УДК 519.633

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е.А. Омельченко[1], М.В. Плеханова[2], П.Н. Давыдов[3]

Для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля с запаздыванием представлен численный метод решения, исследована сходимость явной разностной схемы, учитывающей эффект запаздывания в исследуемой системе. На основе полученных результатов осуществлена программная реализации метода.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, квазистационарная система уравнений фазового поля, разностная схема.

1. Введение

В настоящей работе предложен численный метод решения линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля [1] с запаздыванием

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w(x,t) + \Phi_{11}v^t(x,\cdot) + \Phi_{12}w^t(x,\cdot), \quad (x,t)\in[0,\pi]\times[0,T], \tag{1}$$

$$0 = v(x,t) + (\beta+\Delta)w(x,t) + \Phi_{21}v^t(x,\cdot) + \Phi_{22}w^t(x,\cdot), \quad (x,t)\in[0,\pi]\times[0,T], \tag{2}$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \quad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$v(x,t) = \varphi(x,t), \quad w(x,t) = \psi(x,t), \quad (x,t)\in[0,\pi]\times[-r,0], \tag{4}$$

где $v^t(x,s) = v(x,t+s)$, $w^t(x,s) = w(x,t+s)$ при $s\in[-r,0]$, $r>0$. При этом отображения $\Phi_{i1}: v^t(x,\cdot)\to z_{i1}(x,t)$, $\Phi_{i2}: w^t(x,\cdot)\to z_{i2}(x,t)$ при каждом $x\in[0,\pi]$, $t\in[0,T]$ линейно и непрерывно действуют из пространства $C([-r,0];R)$ в R.

Исследование разрешимости этой задачи в рамках начальной задачи

$$u(t) = h(t), \quad t\in[-r,0], \tag{5}$$

для операторно-дифференциального уравнения соболевского типа с запаздыванием

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \Phi u^t + f(t), \quad t\in[0,T], \tag{6}$$

было проведено ранее в работах В.Е. Федорова и Е.А. Омельченко [2, 3]. Здесь U, F – банаховы пространства, $u^t(s) = u(t+s)$ при $s\in[-r,0]$, операторы $L: U\to F$, $\Phi: C([-r,0]\ ;U)\to F$ линейны и непрерывны, $\ker L\neq\{0\}$, оператор M: dom$M\to F$ линеен, замкнут и плотно определен в U, $f:[0,T]\to F$. Особенность линейного эволюционного уравнения с запаздыванием (6) в том, что оно является вырожденным в смысле присутствия оператора при производной, не обратимого в силу наличия у него нетривиального ядра. Настоящая работа представляет собой шаг к завершению естественного цикла исследований задач вида (5), (6), заключающемуся в разработке численных методов решения класса задач.

Численным аспектам исследования задач для уравнений с последействием, в том числе задач для функционально-дифференциально-алгебраических уравнений, которые относятся к классу уравнений вида (6), посвящены работы В.Г. Пименова и его учеников [4–6]. В этих работах, в частности, сконструировано семейство сеточных методов для численного решения эволюцион-

[1] Омельченко Екатерина Александровна – старший преподаватель, кафедра гуманитарных и социально-экономических дисциплин, Уральский филиал «Российская академия правосудия».
E-mail: omelchenko_ea@mail.ru
[2] Плеханова Марина Васильевна – доцент, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: mariner79@mail.ru
[3] Давыдов Павел Николаевич – аспирант, кафедра математического анализа, Челябинский государственный университет.
E-mail: davydov@csu.ru

ных уравнений с, вообще говоря, нелинейной функцией запаздывания на основе идеи разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих.

С помощью результатов работ [2, 3, 5, 6] авторами данной статьи исследована сходимость явной разностной схемы для задачи (1)–(4). В первом параграфе, следуя идее разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих, показана сходимость сеточного метода для соответствующей задачи без запаздывания ($\Phi_{ij}=0, i, j=1, 2$). Во втором параграфе доказана сходимость разностной схемы, учитывающей запаздывание. При этом соответствующая схеме дискретная модель определяется стартовыми значениями, формулой продвижения на шаг и оператором интерполяции и поэтому относится к классу моделей, исследованному в [5, 6] в связи с рассмотрением невырожденных эволюционных уравнений. И, наконец, третий параграф посвящен конкретной программной реализации метода.

