

# ЕДИНИЦЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ПРЯМЫМ СОМНОЖИТЕЛЕМ ПОРЯДКА 3

С.А. Колясников<sup>1</sup>

Получено строение единиц целочисленных групповых колец конечных групп типа  $A \times Z_3$ , где  $A$  содержит центральную подгруппу порядка 3. В качестве примеров найдены группы единиц целочисленных групповых колец абелевых групп типов (9,3), (9,3,3) и (15,3).

Ключевые слова: абелева группа, групповое кольцо, группа единиц группового кольца.

## 1. Основная теорема

Пусть  $G = A \times \langle b \rangle$  – конечная группа, где  $b$  – элемент порядка 3,  $A$  содержит центральную подгруппу  $\langle a \rangle$  порядка 3. Через  $V(\mathbb{Z}G)$  обозначим нормализованную группу единиц целочисленного группового кольца  $\mathbb{Z}G$ .

Рассмотрим следующие гомоморфизмы:

$$\begin{aligned} \varphi_0 : V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}A), \quad x \mapsto x(\forall x \in A), \quad b \mapsto 1; \\ \varphi_1 : V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}A) \cong V(\mathbb{Z}G/\langle ab \rangle), \quad x \mapsto x(\forall x \in A), \quad b \mapsto a^2; \\ \varphi_2 : V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}A) \cong V(\mathbb{Z}G/\langle a^2b \rangle), \quad x \mapsto x(\forall x \in A), \quad b \mapsto a; \\ \varphi_3 : V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle), \quad g \mapsto g\langle a \rangle \quad (\forall g \in G). \end{aligned}$$

Зафиксируем полную систему представителей левых смежных классов группы  $A$  по подгруппе  $\langle a \rangle$ , и обозначим это множество через  $H$ . Дополнительно рассмотрим инъективное отображение

$$\sim : \mathbb{Z}G/\langle a \rangle \rightarrow \mathbb{Z}G, \quad h\langle a \rangle \mapsto h(\forall h \in H).$$

**Теорема 1.**  $V(\mathbb{Z}G) = (\langle b \rangle \times V(\mathbb{Z}A)) \ltimes K$ , где

$$\begin{aligned} K = \langle v = 1 + \frac{v_1-1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{v_2-1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{v_3-1}{3}(1+a+a^2) \rangle \cap V(\mathbb{Z}G), \quad \varphi_1(v) = v_1, \\ \varphi_2(v) = v_2 \in (1+I(\langle a \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}A), \quad \varphi_3(v) = v_3 \in (1+I(\langle b \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle). \quad I(\langle a \rangle) \text{ – идеал кольца } \mathbb{Z}A, \\ \text{порожденный элементами } a-1, \quad a^2-1; \quad I(\langle b \rangle) \text{ – идеал кольца } \mathbb{Z}G/\langle a \rangle, \text{ порожденный элементами } b-1, \quad b^2-1 \text{ (об идеалах см. [1]).} \end{aligned}$$

**Доказательство.** Из теоремы 1 статьи [2] мы имеем  $V(\mathbb{Z}G) = (\langle b \rangle \times V(\mathbb{Z}A)) \ltimes K$ , где  $K = (1 + A(\mathbb{Z}A))A(\mathbb{Z}\langle b \rangle) \cap V(\mathbb{Z}G)$ ,  $A(\mathbb{Z}A)A(\mathbb{Z}\langle b \rangle)$  – идеал, порожденный как аддитивная подгруппа кольца  $\mathbb{Z}G$  элементами  $(x-1)(b-1)$ ,  $(x-1)(b^2-1)$  для любого  $x \in A \setminus \{1\}$ . Поэтому нам осталось показать только то, что  $K$  имеет такой вид как в формулировке теоремы.

