УДК 517.977

К ВОПРОСУ ОБ ОТЛИЧИЯХ В ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ[1]

Л.И. Рубина[2], О.Н. Ульянов[3]

Ранее предложенным геометрическим методом исследования нелинейных уравнений в частных производных исследуются линейное и нелинейное уравнения теплопроводности. Показано, чем обусловлено отличие в поведении решений рассматриваемых уравнений и что в случае нелинейного уравнения приводит к обострению. Выделен некоторый класс решений линейного уравнения, представляющий поверхности уровня рассматриваемого нелинейного уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, уравнения теплопроводности, точные решения, поверхности уровня.

Введение

Известно (см., например, серию работ [1–5]), что нелинейные уравнения теплопроводности и некоторые другие нелинейные уравнения в частных производных описывают режимы, значительно отличающиеся от тех режимов, которые наблюдаются, если используется линейная модель процесса. Часто в случае нелинейных моделей наблюдаются так называемые катастрофы, при которых решение неограниченно возрастает за конечный промежуток времени [1].

В данной работе приведены некоторые точные решения для линейного и нелинейного уравнений теплопроводности [1], которые являются хорошей иллюстрацией описанной выше проблемы. Полученные одним и тем же геометрическим методом [6, 7] решения имеют одинаковые поверхности уровня, но их поведение значительно отличается, так как сами решения удовлетворяют разным обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), к которым сведены первоначальные уравнения теплопроводности. Аналогично при рассмотрении характеристик уравнений отличие в представлении их решений связано с отличием ОДУ, которые задают условия совместности для получения решения вдоль характеристик. Вид выписанных явно точных решений делает наглядными их отличия и позволяет легко увидеть, почему в нелинейном случае наблюдается обострение, а в линейном случае обострение отсутствует. Приводятся картины течений нелинейного уравнения теплопроводности в зависимости от параметров задачи, которые показывают, как можно отодвинуть по времени момент обострения в решении или, переключаясь на другое решение при подходе к обострению, избежать катастрофы.

Сведение линейного и нелинейного уравнения теплопроводности к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Будем рассматривать два (линейное и нелинейное) уравнения теплопроводности [1]

$$u_t = ku_{xx} + qu,\ \ k = \text{const},\ q = \text{const}. \tag{1}$$

$$u_t = ku_{xx} + qu - \alpha u^3,\ \ \alpha = \text{const}. \tag{2}$$

Здесь и далее нижние индексы указывают на независимую переменную, по которой вычисляется производная.

В уравнениях (1) и (2) сделаем замену [6] $u = Q_x$, тогда получим уравнения

$$Q_{xt} = kQ_{xxx} + qQ_x, \tag{3}$$

$$Q_{xt} = kQ_{xxx} + qQ_x - \alpha Q_x^3. \tag{4}$$

---

[1] Работа выполнена в рамках программы межрегиональных и межведомственных исследований УрО РАН (проект 12-С-1-1001).

[2] Рубина Людмила Ильинична – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ИММ УрО РАН.
E-mail: rli@imm.uran.ru

[3] Ульянов Олег Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ученый секретарь института, ИММ УрО РАН.
E-mail: secretary@imm.uran.ru

Считаем, что существует такая система координат [6, 7], в которой функция Q зависит от одной независимой переменной: $Q = Q(\psi(x,t))$, тогда $\psi(x,t) = \text{const}$ – поверхность уровня решения $Q(x,t)$. В этой системе координат уравнения (3) и (4) соответственно имеют вид

$$kQ'''\psi_x^3 + Q''(-\psi_x\psi_t + 3k\psi_x\psi_{xx}) + Q'(-\psi_{xt} + k\psi_{xxx} + q\psi_x) = 0, \tag{5}$$

$$(kQ''' - \alpha Q'^3)\psi_x^3 + Q''(-\psi_x\psi_t + 3k\psi_x\psi_{xx}) + Q'(-\psi_{xt} + k\psi_{xxx} + q\psi_x) = 0. \tag{6}$$

Здесь и далее штрих $(')$ указывает на производную по переменной ψ. Сравнивая (5) и (6), замечаем, что для определения функции $\psi(x,t)$ имеем одни и те же уравнения, если положим, что $\psi_x \neq 0$ [6, 7]

$$\frac{-\psi_t + 3k\psi_{xx}}{\psi_x^2} = f_1(\psi), \quad \frac{-\psi_{xt} + k\psi_{xxx} + q\psi_x}{\psi_x^3} = f_2(\psi). \tag{7}$$