2. Линеаризованная квазистационарная система уравнений фазового поля

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений

$$v_t(x,t)=\Delta v(x,t)-\Delta w(x,t), \quad (x,t)\in[0,\pi]\times[0,T], \tag{7}$$

$$0=v(x,t)+(\beta+\Delta)w(x,t), \quad (x,t)\in[0,\pi]\times[0,T], \tag{8}$$

$$v(0,t)=v(\pi,t)=w(0,t)=w(\pi,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{9}$$

$$v(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,\pi], \tag{10}$$

где $\beta<0$, а v, w – искомые функции. Заметим, что начальное значение $w(x,0)$ для одной из искомых функций w не задано. Однако, как показано в [7], задача (7)–(10) однозначно разрешима. В случае же задания обеих начальных функций $v(x,0)$, $w(x,0)$ задача оказывается переопределенной и необходимо выполнение условий согласования данных задачи (7)–(10) для ее разрешимости.

Разобьем отрезок пространственной переменной $[0,\pi]$ на части с шагом $h=\pi/N$, определив тем самым точки $x_n=nh, n=0,\ldots,N.$ Аналогичным образом разобьем временной отрезок $[0,T]$ на части с шагом $\tau>0$, получив точки разбиения $t_m=m\tau$, $m=0,\ldots,M$. Приближенные значения функций v, w в узлах с координатами (x_n,t_m) будем обозначать через v_n^m, w_n^m. Рассмотрим сеточный метод

$$\frac{v_n^{m+1}-v_n^m}{\tau}=\frac{v_{n+1}^m-2v_n^m+v_{n-1}^m}{h^2}-\frac{w_{n+1}^m-2w_n^m+w_{n-1}^m}{h^2}, \quad m=0,\ldots,M-1, \tag{11}$$

$$0=v_n^m+\beta w_n^m+\frac{w_{n+1}^m-2w_n^m+w_{n-1}^m}{h^2}, \quad m=0,\ldots,M, \tag{12}$$

где $n=1,\ldots,N-1$, с начальными условиями

$$v_n^0=\varphi(x_n), \quad n=0,\ldots,N,$$

и граничными условиями

$$v_0^m=v_N^m=w_0^m=w_N^m=0, \quad m=0,\ldots,M.$$

Невязкой метода (11), (12) назовем сеточную функцию $\Psi_n^m=\left(\xi_n^m,\eta_n^m\right)$, где

$$\xi_n^m=\frac{v(x_n,t_{m+1})-v(x_n,t_m)}{\tau}-\frac{v(x_{n+1},t_m)-2v(x_n,t_m)+v(x_{n-1},t_m)}{h^2}+$$
$$+\frac{w(x_{n+1},t_m)-2w(x_n,t_m)+w(x_{n-1},t_m)}{h^2},$$

$$\eta_n^m=v(x_n,t_m)+\beta w(x_n,t_m)+\frac{w(x_{n+1},t_m)-2w(x_n,t_m)+w(x_{n-1},t_m)}{h^2},$$

через $v(x_n,t_m)$, $w(x_n,t_m)$ обозначены истинные значения решения v, w задачи (7)–(10) в соответствующих точках. Будем говорить, что невязка имеет порядок $\tau^{p_1}+h^{p_2}$, если существует такая константа C, не зависящая от τ и h, что $\left\|\Psi_n^m\right\|_{R^2} \le C(\tau^{p_1} + h^{p_2})$ для всех, $n = 1,\ldots,N-1,\ m = 0,\ldots,M-1$.

Лемма 1. Пусть точное решение v, w задачи (7)–(10) таково, что функция v дважды непрерывно дифференцируема по t, функции v, w четырежды непрерывно дифференцируемы по x. Тогда невязка метода (11), (12) имеет порядок $\tau + h^2$.

Доказательство. С помощью тейлоровского разложения функций $v(x,t)$, $w(x,t)$ получим выражения для невязки

$$\xi_n^m = -\frac{1}{2}\tau v_{tt} + \frac{1}{12}h^2(v_{xxxx} + w_{xxxx}),\quad \eta_n^m = -\frac{1}{12}h^2 w_{xxxx}. \square$$

Исследуем устойчивость этой схемы методом разделения переменных.

Теорема 1. Пусть $\beta < 0$. Тогда схема (11), (12) устойчива, если выполнено условие $\tau \le h^2$.

