hat{A}_1^{-1}\hat{f}(p);\ \ \hat{f}(p)\in R(\hat{A}_1),\ \ \hat{T}_1\hat{f}(p)\in\bar{L}_2(-\infty,\infty), \tag{32}$$

где $R(\hat{A}_1)$ – множество значений оператора $\hat{A}_1$.

Множество $\hat{M}_r$, определенное формулой (27) зададим с помощью оператора B

$$B\hat{u}(p)=\sqrt{1+p^2}\,\hat{u}(p);\qquad \hat{u}(p),B\hat{u}(p)\in L_2(-\infty,\infty), \tag{33}$$

$$\hat{M}_r=B^{-1}\bar{S}_r, \tag{34}$$

где $\bar{S}_r=\{\hat{u}(p):\hat{u}(p)\in\bar{L}_2(-\infty,\infty),\|\hat{u}(p)\|_{\bar{L}_2}\le r\}$.

В пространстве $\bar{L}_2(-\infty,\infty)$ введем множество $\hat{N}_r^1$ определяемое формулой

$$\hat{N}_r^1=\hat{T}_1^{-1}(\hat{M}_r). \tag{35}$$

Тогда из (26), (29), (32)–(34), (35) следует, что

$$\hat{w}_1(\delta,r)=\sup\left\{\|\hat{T}_1\hat{f}(p)\| : \hat{f}(p)\in\hat{N}_r^1, \|\hat{f}(p)\|_{\bar{L}_2}\le\delta\right\}.$$

Перейдем к оценке модуля непрерывности $\hat{w}_1(\delta,r)$.

Для этого рассмотрим оператора $\hat{T}$, действующий из $\bar{L}_2(-\infty,\infty)$ в $\bar{L}_2(-\infty,\infty)$ и определяемый формулой

$$\hat{T}\hat{f}(p)=g(p)\hat{f}(p), \tag{36}$$

Где

$$g(p)\in C(-\infty,\infty),\ g(-p)=g(p),\ g(0)>0, \tag{37}$$

$\lim\limits_{p\to\infty} g(p)=\infty$ и $g(p)$ возрастает на $[0,\infty)$.

Обозначим через $\hat{w}_2(\delta,r)$ модуль непрерывности в нуле оператора $\hat{T}$ на множестве $\hat{N}_r=\hat{T}^{-1}(\hat{M}_r)$, а $\hat{M}_r$ определено формулой (34) и рассмотрим уравнение

$$\frac{r}{\sqrt{1+p^2}}=g(p)\delta. \tag{38}$$

Если $g(0)\delta<r$, то уравнение (38) имеет единственный положительный корень $\bar{p}(\delta,r)$.

Из леммы доказанной в [6] следует, что

$$\hat{w}_2(\delta,r)=\frac{r}{\sqrt{1+\bar{p}^2(\delta,r)}}. \tag{39}$$

Предположим, что оператор $\hat{T}_1$ определен формулами (25) и (32), а $\hat{T}$ формулой (36). Тогда справедлива лемма.

Лемма 2. Если $g(p)$ удовлетворяет (37) и существует $p_0\ge 0$ такое, что для любого $p\ge p_0$ справедливо соотношение

$$\left|\hat{K}(p)\right|^{-1} \le g(p),$$

то при условии, что $g(p_0)\delta < \dfrac{r}{\sqrt{1+p_0^2}}$ справедлива оценка

$$\hat{w}_1(\delta, r) \le \hat{w}_2(\delta, r).$$

Теперь используем лемму 2 для оценки точности метода $\{R_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$.

Из (24) следует, что при $p \ge 2$

$$\left|\hat{K}(p)\right|^{-1} \le \frac{3}{2} e^{\frac{\pi}{2}p}. \tag{40}$$

Таким образом, из (8), (30), (31), (39), (40) и леммы 2 следует, что при

$$\delta_0 = \frac{2re^{-\pi}}{3\sqrt{5}}$$

для метода $\{R_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ справедлива оценка

$$\Delta_\delta(R_\delta) \le \frac{2r}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\pi^2}\ln^2\left(\dfrac{2r}{3\delta}\right)}}.$$

Литература

1. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов. – Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. –С. 501–504.

2. Иванов, В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В.К. Иванов // Журн. вычислит. мат. и мат. физ. – 1966. – Т. 6, № 6. – С. 1089–1094.

3. Морозов, В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации / В.А. Морозов // Журн. вычислит. мат. и мат. физ. – 1966. – Т. 6, № 1. – С. 170–175.

4. Лифшиц, И.М. Об определении энергетического спектра бозе-системы по ее теплоемкости / И.М. Лифшиц // Журн. экспериментальной и теоретической физики. – 1954. – Т. 26, вып. 5. – С. 551–556.

5. Васин, В.В. Приближенное решение операторного уравнения первого рода / В.В. Васин, В.П. Танана // Мат. зап. Уральск. ун–та. – 1968. – Т. 6. – Тетр. 2. – С. 27–37.

6. Танана, В.П. Об оптимальных по порядку методах решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 353–368.

7. Танана, В.П. Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач / В.П. Танана. – Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 220, № 5. – С. 1035–1037.

8. Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – С. 468.

ABOUT THE EVALUATION OF INACCURACY OF APPROXIMATE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF SOLID STATE PHYSICS

V.P. Tanana[1], A.A. Erygina[2]

The problem of determining of the phonon spectrum of the crystal from its thermal capacity was studied. The accuracy evaluation for regularization method of A.N. Tikhonov chosen from the residual principle was obtained.

Keywords: regularization, module of continuity, evaluation of inaccuracy, ill-posed problem.

References

1. Tikhonov A.N. *Doklady AN SSSR.* 1963. Vol. 151, no. 3. pp. 501–504. (in Russ.).
2. Ivanov V.K. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 1966. Vol. 6, no. 6. pp. 1089–1094.
3. Morozov V.A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 1966. Vol. 6, no. 1. pp. 170–175. (in Russ.).
4. Lifshits I.M. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki.* 1954. Vol. 26, Issue 5. pp. 551–556. (in Russ.).
5. Vasin V.V., Tanana V.P. *Matematicheskie zapiski Ural'skogo universiteta.* 1968. Vol. 6, Issue 2. pp. 27–37. (in Russ.).
6. Tanana V.P., Yaparova N.M. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* 2006. Vol. 9, no. 4. pp. 353–368. (in Russ.).
7. Tanana V.P. *Doklady AN SSSR.* 1975. Vol. 220, no. 5. pp. 1035–1037. (in Russ.).
8. Uitteker E.T., Vatson Dzh.N. *Kurs sovremennogo analiza* (A Course of Modern Analysis). Moscow: Nauka, 1978. Part 2. 468 p. (in Russ.). [Whittaker E.T., Watson G.H. *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press; 1927. 612 p.]

Поступила в редакцию 15 апреля 2013 г.

[1] Tanana Vitaliy Pavlovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Computational Mathematics, South Ural State University.
E-mail: tvpa@susu.ac.ru
[2] Erygina Anna Aleksandrovna is Master Student, Department of Theory of Management and Optimization, Chelyabinsk State University.
E-mail: anya.erygina174@gmail.com