Здесь $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ – произвольные функции. Будем устанавливать, когда система уравнений (7) совместна. Из первого уравнения системы $\psi_{xx} = (\psi_t + f_1\psi_x^2)/(3k)$. Продифференцируем это соотношение по переменной x и полученную производную ψ_{xxx} подставим во второе уравнение системы. Разрешив полученное соотношение относительно производной ψ_{xt}, имеем

$$\psi_{xx} = \frac{\psi_t + f_1\psi_x^2}{3k}, \quad \psi_{xt} = \frac{3}{2}q\psi_x + f_3\psi_x^3 + \frac{1}{3k}f_1\psi_x\psi_t, \quad f_3 = \frac{1}{2}f_1' + \frac{1}{3k}f_1^2 - \frac{3}{2}f_2. \tag{8}$$

Соотношения (8) будут задавать производные второго порядка одной и той же функции, если смешанные производные равны ($\psi_{xxt} = \psi_{xtx}$). Это условие выполняется, когда

$$\psi_{tt} = \frac{3}{2}q\psi_t + \frac{1}{3k}f_1\psi_t^2 + 3f_3\psi_t\psi_x^2 + f_4\psi_x^4, \quad f_4 = 2f_1f_3 + 3kf_3'. \tag{9}$$

Чтобы все полученные вторые производные были производными одной функции ψ_{xt}, их смешанные производные должны быть равны. Требуем, чтобы $\psi_{xtt} = \psi_{ttx}$. Условие будет выполняться, если

$$6f_4\psi_t\psi_x^2 + 6f_3\psi_t^2 + 3k(f_4' + f_1f_4/k)\psi_x^4 = 0. \tag{10}$$

Замечаем, что если $f_3 = 0$, соотношение (10) обращается в тождество. Полученные результаты приводят к следующему утверждению:

Утверждение 1. *Система (7) совместна, если вторые производные функции $\psi(x,t)$ определяются из соотношений (8), (9) и $f_2 = f_1'/3 + 2f_1^2/(9k)$, $f_1(\psi)$ – произвольная функция. В этом случае уравнения (5), (6) имеют вид соответственно*

$$kQ''' + Q''f_1 + Q'[f_1'/3 + 2f_1^2/(9k)] = 0; \; (kQ''' - \alpha Q'^3) + Q''f_1 + Q'[f_1'/3 + 2f_1^2/(9k)] = 0.$$

Если $f_3 \neq 0$, то, выписав дифференциальные следствия соотношения (10) и подставив в полученные выражения вторые производные из (8), (9), получим, что $\psi_x = g_1(\psi)$, $\psi_t = g_2(\psi)$. Потребовав равенства смешанных производных, будем иметь $g_2(\psi) = Cg_1(\psi), C = \text{const}$. Тогда справедливо

Утверждение 2. *Если $f_3 \neq 0$, то $\psi = \psi(ax + bt)$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$. Тогда, так как $u = Q_x = Q'(\psi)\psi_x(\psi)$, то $u = u(ax + bt)$ и уравнения (1) и (2) имеют вид соответственно $-bu_z + ka^2u_{zz} + qu = 0$, $-bu_z + ka^2u_{zz} + qu - \alpha u^3 = 0$, $z = ax + bt$.*

Отыскание поверхностей уровня для уравнений теплопроводности

Положим, что произвольное $f_1 = \text{const}$ и $f_2 = 2f_1^2/(9k) = \text{const}$. Тогда условие (10) выполняется. Из соотношения (9) находим ψ_t, считая, что x – параметр. Предварительно полагая, что $\psi_t \neq 0$, запишем (9) в виде $(1/\psi_t)_t + 1{,}5q(1/\psi_t) = f_1/(3k)$. Решаем это линейное уравнение и получаем, что $\psi_t = 1{,}5qC(x)\exp(3qt/2)/[1 - f_1C(x)\exp(3qt)/(3k)]$. Затем из второго соотношения (8) определяем ψ_x. Получаем, что

$$\psi_x = C_x \exp(3qt/2)/[1 - f_1 C(x)\exp(3qt/2)/(3k)].$$

Требуя тождественного выполнения первого соотношения (8), приходим к уравнению для определения $C(x)$: $C_{xx} = qC/(2k)$. Отсюда $C(x) = A_1 \exp[\pm x\sqrt{q/(2k)}] + A_2 \exp[\mp x\sqrt{q/(2k)}]$. Здесь $A_1 = \text{const},\ A_2 = \text{const}$. Далее положим, что $A_1 = 1,\ A_2 = 0$ и выпишем для этого случая окончательный вид ψ_t и ψ_x

$$\psi_t = \frac{3q\exp[(3qt/2) \pm x\sqrt{q/(2k)}]/2}{1 - f_1\exp[(3qt/2) \pm x\sqrt{q/(2k)}]/(3k)},\quad \psi_x \frac{\pm\sqrt{q/(2k)}\exp[(3qt/2) \pm x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - f_1\exp[(3qt/2) \pm x\sqrt{q/(2k)}]/(3k)}.$$