Возьмем  $v \in K$  и запишем его в следующем виде

$$\begin{aligned} v = \left( \sum_{h \in H} \alpha_h h + \sum_{h \in H} \alpha_{ha} ha + \sum_{h \in H} \alpha_{ha^2} ha^2 \right) \cdot 1 + \left( \sum_{h \in H} \beta_h h + \sum_{h \in H} \beta_{ha} ha + \sum_{h \in H} \beta_{ha^2} ha^2 \right) \cdot b + \\ + \left( \sum_{h \in H} \gamma_h h + \sum_{h \in H} \gamma_{ha} ha + \sum_{h \in H} \gamma_{ha^2} ha^2 \right) \cdot b^2. \end{aligned}$$

А элементы  $v_1, v_2 \in V(\mathbb{Z}A)$  и  $v_3 \in V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle)$

$$v_1 = \left( \sum_{h \in H} \lambda_h h + \sum_{h \in H} \lambda_{ha} ha + \sum_{h \in H} \lambda_{ha^2} ha^2 \right),$$

<sup>1</sup> Колясников Сергей Андреевич – старший преподаватель, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: koliasnikovsa@susu.ac.ru

$$v_2 = \left( \sum_{h \in H} \mu_h h + \sum_{h \in H} \mu_{ha} ha + \sum_{h \in H} \mu_{ha^2} ha^2 \right),$$

$$v_3 = \left( \sum_{h \in H} v_h h \langle a \rangle + \sum_{h \in H} v_{hb} hb \langle a \rangle + \sum_{h \in H} v_{hb^2} hb^2 \langle a \rangle \right).$$

Из условий, что  $\varphi_0(v) = 1$  (т.к.  $v \in K$ ) и если  $\varphi_1(v) = v_1$ ,  $\varphi_2(v) = v_2$ ,  $\varphi_3(v) = v_3$ , мы получаем следующую систему уравнений.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_h \\ \alpha_{ha} \\ \alpha_{ha^2} \\ \beta_h \\ \beta_{ha} \\ \beta_{ha^2} \\ \gamma_h \\ \gamma_{ha} \\ \gamma_{ha^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_h \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_h \\ \lambda_{ha} \\ \lambda_{ha^2} \\ \mu_h \\ \mu_{ha} \\ \mu_{ha^2} \\ v_h \\ v_{hb} \\ v_{hb^2} \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon_h = \begin{cases} 1, & h = 1; \\ 0, & h \neq 1. \end{cases}$$

Заметим, что сложив три уравнения каждого отображения, мы получим ограничения для  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$

$$\lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h; \quad \lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h; \quad \lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h.$$

Отсюда мы имеем, что  $v_1, v_2 \in (1 + I(\langle a \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}A)$ , а  $v_3 \in (1 + I(\langle b \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle)$ .

Далее, решая нашу систему, мы получим единственное решение

$$\begin{aligned} \alpha_h &= (\lambda_h + \mu_h + v_h)/3; & \alpha_{ha} &= (\lambda_{ha} + \mu_{ha} + v_h - \varepsilon_h)/3; & \alpha_{ha^2} &= (\lambda_{ha^2} + \mu_{ha^2} + v_h - \varepsilon_h)/3; \\ \beta_h &= (\lambda_{ha^2} + \mu_{ha} + v_{hb})/3; & \beta_h &= (\lambda_h + \mu_{ha^2} + v_{hb} - \varepsilon_h)/3; & \beta_{ha^2} &= (\lambda_{ha} + \mu_h + v_{hb} - \varepsilon_h)/3; \\ \gamma_h &= (\lambda_{ha} + \mu_{ha^2} + v_{hb^2})/3; & \gamma_{ha} &= (\lambda_{ha^2} + \mu_h + v_{hb^2} - \varepsilon_h)/3; & \gamma_{ha^2} &= (\lambda_h + \mu_{ha} + v_{hb^2} - \varepsilon_h)/3. \end{aligned}$$

Затем, подставив эти значения в  $v$  и сгруппировав соответствующие коэффициенты, легко увидеть, что получится

$$v = 1 + \frac{v_1 - 1}{3}(1 + ab + a^2b^2) + \frac{v_2 - 1}{3}(1 + a^2b + ab^2) + \frac{v_3 - 1}{3}(1 + a + a^2). \quad (1)$$

Введем дополнительное отображение  $\varphi: K \rightarrow V(\mathbb{Z}A) \times V(\mathbb{Z}A) \times V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle)$ , действующее по правилу

$$\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)).$$

Это отображение является инъективным гомоморфизмом.