Доказательство. Обозначив через ρ_q^m, σ_q^m коэффициенты q-х гармоник на m-м слое, имеем

$$v(x_n,t_m) = \rho_q^m e^{iqx_n},\quad w(x_n,t_m) = \sigma_q^m e^{iqx_n},\quad q = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Подстановка этих функций в (11), (12) приведет к равенствам

$$\rho_q^{m+1} - \rho_q^m = \frac{\tau}{h^2}(2\rho_q^m(\cos qh - 1) - 2\sigma_q^m(\cos qh - 1)), \tag{13}$$

$$0 = \rho_q^m + \beta\sigma_q^m + \frac{2\sigma_q^m}{h^2}(\cos qh - 1).$$

Из последнего равенства получим выражение

$$\sigma_q^m = \frac{\rho_q^m}{\frac{2}{h^2}(1-\cos qh) - \beta} \tag{14}$$

и подставим его в (13), тогда

$$\rho_q^{m+1} = \rho_q^m\left(1 - \frac{2\tau}{h^2}(1-\cos qh)\left(1 - \frac{h^2}{2(1-\cos qh) - h^2\beta}\right)\right). \tag{15}$$

Из того, что $\beta < 0$, следует неравенство

$$r_q \equiv 1 - \frac{2\tau}{h^2}(1-\cos qh)\left(1 - \frac{h^2}{2(1-\cos qh) - h^2\beta}\right) \le 1$$

сразу для всех $q \in N$. Покажем, что $r_q \ge -1$ при любом $q \in N$. Для этого надо показать, что

$$\frac{\tau}{h^2}(1-\cos qh)\left(1 - \frac{h^2}{2(1-\cos qh) - h^2\beta}\right) \le 1.$$

Это неравенство выполняется при $\tau \le h^2$.

В силу равенств (14) и (15)

$$\sigma_q^{m+1} = \frac{\rho_q^{m+1}}{\frac{2}{h^2}(1-\cos qh) - \beta} = \frac{\rho_q^m\left(1 - \frac{2\tau}{h^2}(1-\cos qh)\left(1 - \frac{h^2}{2(1-\cos qh) - h^2\beta}\right)\right)}{\frac{2}{h^2}(1-\cos qh) - \beta} =$$

$$= \sigma_q^m\left(1 - \frac{2\tau}{h^2}(1-\cos qh)\left(1 - \frac{1}{\frac{2}{h^2}(1-\cos qh) - \beta}\right)\right).$$

Поэтому коэффициент перехода для второй неизвестной функции также равен r_q и поэтому рассматриваемая разностная схема является устойчивой при $\tau \le h^2$. □

Замечание 1. Анализ доказательства теоремы 1 приводит к выводу, что при $\beta \ge 0$ не представляется возможным доказать устойчивость предложенной разностной схемы и необходима ее модификация или выбор другого метода вычисления.

В качестве итога полученных результатов сформулируем теорему о сходимости, которая сразу следует из критерия Куранта [8], леммы 1 и теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $\beta < 0$ и для разностной схемы (11), (12) τ, h таковы, что $\tau \le h^2$. Тогда разностное решение сходится к точному решению задачи (7) – (10) с порядком не ниже $\tau + h^2$.

3. Система уравнений с запаздыванием

Вернемся к начально-краевой задаче с запаздыванием (1)–(4). Для отрезка пространственной переменной $[0,\pi]$ имеем прежнее разбиение с шагом $h = \pi / N$ и точками $x_n = nh, n = 0,\ldots,N$. Временной отрезок теперь имеет вид $[-r,T]$. Для определенности считаем, что T/r – рациональное число, шаг разбиения $\tau = T/M = r/L$, где $L, M \in N$, точки разбиения $t_m = m\tau, m = -L,\ldots,0,\ldots,M$. Помимо приближений v_n^m, w_n^m искомых функций v, w понадобится также дискретная предыстория в точке x_n к моменту t_k:

$$\left\{\left(v_n^m, w_n^m\right)\right\}_k = \left\{\left(v_n^m, w_n^m\right) : k - L \le m \le k\right\}, \quad n = 0,\ldots,N, \quad k = 0,\ldots,M.$$

Предполагается также, что задан оператор интерполяции дискретной предыстории $I : \left\{\left(v_n^m, w_n^m\right)\right\}_k \to \left(g_n^k, h_n^k\right) \in Q[-r,0] \times Q[-r,0]$. Здесь $n = 0,\ldots,N$, $Q[-r,0]$ – множество кусочно-непрерывных функций на $[-r,0]$ с конечным числом точек разрыва первого рода в точках разрыва непрерывных справа. Зададим норму: $\|g\|_{Q[-r,0]} = \sup\limits_{s\in[-r,0]} |g(s)|$ для $g \in Q[-r,0]$. Будем считать, что линейные операторы Φ_{ij} продолжимы на пространство $Q[-r,0]$ ограниченным образом.