В выражении для ψ_x знак перед числителем выражения совпадает со знаком в показателе степени экспоненты. Далее, находим, что поверхность уровня в этом случае имеет вид

$$\psi = -3k\ln\{1 - f_1\exp[(3qt/2) \pm x\sqrt{q/(2k)}]/(3k)\}/f_1. \tag{11}$$

Положим $f_2 = 0$. Тогда $f_1(\psi) = 3k/(2\psi + \psi_o)$, $\psi_o = \text{const}$ (см. утверждение 1). Требуем далее, чтобы вторые производные функции $\psi(x,t)$ удовлетворяли условиям (8), (9). Решая уравнение (9) и второе уравнение из (8) и считая при этом, что x – параметр, получаем, что

$$\psi_t = \sqrt{2\psi + \psi_o}[M(x) + 3q\sqrt{2\psi + \psi_o}/2],\quad \psi_x = N(x)\sqrt{2\psi + \psi_o}\exp(3qt/2).$$

Требуя тождественного выполнения первого условия (8), окончательно получаем

$$\psi = \frac{2k^2}{q^2}\left[\pm\sqrt{\frac{q}{2k}}\exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) - \frac{M}{3k}\right]^2 - \frac{\psi_o}{2},\ M = \text{const},\ \psi_o = \text{const}. \tag{12}$$

Заметим, что знаки перед экспонентой и в показателе степени экспоненты совпадают.

Из условия $f_2 = 0$ следует, что $\psi_t - k\psi_{xx} - q\psi = A = \text{const}$. Нетрудно проверить, что если $\psi_o = 4M^2/(9q^2)$, то подстановка функции $\psi(x,t)$ из (2) в уравнение (1) дает $A = 0$. Итак, имеем

Следствие 1. *Решение* $u(x,t) = (2k^2/q^2)\{\pm\sqrt{q/(2k)}\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}] - M/(3k)\}^2 - \psi_o/2$ *линейного дифференциального уравнения* $u_t = ku_{xx} + qu + C$, *где* $M = \text{const}$, $\psi_o = \text{const}$, $C = C(q, M, \psi_o)$, *является поверхностью уровня уравнения (2).*

Следствие 2. *Решение* $u(x,t) = (2k^2/q^2)\{\pm\sqrt{q/(2k)}\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}] - M/(3k)\}^2 - \psi_o/2$ *линейного дифференциального уравнения (1) является поверхностью уровня уравнения (2), если* $\psi_o = 4M^2/(9q^2)$.

Положим, что $f_2 = \alpha Q'^2(\psi)$, тогда согласно утверждению 1 система уравнений (7) совместна, если

$$f_1'/3 + 2f_1^2/(9k) = f_2 = \alpha Q'^2. \tag{13}$$

С другой стороны, уравнение (6) в этом случае будет иметь вид $kQ''' + Q''f_1 = 0$. Выражая отсюда f_1 и подставляя полученное значение в (13), приходим к зависимости

$$Q''''Q'' - 5Q'''^2/3 + 3\alpha Q''^2 Q'^2/k = 0.$$

Решая это уравнение, получаем частное решение $Q' = \mp\sqrt{2k/\alpha}(3\psi + \psi_0)$, где $\psi_0 = \text{const}$. Далее из (13) определяем, что $f_1 = 6k/(3\psi - \psi_0)$. Требуем, чтобы выполнялись соотношения (8), (9). В результате окончательно получаем, что

$$\psi = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3q}\exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) - c\right]^3 - \frac{\psi_0}{3},\quad c = \text{const}. \tag{14}$$

Точные решения уравнений теплопроводности

Определяем $Q(\psi)$ из уравнений (случай $f_1 = \text{const}$)

$$kQ''' + Q''f_1 + Q'[f_1'/3 + 2f_1^2/(9k)] = 0\ ;\ (kQ''' - \alpha Q'^3) + Q''f_1 + Q'[f_1'/3 + 2f_1^2/(9k)] = 0.$$

Решая линейное уравнение для $Q(\psi)$, находим, что

$$Q' = C_1 \exp[-f_1\psi/(3k)] + C_2 \exp[-2f_1\psi/(3k)],\quad C_1 = \text{const},\quad C_2 = \text{const}.$$

Учитывая, что решение уравнения (1) $u = Q_x = Q'\psi_x$, получаем

$$u = \frac{\pm\sqrt{q/(2k)}\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - f_1 \exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]/(3k)}\{C_1 \exp[-f_1\psi/(3k)] + C_2 \exp[-2f_1\psi/(3k)]\}.$$

Подставив сюда выражение для ψ из (11), имеем

$$u = \pm\sqrt{\frac{q}{2k}\exp\left(\frac{3q}{2}t \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right)}\left\{C_1 + C_2\left[1 - \frac{f_1}{3k}\exp\left(\frac{3q}{2}t \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right)\right]\right\}.$$