Действительно, так как

$$\varphi(vw) = (\varphi_1(vw), \varphi_2(vw), \varphi_3(vw)) = (\varphi_1(v)\varphi_1(w), \varphi_2(v)\varphi_2(w), \varphi_3(v)\varphi_3(w)).$$

И в силу того, что

$$\begin{aligned} (1 + a + a^2)^2 &= 3(1 + a + a^2), \\ (1 + ab + a^2b^2)^2 &= 3(1 + ab + a^2b^2), \\ (1 + a^2b + ab^2)^2 &= 3(1 + a^2b + ab^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+a+a^2)(1+b+b^2) &= (1+b+b^2)(1+a+a^2) = \\ &= (1+a^2b+ab^2)(1+ab+a^2b^2) = (1+ab+a^2b^2)(1+a^2b+ab^2) = \\ &= (1+a+a^2)(1+ab+a^2b^2) = (1+ab+a^2b^2)(1+a+a^2) = \\ &= (1+a^2b+ab^2)(1+a+a^2) = (1+a+a^2)(1+a^2b+ab^2). \end{aligned}$$

И так как,  $w_1 - 1, w_2 - 1 \in I(\langle a \rangle)$ , а  $w_2 - 1 \in I(\langle b \rangle)$ ,

$$\begin{aligned} (w_1 - 1)(1+a+a^2) &= (w_2 - 1)(1+a+a^2) = (\tilde{w}_3 - 1)(1+b+b^2) = 0. \\ vw &= \left(1 + \frac{v_1 - 1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{v_2 - 1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{\tilde{v}_3 - 1}{3}(1+a+a^2)\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{w_1 - 1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{w_2 - 1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{\tilde{w}_3 - 1}{3}(1+a+a^2)\right) = \\ &= 1 + \frac{v_1 w_1 - 1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{v_2 w_2 - 1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{\tilde{v}_3 \tilde{w}_3 - 1}{3}(1+a+a^2). \end{aligned}$$

Вообще говоря,  $\widetilde{v_3 w_3} \neq \tilde{v}_3 \tilde{w}_3$ , но зато легко видеть, что  $\widetilde{v_3 w_3}(1+a+a^2) = \tilde{v}_3 \tilde{w}_3(1+a+a^2)$ .

Таким образом, мы показали, что отображение  $\varphi$  определено корректно и является гомоморфизмом. А инъективность следует из (1), как единственного решения системы. Теорема доказана.

В следующих разделах мы приведем примеры использования этой теоремы для некоторых абелевых групп.

## 2. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (9,3)

Пусть  $G = \langle a \mid a^9 = 1 \rangle \times \langle b \mid b^3 = 1 \rangle$ . Описание группы единиц  $V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$  известно из работы [3]. Для удобства вычислений возьмем базис как в работе [2].

$$V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) = \langle a \rangle \times F, \quad F = \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - (a + a^8) + (a^2 + a^7), \quad u_1^{-1} = -1 - (a + a^8) + (a^3 + a^6) + (a^4 + a^5), \\ u_2 &= 1 - (a^2 + a^7) + (a^4 + a^5), \quad u_2^{-1} = -1 - (a^2 + a^7) + (a^3 + a^6) + (a + a^8). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 мы имеем

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times K,$$

где для любого  $v \in K$

$$v = 1 + \frac{v_1 - 1}{3}(1 + a^3b + a^6b^2) + \frac{v_2 - 1}{3}(1 + a^6b + a^3b^2),$$

$v_1, v_2 \in (1 + I(\langle a^3 \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$ , и так как  $V(\mathbb{Z}G / \langle a^3 \rangle)$  – тривиальная группа (см. [3])  $\varphi_3(v) = 1$ .