Следуя работам [4, 5], будем говорить, что оператор интерполяции имеет порядок погрешности τ^p на точном решении v, w, если существуют такие положительные константы C_1, C_2,что для всех $n = 0,\ldots,N$, $k = 0,\ldots,M$ и $t \in [t_k - r, t_k]$ выполняются неравенства

$$\left|g_n^k(t) - v(x_n,t)\right| \le C_1 \max_{k-L\le m\le k} \left|v_n^m - v(x_n,t_m)\right| + C_2\tau^p,$$

$$\left|h_n^k(t) - w(x_n,t)\right| \le C_1 \max_{k-L\le m\le k} \left|w_n^m - w(x_n,t_m)\right| + C_2\tau^p.$$

Рассмотрим разностную схему

$$\frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\tau} = \frac{v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m}{h^2} - \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2} + \Phi_{11}g_n^m + \Phi_{12}h_n^m, \tag{16}$$

$$0 = v_n^m + \beta w_n^m + \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2} + \Phi_{21}g_n^m + \Phi_{22}h_n^m, \tag{17}$$

где $n = 1,\ldots,N-1$, $m = 0,\ldots,M-1$ в (16) и $m = 0,\ldots,M$ в (17), с начальными условиями

$$v_n^0 = \varphi(x_n,0), \quad w_n^0 = \psi(x_n,0), \quad n = 0,\ldots,N, \tag{18}$$

$$g_n^0(t) = \varphi(x_n,t), \quad h_n^0(t) = \psi(x_n,t), \quad n = 0,\ldots,N, \quad t \in [-r,0], \tag{19}$$

и граничными условиями

$$v_0^m = v_N^m = w_0^m = w_N^m = 0, \quad m = 0,\ldots,M. \tag{20}$$

Согласно результатам работ [2, 3] необходимым условием разрешимости задачи (1) – (4) является выполнение условия согласования начальных данных φ и ψ

$$0 = \varphi(x,0) + (\beta + \Delta)\psi(x,0) + \Phi_{21}\varphi(x,\cdot) + \Phi_{22}\psi(x,\cdot), \quad x \in (0,\pi).$$

По умолчанию считаем, что оно выполняется.

Невязкой метода (16), (17) назовем сеточную функцию $\tilde{\psi}_n^m = (\tilde{\xi}_n^m, \tilde{\eta}_n^m)$, где

$$\tilde{\xi}_n^m = \frac{v(x_n, t_{m+1}) - v(x_n, t_m)}{\tau} - \frac{v(x_{n+1}, t_m) - 2v(x_n, t_m) + v(x_{n-1}, t_m)}{h^2} +$$
$$+ \frac{w(x_{n+1}, t_m) - 2w(x_n, t_m) + w(x_{n-1}, t_m)}{h^2} - \Phi_{11} v^{t_m}(x_n, \cdot) - \Phi_{12} w^{t_m}(x_n, \cdot),$$
$$\tilde{\eta}_n^m = v(x_n, t_m) + \beta w(x_n, t_m) + \frac{w(x_{n+1}, t_m) - 2w(x_n, t_m) + w(x_{n-1}, t_m)}{h^2} + \Phi_{21} v^{t_m}(x_n, \cdot) + \Phi_{22} w^{t_m}(x_n, \cdot).$$

Так же, как теорема 4 в [5], с помощью теоремы 1 настоящей работы об устойчивости схемы (11) , (12), теорем 1 и 3 из [5] доказывается следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\beta < 0$, $\tau \le h^2$, оператор $I : R^{2L+2} \to Q[-r, 0]$ липшицев и имеет порядок погрешности τ^{p_0} на точном решении, невязка $\tilde{\psi}_n^m$ имеет порядок $\tau^{p_1} + h^{p_2}$. Тогда разностное решение сходится к точному решению задачи (1)–(4) с порядком $\tau^{\min\{p_0, p_1\}} + h^{p_2}$.

Отметим лишь, что требующаяся для доказательства теоремы липшицевость операторов Φ_{ij} в данном случае очевидна, поскольку они линейны и ограничены.