Решаем нелинейное уравнение для $Q(\psi)$. Полагаем, что $Q' = p(\psi)$, а затем полагаем, что $p' = r(p)$. В результате приходим к уравнению $krr_p + f_1 r = \alpha p^3 - 2f_1^2 p/(9k)$. Находим частное решение данного уравнения вида $r = ap^2 + bp$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$. Получаем, что $a = \pm\sqrt{\alpha/(2k)}$, $b = f_1/(3k)$. Возвращаясь к первоначальному уравнению, имеем

$$Q' = -\frac{f_1/(3k)}{\pm\sqrt{\alpha/(2k)} - C\exp[f_1\psi/(3k)]},\quad C = \text{const}.$$

Учитывая, что решение уравнения (2) $u = Q_x = Q'\psi_x$, выпишем окончательно решение уравнения (2)

$$u = \frac{\pm[f_1/(3k)]\sqrt{q/\alpha}\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - C_0 - [f_1/(3k)]\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]},\quad C = \pm C_0\sqrt{\frac{\alpha}{2k}}. \qquad (15)$$

Здесь знак числителя не зависит от знака в показателе экспоненты, то есть фактически имеется четыре решения

$$u = \frac{[f_1/(3k)]\sqrt{q/\alpha}\exp[3qt/2 + x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - C_0 - [f_1/(3k)]\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]},\quad u = \frac{-[f_1/(3k)]\sqrt{q/\alpha}\exp[3qt/2 + x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - C_0 - [f_1/(3k)]\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]},$$

$$u = \frac{[f_1/(3k)]\sqrt{q/\alpha}\exp[3qt/2 - x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - C_0 - [f_1/(3k)]\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]},\quad u = \frac{-[f_1/(3k)]\sqrt{q/\alpha}\exp[3qt/2 - x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - C_0 - [f_1/(3k)]\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]}. \qquad (16)$$

Для случая, когда $f_2 = 0$ уравнение (5) имеет вид $Q''' + 3Q''/(2\psi + \psi_o) = 0$. Решая это уравнение, определяем, что $Q' = C_1 - C_2/\sqrt{2\psi + \psi_o}$, $C_1 = \text{const}$, $C_2 = \text{const}$. Тогда окончательно получаем, учитывая (12), что

$$u = \frac{2k}{q}C_1\exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right)\left[\pm\sqrt{\frac{q}{2k}}\exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) - \frac{M}{3k}\right] - C_2\exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right).$$

Если $f_2 = 0$, то уравнение (6) имеет вид $(Q''' - \alpha Q'^3/k) + 3Q''/(2\psi + \psi_o) = 0$. Выпишем частное решение этого уравнения: $Q' = \pm\sqrt{2k/\alpha}[1/(2\psi + \psi_o)]$. Соответствующее решение уравнения (6) будет иметь вид

$$u = \frac{q}{k}\sqrt{\frac{2k}{\alpha}}\exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right)\left[\pm\sqrt{\frac{q}{2k}}\exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) - \frac{M}{2k}\right]^{-1}. \qquad (17)$$

Если поверхность уровня определяется выражением (14), решение уравнения (2) имеет вид

$$u = \pm\sqrt{q/\alpha}\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]\{\exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}] - c\}^{-1},\quad c = \text{const}. \qquad (18)$$

Здесь знак перед выражением для u может не совпадать со знаком в показателе экспоненты (имеем, фактически, четыре решения).

Другой подход к изучению поведения решений нелинейного уравнения теплопроводности

Покажем, что характеристиками уравнений (1) и (2) являются линии $t = \text{const}$.

Чтобы доказать это утверждение, в уравнении (2) перейдем от функции $u(x,t)$ к функции $t(u,x)$ [8]. Получим

$$t_u^2 + k(t_u^2 t_{xx} - 2t_x t_u t_{xu} + t_x^2 t_{uu}) - (qu - \alpha u^3)t_u^3 = 0\,. \qquad (19)$$

В уравнении (19) сделаем замену независимых переменных $u - \varphi(x) = \xi, \quad x = \eta$:

$$t_\xi^2 + k[t_\xi^2(t_{\eta\eta} - 2t_{\xi\eta}\varphi_x + t_{\xi\xi}\varphi_x^2 - t_\xi\varphi_{xx}) - 2t_\xi(t_\eta - t_\xi\varphi_x)(t_{\xi\eta} - t_{\xi\xi}\varphi_x) + t_{\xi\xi}(t_\eta - t_\xi\varphi_x)^2]$$
$$-[q(\xi + \varphi) - \alpha(\xi + \varphi)^3]t_\xi^3 = 0.$$