Если  $\sum_{i=0}^8 \lambda_i a^i, \sum_{i=0}^8 \mu_i a^i$ , то

$$\begin{aligned} v &= 1/3 \left( (1 + \lambda_0 + \mu_0) \cdot 1 + (\lambda_1 + \mu_1) \cdot a + (\lambda_2 + \mu_2) \cdot a^2 + (\lambda_3 + \mu_3) \cdot a^3 + (\lambda_4 + \mu_4) \cdot a^4 + \right. \\ &+ (\lambda_5 + \mu_5) \cdot a^5 + (\lambda_6 + \mu_6) \cdot a^6 + (\lambda_7 + \mu_7) \cdot a^7 + (\lambda_8 + \mu_8) \cdot a^8 + (\lambda_6 + \mu_3) \cdot b + (\lambda_7 + \mu_4) \cdot ab + \\ &+ (\lambda_8 + \mu_5) \cdot a^2b + (\lambda_0 + \mu_6 - 1) \cdot a^3b + (\lambda_1 + \mu_7) \cdot a^4b + (\lambda_2 + \mu_8) \cdot a^5b + (\lambda_3 + \mu_0 - 1) \cdot a^6b + \\ &+ (\lambda_4 + \mu_1) \cdot a^7b + (\lambda_5 + \mu_2) \cdot a^8b + (\lambda_3 + \mu_6) \cdot b^2 + (\lambda_4 + \mu_7) \cdot ab^2 + (\lambda_5 + \mu_8) \cdot a^2b^2 + \\ &+ (\lambda_6 + \mu_0 - 1) \cdot a^3b^2 + (\lambda_7 + \mu_1) \cdot a^4b^2 + (\lambda_8 + \mu_2) \cdot a^5b^2 + (\lambda_0 + \mu_3 - 1) \cdot a^6b^2 + \\ &\left. + (\lambda_1 + \mu_4) \cdot a^7b^2 + (\lambda_2 + \mu_5) \cdot a^8b^2 \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Далее заметим, что  $u_1, u_2 \in (1 + I(\langle a^3 \rangle))$ , так как

$$u_1 = 1 - a^2(a^6 - 1) + a(a^6 - 1), \quad u_2 = 1 - a(a^6 - 1) + a(a^3 - 1) + a^2(a^3 - 1).$$

Поэтому рассмотрим гомоморфизм  $\varphi: K \rightarrow F \times F$ , действующий по правилу  $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v))$ .

Составим таблицу произведений элементов  $u_1, u_2$

Таблица 1

	Коэффициенты при				
	1	$a + a^8$	$a^2 + a^7$	$a^3 + a^6$	$a^4 + a^5$
$u_1$	1	-1	1	0	0
$u_1^2$	5	-4	3	-2	1
$u_1^3$	19	-18	15	-9	3
$u_2$	1	0	-1	0	1
$u_2^2$	5	1	-4	-2	3
$u_2^3$	19	3	-18	-9	15
$u_1 u_2$	-1	0	1	1	-1
$u_1 u_2^2$	-5	-1	5	3	-4
$u_1^2 u_2$	1	1	-2	0	-1
$u_1^2 u_2^2$	7	1	-6	-3	5

Из табл. 1 с помощью (2) видно, что

$$(u_1^2, 1), (u_2^3, 1), (1, u_1^3), (1, u_2^3) \in \varphi(K),$$

и для  $0 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq 2$   $(u_1^{i_1} u_2^{i_2}, u_1^{j_1} u_2^{j_2}) \in \varphi(K)$  тогда и только тогда, когда

$$i_1 = 1, i_2 = 2, j_1 = 2, j_2 = 1 \text{ или } i_1 = 2, i_2 = 1, j_1 = 1, j_2 = 2.$$

Выбрав из них порождающие, мы получаем следующий результат.

**Теорема 2.**  $\varphi(K) = \langle (u_1 u_2^2, u_1^2 u_2) \rangle \times \langle (u_2^3, 1) \rangle \times \langle (1, u_1^3) \rangle \times \langle (1, u_2^3) \rangle$ .  $F \times F / \varphi(K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ .

Таким образом, мы уже можем записать и порождающие группы  $V(\mathbb{Z}G)$ , но в следующей теореме, решив вопрос об индексе подгруппы Милнора (см. [1, стр. 45]), мы выберем более удобный базис.