4. Численный эксперимент

Пусть $\Phi_{ij} g = a_{ij} g(-1)$ для $g \in Q[-1, 0]$, $i, j = 1, 2$. Другими словами, система (1)–(4) имеет вид

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w(x,t) + a_{11} v(x, t-1) + a_{12} w(x, t-1), \quad (x,t) \in [0,\pi] \times [0,T], \tag{21}$$
$$0 = v(x,t) + (\beta + \Delta) w(x,t) + a_{21} v(x, t-1) + a_{22} w(x, t-1), \quad (x,t) \in [0,\pi] \times [0,T], \tag{22}$$

и снабжена краевыми и начальными условиями (3), (4). Разностная схема (16), (17) для нее при выборе, например, кусочно-постоянной или кусочно-линейной интерполяции будет иметь вид

$$\frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\tau} = \frac{v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m}{h^2} - \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2} + a_{11} v_n^{m-L} + a_{12} w_n^{m-L}, \tag{23}$$
$$0 = v_n^m + \beta w_n^m + \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2} + a_{21} v_n^{m-L} + a_{22} w_n^{m-L}, \tag{24}$$

где $n = 1, \dots, N-1$, $m = 0, \dots, M-1$ в (23) и $m = 0, \dots, M$ в (24), с начальными условиями (18), (19) и граничными условиями (20). При этом порядок погрешности оператора кусочно-постоянной интерполяции на точном решении равен τ, для кусочно-линейной интерполяции – τ^2 [9]. По аналогии с леммой 1, нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть точное решение v, w задачи (21), (22), (3), (4) таково, что функция v дважды непрерывно дифференцируема по t, функции v, w четырежды непрерывно дифференцируемы по x. Тогда невязка метода (23), (24) имеет порядок $\tau + h^2$.

Теорема 3 влечет

Следствие 1. Пусть $\beta < 0$, $\tau \le h^2$, интерполяция кусочно-постоянна или кусочно-линейна. Тогда разностное решение сходится к точному решению задачи (1)–(4) с порядком $\tau + h^2$.

На рис. 1 представлено решение *(v,w)* для параметров $\beta = -0{,}75$, $T = 10$, $M = 1000$, $N = 16$ с начальным условием $v(x,0) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$ для задачи (7)–(10).

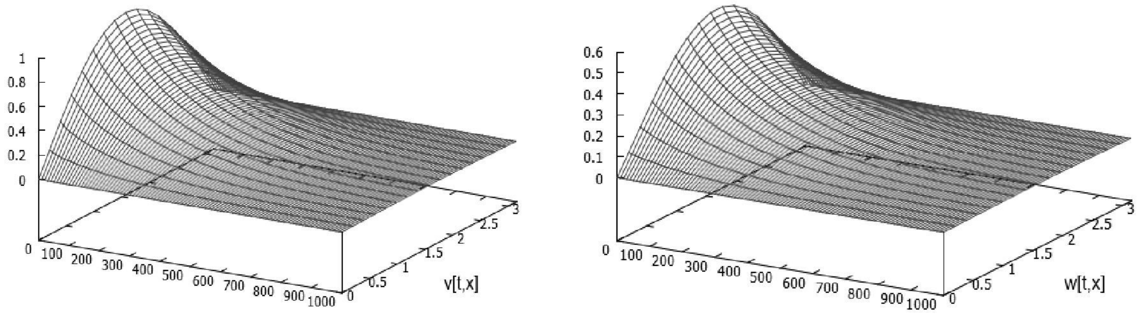

Рис. 1

Для задачи с запаздыванием (1)–(4) при значениях $a_{11}=1$, $a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$, $\beta=-0{,}75$, T = 10, M = 1000, N = 16, $v(x,t)=(t+1)\sin x$, $(x,t)\in[0,\pi]\times[-1,0]$ решение (v,w) показано на рис. 2.

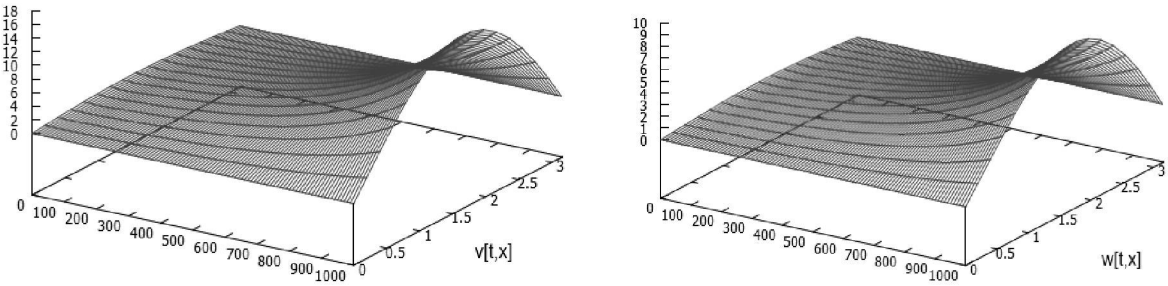

Рис. 2

Литература

1. Плотников, П.И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П.И. Плотников, А.В. Клепачева // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 651–669.