Полагая, что $\xi = \text{const}$ – характеристика уравнения (19), выпишем выражение перед производной $t_{\xi\xi}$ и приравняем его нулю. Получим, что $t_\eta = 0$. Отсюда следует, что на характеристике $\xi = \text{const}$ имеем $t = \text{const}$. Тогда, чтобы уравнение (19) имело решение, вдоль характеристики должно выполняться условие совместности $t_\xi^2 - kt_\xi^3\varphi_{xx} - [q(\xi + \varphi) - \alpha(\xi + \varphi)^3]t_\xi^3 = 0.$ Решая это ОДУ, в случае, когда $\alpha = 0$ (уравнение (1)), и заменяя $\xi + \varphi = u$, получаем, что вдоль характеристики $t = \text{const}$ должно выполняться соотношение

$$u(t,x) = \{w_0(t) + c_0(t)\sin[\pm(x + c_1(t))\sqrt{q/k}]\}/q,$$
$$c_0(t) = \text{const},\ \ w_0(t) = \text{const},\ \ c_1(t) = \text{const}. \qquad (20)$$

Подробнее остановимся на решении уравнения (2). Выпишем вид уравнения, считая, что $x(u,t)$ – независимая переменная

$$x_t x_u^2 - kx_{uu} + (qu - \alpha u^3)x_u^3 = 0\,. \qquad (21)$$

Когда $\alpha \neq 0$, требуя выполнения вдоль характеристики $t = \text{const}$ условия совместности, приходим к выражению

$$x = c_1 \pm \int \frac{du}{\sqrt{\alpha u^4/(4k) - qu^2/(4k) + w_0 u + c_0}}\,. \qquad (22)$$

Здесь, вообще говоря, можно положить $c_1 = c_1(t), c_2 = c_2(t), w_0 = w_0(t)$ и, подставляя полученное выражение в уравнение (21), получить соотношения для определения неизвестных функций $c_1 = c_1(t), c_2 = c_2(t), w_0 = w_0(t)$. Чтобы представить в этом случае характер изменения интересующей нас функции $u(x,t)$, преобразуем выражение под знаком корня в интеграле (22):

$$\alpha u^4/(4k) - qu^2/(4k) + w_0 u + c_0 = [\alpha/(4k)][u^2 + 2a(t)u - (q/\alpha - 2a^2(t) - b(t))][u^2 - 2a(t)u$$
$$-(q/\alpha - 2a^2(t) + b(t))]$$

и таким образом вычисление интеграла (22) приведем к выражению его через эллиптический интеграл первого рода, обратной функцией которого является функция Вейерштрасса [9]. Следовательно вдоль любой характеристики $t = \text{const}$ имеем $u(x,t) = \wp(x)$ ($\wp(x)$ – функция Вейерштрасса). Известно также [10], что функция Вейерштрасса имеет полюсы, приближение к которым, очевидно, будет приводить к обострению в решении, что не наблюдается в решении (20) линейного уравнения (1).

Заключение

Из полученных решений уравнения (2) следует, что катастрофа в процессах, которые описываются данным уравнением, возникает тогда, когда знаменатель решения (а он присутствует в решениях нелинейного уравнения (15)–(18) и у функции Вейерштрасса) стремится к нулю.

На рис. 1 показано поведение решения нелинейного уравнения в зависимости от времени (*1*: t = 0; *2*: t = 0,5; *3*: t = 1; *4*: t = 1,5; *5*: t = 2; *6*: t = 2,5). На рис. 2 имеем вид решения в зависимости от времени для линейного уравнения (*1*: t = 0; *2*: t = 0,1; *3*: t = 0,5; *4*: t = 1; *5*: t = 1,5).

В выражениях (15), (17), (18) сразу виден управляющий параметр, выбор которого позволяет, по крайней мере, отодвинуть катастрофу в случае нелинейного уравнения – это произвольная постоянная в знаменателе решения нелинейного уравнения (см. рис. 3, вид $u(x,t)$ для разных произвольных постоянных c в знаменателе решения при $t = 1$ (*1*: c = 100; *2*: c = 1000; *3*: c = 2500; *4*: c = 4000; *5*: c = 7000).

Величина произвольной постоянной в знаменателе связана со значением решения в точке $\{x = 0, t = 0\}$. Так, в решении (18) $c = [\pm\sqrt{q/\alpha} - u(0,0)]/u(0,0)$. Если $u(0,0) = \mp\sqrt{q/\alpha},$ то $c = 0$ и

$u(x,t) = \text{const} = \mp\sqrt{q/\alpha}$. Катастрофы удастся избежать также, если при стремлении знаменателя выражения к нулю сменить знак в числителе на противоположный (рис. 4, вид решения $u(x,t)$ в случае задания разных произвольных постоянных c в знаменателе решения, *1*: c = 1600; *2*: c = 2800; *3*: c = 4900). Здесь возрастающие ветви решений получены, когда перед выражением (15) знак плюс, а убывающие участки решений получены, когда перед выражением (15) задавался знак минус (см. (16)). При каждом заданном значении $u(0,0)$ увеличение времени процесса ведет к приближению катастрофы (рис. 1, сравните с поведением решения в зависимости от времени в случае линейного уравнения рис. 2).