**Теорема 3.** Пусть  $W(G)$  – подгруппа Милнора, тогда  $|V(\mathbb{Z}G) : W(G)| = 1$ ,

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle \times \langle u_4 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - (a + a^8) + (a^2 + a^7), & u_2 &= 1 - (a^2 + a^7) + (a^4 + a^5), \\ u_3 &= 1 - (ab + a^8 b^2) + (a^2 b^2 + a^7 b), & u_4 &= 1 - (a^2 b^2 + a^7 b) + (a^4 b + a^5 b^2), \\ u_5 &= 1 - (ab^2 + a^8 b) + (a^2 b + a^7 b^2), & u_6 &= 1 - (a^2 b + a^7 b^2) + (a^4 b^2 + a^5 b). \end{aligned}$$

**Доказательство.** По определению  $W(G)$  подгруппа группы  $V(\mathbb{Z}G)$ , порожденная подгруппами  $V(\mathbb{Z}C)$ , когда  $C$  пробегает все циклические подгруппы группы  $G$ . Перечислим все  $V(\mathbb{Z}C)$  для нашей группы.

$$V(\mathbb{Z}\langle a^3 \rangle) = \langle a^3 \rangle, V(\mathbb{Z}\langle b \rangle) = \langle b \rangle, V(\mathbb{Z}\langle a^3 b \rangle) = \langle a^3 b \rangle, V(\mathbb{Z}\langle a^6 b \rangle) = \langle a^6 b \rangle,$$

$$V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) = \langle a \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle, V(\mathbb{Z}\langle ab \rangle) = \langle ab \rangle \times \langle u_3 \rangle \times \langle u_4 \rangle, V(\mathbb{Z}\langle ab^2 \rangle) = \langle ab^2 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle.$$

Утверждение следует из теоремы 2 и из того, что

$$\begin{aligned} \varphi(u_1 u_2 u_5^{-1} u_6^{-1}) &= (u_1 u_2^2, u_1^2 u_2), & \varphi(u_2 u_3 u_5^{-1} u_6^{-1}) &= (u_2^3, 1), \\ \varphi(u_1 u_4 u_5^{-1} u_6^{-1}) &= (1, u_1^3), & \varphi(u_2 u_3^{-1} u_4^{-1} u_5) &= (1, u_2^3). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### 3. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (9,3,3)

Пусть  $G = \langle a | a^9 = 1 \rangle \times \langle b | b^3 = 1 \rangle \times \langle c | c^3 = 1 \rangle$ . Через  $A$  обозначим подгруппу  $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ . Описание группы единиц  $V(\mathbb{Z}A)$  возьмем из теоремы 3.

$$V(\mathbb{Z}A) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times F, F = \langle u_1 \rangle \times \dots \times \langle u_6 \rangle.$$

Согласно теореме 1 мы имеем  $V(\mathbb{Z}A) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \dots \times \langle u_6 \rangle \times K$ , где для любого  $v \in K$

$$v = 1 + \frac{u_1 - 1}{3}(1 + a^3b + a^6b^2) + \frac{u_2 - 1}{3}(1 + a^6b + a^3b^2),$$

$u_1, u_2 \in (1 + I(\langle a^3 \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$ , и так как  $V(\mathbb{Z}G/\langle a^3 \rangle)$  – тривиальная группа (см. [3])  $\varphi_3(v) = 1$ .

Далее заметим, что  $u_\ell \in (1 + I(\langle a^3 \rangle))$ ,  $\ell = 1, \dots, 6$ . Поэтому рассмотрим гомоморфизм  $\varphi: K \rightarrow F \times F$ , действующий по правилу  $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v))$ .