2. Fedorov, V.E. On solvability of some classes of Sobolev type equations with delay / V.E. Fedorov, E.A. Omelchenko // Functional Differential Equations. – 2011. – Vol. 18, № 3–4. – P. 187–199.

3. Федоров, В.Е. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием / В.Е. Федоров, Е.А. Омельченко // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 2. – С. 418–429.

4. Лекомцев, А.В. Полуявный метод для численного решения функционально-дифференциально-алгебраических уравнений / А.В. Лекомцев, В.Г. Пименов // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 5. – С. 62–67.

5. Пименов, В.Г. Разностные схемы в моделировании эволюционных управляемых систем с последействием / В.Г. Пименов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 5. – С. 151–158.

6. Пименов, В.Г. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием / В.Г. Пименов, А.Б. Ложников // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 178–189.

7. Федоров, В.Е. Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений / В.Е. Федоров, А.В. Уразаева // Тр. Воронежск. зимн. мат. шк. Воронеж: ВГУ. – 2004. – С. 161–172.

8. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К.М. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 420 с.

9. Ким, А.В. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений / А.В. Ким, В.Г. Пименов. – Ижевск: РХД, 2004.– 256 с.

NUMERICAL SOLUTION OF DELAYED LINEARIZED QUASISTATIONARY PHASE-FIELD SYSTEM OF EQUATIONS

***E.A. Omelchenko*[1], *M.V. Plekhanova*[2], *P.N. Davydov*[3]**

For delayed linearized quasistationary phase-field system of equations the numerical method of solution was proposed. The convergence of explicit difference scheme that takes account of delay in the system under investigation was thoroughly studied. On the basis of the results obtained the implementation of the method was realized.

Keywords: Sobolev type equation, quasistationary phase-field system of equations, difference scheme.

References

1. Plotnikov P.I., Klepacheva A.V. *Siberian Mathematical Journal.* 2001. Vol. 42, no. 3. pp. 551–567.
2. Fedorov V.E., Omelchenko E.A. On solvability of some classes of Sobolev type equations with delay. *Functional Differential Equations.* 2011. Vol. 18, no. 3–4. pp. 187–199.
3. Fedorov V.E., Omel'chenko E.A. *Siberian Mathematical Journal.* 2012. Vol. 53, no. 2. pp. 335–344.
4. Lekomtsev A.V., Pimenov V.G. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika).* 2009. Vol. 53, no. 5. pp. 54–58.
5. Pimenov V.G. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.* 2010. Vol. 16, no. 5. pp. 151–158. (in Russ.).
6. Pimenov V.G., Lozhnikov A.B. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues).* 2011. Vol. 275. Suppl. 1. pp. 137–148.
7. Fedorov V.E., Urazaeva A.V. *Trudy Voronezhskoy zimney matematicheskoy shkoly* (Proc. of the Voronezh Winter Mathematical School). Voronezh: VGU. 2004. pp. 161–172.
8. Richtmyer R.D., Morton K.W. *Difference Methods for Initial-Value Problems.* Interscience, New York, 1967. 405 p.
9. Kim A.V., Pimenov V.G. *i-Gladkiy analiz i chislennye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* (i-differential analysis and numerical methods of solutions of functional and differential equations). Izhevsk: RKhD, 2004. 256 p. (in Russ.).

Поступила в редакцию15 апреля 2013 г.

[1] Omelchenko Ekaterina Aleksandrovna is Senior Lecturer, Department of Humanities and socio-economic disciplines, Ural Branch of Russian Academy of Justice.
E-mail: omelchenko_ea@mail.ru
[2] Plekhanova Marina Vasilyevna is Associate Professor, Differential and Stochastic Equations Department, South Ural State University.
E-mail: mariner79@mail.ru
[3] Davydov Pavel Nikolaevich is Post-graduate student, Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State University.
E-mail: davydov@csu.ru