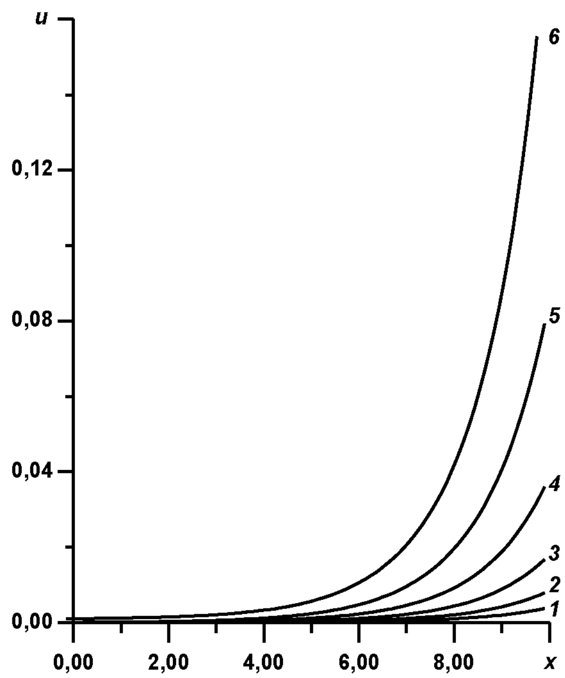

Рис. 1. Вид решения нелинейного уравнения

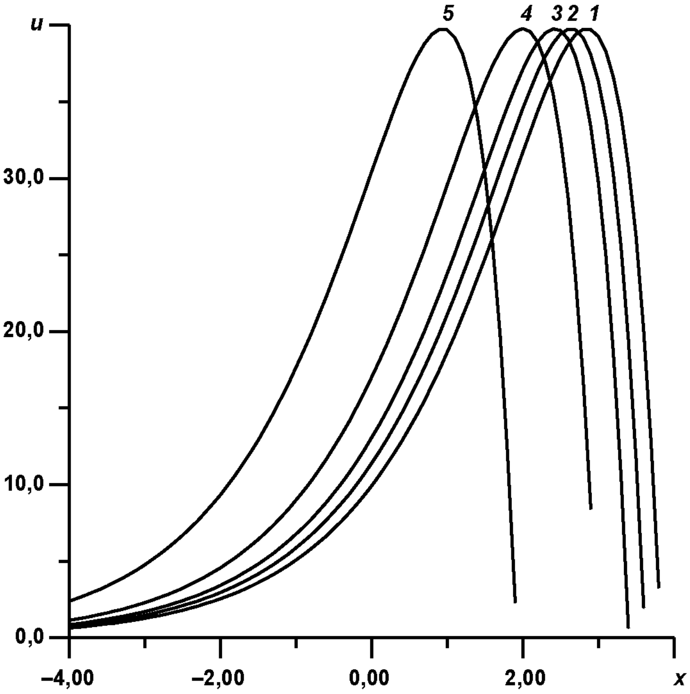

Рис. 2. Вид решения линейного уравнения

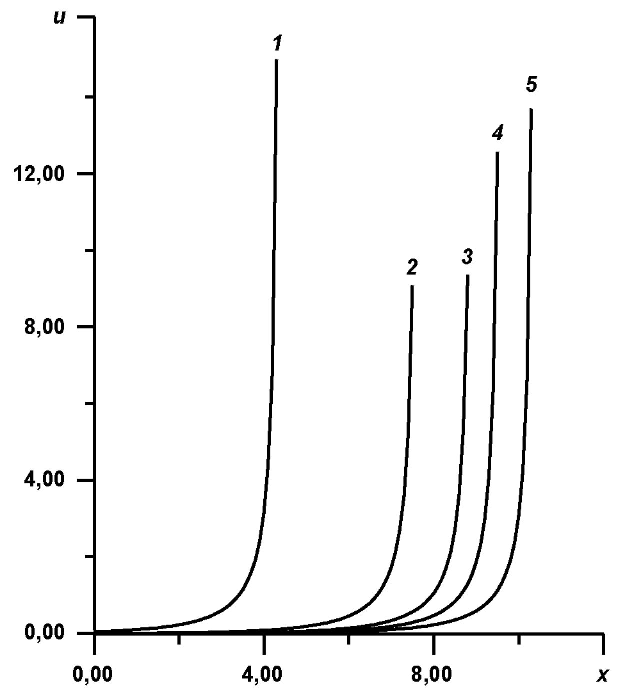

Рис. 3. Вид решения при различных постоянных

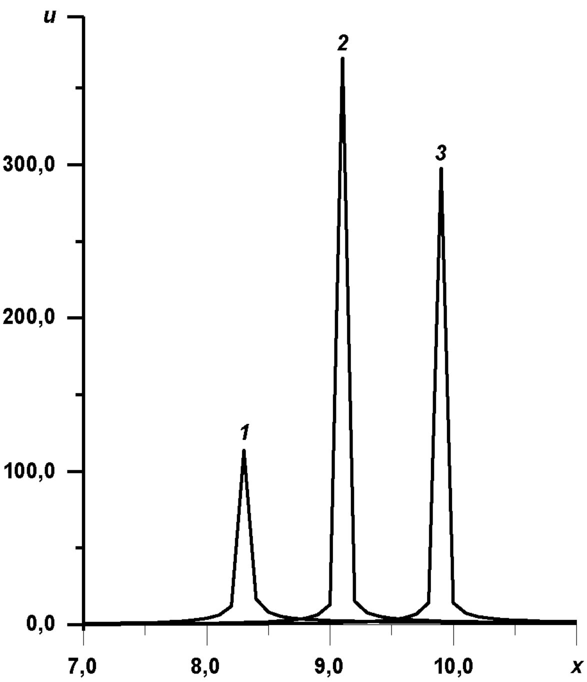

Рис. 4. Вид решения при смене знака

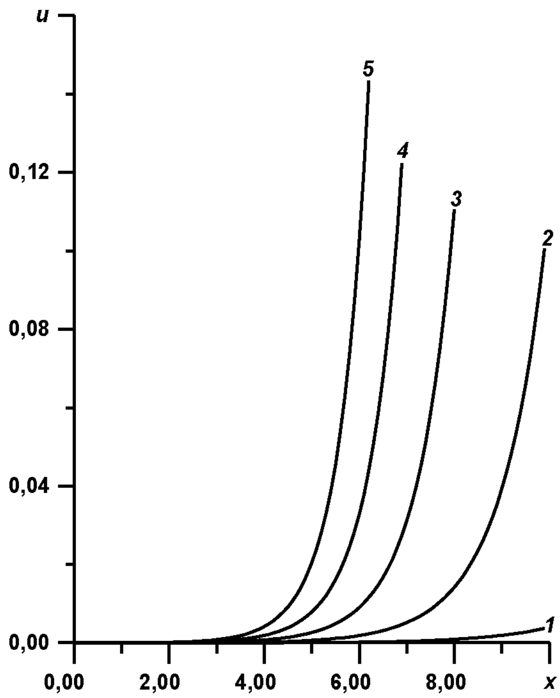

Рис. 5. Зависимость решения от параметра q

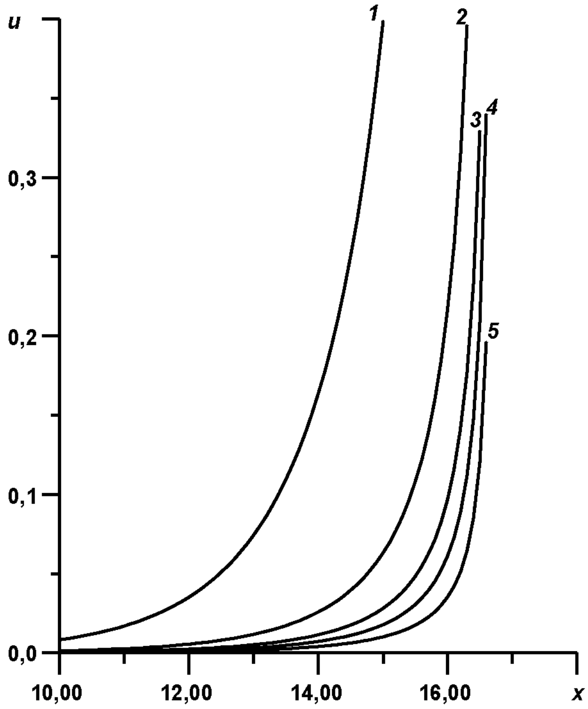

Рис. 6. Зависимость решения от параметра α

На рис. 5 показана зависимость решения от параметра q. Увеличение этого параметра приближает катастрофу (*1*: $q = 1$; *2*: $q = 2$; *3*: $q = 3$; *4*: $q = 4$; *5*: $q = 5$). Изменение параметра α слабо влияет на решение, но большие его значения заметно отодвигают катастрофу (см. рис. 6; *1*: $\alpha = 1$; *2*: $\alpha = 40$; *3*: $\alpha = 200$; *4*: $\alpha = 500$; *5*: $\alpha = 1500$).

Литература

1. Курдюмов, С.П. Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы. Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур / С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М.: Наука, 1996. – 111 с.

2. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / Самарский А.А., Галактионов В.А. и др. – М.: Наука, 1987. – 477 с.

3. Vazquez, J.L. A Stability Technique for Evolution Partial Differential Equations. A Dynamical System Approach / J.L. Vazquez, V. – Birkhauser Verlag, 2004. – 377 p.