Из теоремы 2, так как  $(ab^i)^3 = a^3$ ,  $i = 0, 1, 2$ , следует что  $(u_\ell^3, 1), (1, u_\ell^3) \in \varphi(K)$ . Так же

$$(u_1^{i_1} u_2^{j_2}, u_1^{j_1} u_2^{i_2}), (u_3^{i_3} u_4^{j_4}, u_3^{j_3} u_4^{i_4}), (u_5^{i_5} u_6^{j_6}, u_5^{j_5} u_6^{i_6}) \in \varphi(K), i_\ell, j_\ell = 0, 1, 2$$

тогда и только тогда, когда

$$i_1 = i_3 = i_5 = 1, i_2 = i_4 = i_6 = 2, j_1 = j_3 = j_5 = 2, j_2 = j_4 = j_6 = 1$$

или

$$i_1 = i_3 = i_5 = 2, i_2 = i_4 = i_6 = 1, j_1 = j_3 = j_5 = 1, j_2 = j_4 = j_6 = 2.$$

Затем в пакете GAP (см. [4]) было проверено, что

$$(u_2^{i_2} u_4^{j_4} u_6^{i_6}, u_1^{j_1} u_2^{i_2} u_3^{j_3} u_4^{i_4} u_5^{j_5} u_6^{i_6}) \notin \varphi(K), i_\ell, j_\ell = 0, 1, 2.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

**Теорема 4.**  $K = \langle w_1 \rangle \times \dots \times \langle w_{12} \rangle$ , где

$$\begin{aligned} \varphi(w_1) &= (u_1 u_2^2, u_1^2 u_2), & \varphi(w_2) &= (u_3 u_4^2, u_3^2 u_4), & \varphi(w_3) &= (u_5 u_6^2, u_5^2 u_6), \\ \varphi(w_4) &= (u_2^3, 1), & \varphi(w_5) &= (u_4^3, 1), & \varphi(w_6) &= (u_6^3, 1), \\ \varphi(w_7) &= (1, u_1^3), & \varphi(w_8) &= (1, u_2^3), & \varphi(w_9) &= (1, u_3^3), \\ \varphi(w_{10}) &= (1, u_4^3), & \varphi(w_{11}) &= (1, u_5^3), & \varphi(w_{12}) &= (1, u_6^3). \end{aligned}$$

$$F \times F / \varphi(K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

Так же, как и в предыдущем разделе, решается вопрос об индексе подгруппы Милнора.

**Теорема 5.** Пусть  $W(G)$  – подгруппа Милнора, тогда  $|V(\mathbb{Z}G) : W(G)| = 1$ .

#### 4. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (15,3)

Пусть  $G = \langle a \mid a^{15} = 1 \rangle \times \langle b \mid b^3 = 1 \rangle$ . Описание группы единиц  $V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$  было получено в работе [2]. Для удобства вычислений возьмем другой базис.

$$V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) = \langle a \rangle \times \langle u_0 \rangle \times F, \quad F = \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 + (a^3 + a^{12}), \quad u_0^{-1} = -1 + (a^6 + a^9), \\ u_1^{-1} &= -3 - 3(a + a^{14}) - 2(a^2 + a^{13}) - (a^3 + a^{12}) + 2(a^5 + a^{10}) + 3(a^6 + a^9) + 3(a^7 + a^8), \\ u_2 &= 3 - 2(a^2 + a^{13}) + (a^3 + a^{12}) + 2(a^4 + a^{11}) - (a^5 + a^{10}) - 2(a^6 + a^9) + (a^7 + a^8), \\ u_2^{-1} &= -3 + 3(a + a^{14}) - 3(a^2 + a^{13}) + 3(a^3 + a^{12}) - 2(a^4 + a^{11}) + 2(a^5 + a^{10}) - (a^6 + a^9), \\ u_3 &= 3 + (a + a^{14}) - 2(a^3 + a^{12}) - 2(a^4 + a^{11}) - (a^5 + a^{10}) + (a^6 + a^9) + 2(a^7 + a^8), \\ u_3^{-1} &= 3 + 3(a^2 + a^{13}) - (a^3 + a^{12}) - 3(a^4 + a^{11}) + 2(a^5 + a^{10}) + 3(a^6 + a^9) - 2(a^7 + a^8). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 мы имеем  $V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle \times K$ , где для любого  $v \in K$

$$v = 1 + \frac{u_1 - 1}{3}(1 + a^5b + a^{10}b^2) + \frac{u_2 - 1}{3}(1 + a^{10}b + a^5b^2) + \frac{\tilde{u}_3 - 1}{3}(1 + a^5 + a^{10}),$$

$u_1, u_2 \in (1 + I(\langle a^5 \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$ , а  $v_3 \in (1 + I(\langle b \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a^5 \rangle)$ .