4. Беркович, Л.М. Некоторые аналитические методы нелинейной динамики / Л.М. Беркович // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2005. – № 2(36). – С. 32–64.

5. Куркина, Е.С. О режимах с обострением в уравнениях $u_t = \mathrm{div}(u^{\sigma}\,\mathrm{grad}\,u) + u^{\beta}$ / Е.С. Куркина, И.М. Никольский // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: Тезисы докладов международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. – Новосибирск, 2008. – С. 512.

6. Рубина, Л.И. Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных / Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. – Т. 16, № 2. – С. 209–225.

7. Рубина, Л.И. О решении уравнения потенциала / Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2008. – Т.14, № 1. – С. 130–145.

8. Рубина, Л.И. О характеристиках и решениях одномерного нестационарного уравнения фильтрации / Л.И. Рубина // ПММ. – 2005. – Т. 69. – Вып. 5. – с. 829–836.

9. Ломкаци, Ц.Д. Таблицы эллиптической функции Вейерштрасса. Теоретическая часть / Ц.Д. Ломкаци; под ред. В.М. Белякова, К.А. Карпова. – М.: ВЦ АН СССР, 1967. – 88 с.

10. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматлит, 1962. – 1100 с.

TOWARDS THE DIFFERENCES IN BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF LINEAR AND NON-LINEAR HEAT-CONDUCTION EQUATIONS

***L.I. Rubina*[1], *O.N. Ul'yanov*[2]**

The linear and non-linear heat-conduction equations are analyzed by the previously initiated geometrical method of analyzing linear and non-linear equations in partial derivatives. The reason of the difference in behavior of solutions of equations under consideration was stated, as well as the reason of aggravation of the non-linear equation. A class of solutions of linear equations that represents the surfaces of the levels of non-linear heat-conduction equations was excluded.

Keywords: non-linear equations in partial derivatives, heat-conduction equations, exact solutions, surfaces of the level.

References

1. Kurdyumov S.P., Malinetskiy G.G., Potapov A.B. Nestatsionarnye struktury, dinamicheskiy khaos, kletochnye avtomaty. Novoe v sinergetike. Zagadki mira neravnovesnykh struktur (Unsteady structures, dynamic chaos, cellular automata. New in synergetics. Mysteries of the world of nonequilibrium structure). Moscow: Nauka, 1996. 111 p. (in Russ.).

2. Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy* (Blow-up regimes in problems for quasilinear parabolic equations). Moscow: Nauka, 1987. 477 p. (in Russ.).

3. Vazquez J.L., Galaktionov V. *A Stability Technique for Evolution Partial Differential Equations. A Dynamical System Approach.* Birkhauser Verlag, 2004. 377 p. (ISBN: 0-8176-4146-7)

4. Berkovich L.M. *Vestnik SamGU – Estestvennonauchnaya seriya.* 2005. no. 2(36). pp. 32–64. (in Russ.).

5. Kurkina E.S., Nikol'skiy I.M. O rezhimakh s obostreniem v uravneniyakh $u_t = \operatorname{div}(u^{\sigma} \operatorname{grad} u) + u^{\beta}$ (About blow-up regimes in equations $u_t = \operatorname{div}(u^{\sigma} \operatorname{grad} u) + u^{\beta}$). *Differentsial'nye uravneniya. Funktsional'nye prostranstva. Teoriya priblizheniy: Tezisy dokladov mezhdunarodnoy konferentsii, posvyashchennoy 100-letiyu so dnya rozhdeniya Sergeya L'vovicha Soboleva.* (Abstracts of the International Conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Sobolev "Differential Equations. Functional Space. Theory of Approximation") Novosibirsk, 2008. p. 512.

6. Rubina L.I., Ul'ianov O.N. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.* 2010. Vol. 16, no. 2. pp. 209–225. (in Russ.).

7. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues).* 2008, Vol. 261. Suppl. 1. pp. 183–200.

8. Rubina L.I. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2005. Vol. 69. Issue 5. pp. 829–836. (in Russ.).

9. Lomkatsi Ts.D. *Tablitsy ellipticheskoy funktsii Veyershtrassa. Teoreticheskaya chast'* (Weierstrass elliptic function charts. Theoretical part). Moscow: VTs AN SSSR, 1967. – 88 p. (in Russ.).

10. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* (Table of integrals, sums, series and compositions). Moscow : Fizmatlit, 1962. 1100 p.

Поступила в редакцию 17 сентября 2012 г.

[1] Rubina Liudmila Ilinichna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Staff Scientist, Institute of Mathematics and Mechanics of the Russian Academy of Sciences (Ural branch).
E-mail: rli@imm.uran.ru

[2] Ul'yanov Oleg Nikolaevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Staff Scientist, University's academic secretary, Institute of Mathematics and Mechanics of the Russian Academy of Sciences (Ural branch).
E-mail: secretary@imm.uran.ru