# Математика

Обозначим через  $\psi$  изоморфизм групп  $V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$  и  $V(\mathbb{Z}G/\langle a^5 \rangle)$ , действующий по правилу  $\psi: a \rightarrow ab\langle a^5 \rangle$ . Тогда  $V(\mathbb{Z}G/\langle a^5 \rangle) = \langle ab\langle a^5 \rangle \rangle \times \langle u'_0 \rangle \times F'$ ,  $F' = \langle u'_1 \rangle \times \langle u'_2 \rangle \times \langle u'_3 \rangle$ , где  $u'_i = \psi(u_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Далее заметим, что  $u_1, u_2, u_3 \in (1 + I(\langle a^5 \rangle))$ , а  $u'_1, u'_2, u'_3 \in (1 + I(\langle b \rangle))$  так как

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + (a^4 + a - 1)(a^5 - 1) - (2a^4 - 2a^3 + 2a^2 - a + 1)(a^{10} - 1), \\ u_2 &= 1 - (2a^4 - a^3 - a^2 + 2a + 1)(a^5 - 1) - (2a^3 - a^2 - 2a + 1)(a^{10} - 1), \\ u_3 &= 1 + (a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a - 1)(a^5 - 1) - (a^4 - 2a^2 - 2a + 1)(a^{10} - 1), \\ u'_1 &= \langle a^5 \rangle + (a^4 \langle a^5 \rangle + 2a^3 \langle a^5 \rangle - 2a \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b - 1) - \\ &\quad - (2a^4 \langle a^5 \rangle - 2a^2 \langle a^5 \rangle - a \langle a^5 \rangle + \langle a^5 \rangle)(b^2 - 1), \\ u'_2 &= \langle a^5 \rangle + (2a^4 \langle a^5 \rangle - 2a^3 \langle a^5 \rangle + a^2 \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b - 1) + \\ &\quad + (a^3 \langle a^5 \rangle - 2a^2 \langle a^5 \rangle + 2a \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b^2 - 1), \\ u'_3 &= \langle a^5 \rangle + (2a^4 \langle a^5 \rangle - 2a^2 \langle a^5 \rangle - a \langle a^5 \rangle + \langle a^5 \rangle)(b - 1) + \\ &\quad + (a^4 \langle a^5 \rangle + 2a^3 \langle a^5 \rangle - 2a \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b^2 - 1). \end{aligned}$$

Причем  $u_0 \notin (1 + I(\langle a^5 \rangle))$ , а  $u'_0 \notin (1 + I(\langle b \rangle))$ .

Поэтому рассмотрим гомоморфизм  $\varphi: K \rightarrow F \times F \times F'$ , действующий по правилу

$$\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)).$$

Аналогично, как в примере для группы  $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ , мы имеем здесь, что

$$(u_i^3, 1, 1), (1, u_i^3, 1), (1, 1, u_i^3) \in \varphi(K), i = 1, 2, 3.$$

Далее с помощью GAP (см. [4]) было проверено, что

$$(u_1^{i_1} u_2^{j_2} u_3^{k_3}, u_1^{i_1} u_2^{j_2} u_3^{k_3}, u_1^{i_1} u_2^{j_2} u_3^{k_3}) \in \varphi(K), i_\ell, j_\ell, k_\ell = 0, 1, 2 (\ell = 1, 2, 3).$$

тогда и только тогда, когда показатели степеней соответствуют значениям из табл. 2.

Таблица 2

$i_1$	$i_2$	$i_3$	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
0	0	0	1	0	1	2	0	2
0	0	0	2	0	2	1	0	1
0	0	1	0	0	2	1	0	2
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	2	0	1	2	0	0
0	0	2	0	0	1	2	0	1
0	0	2	1	0	2	1	0	0
0	0	2	2	0	0	0	0	2

$i_1$	$i_2$	$i_3$	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
0	1	0	0	2	0	2	1	2	0	2	0	0	1	0	1	2	1
0	1	0	1	2	1	1	1	1	0	2	0	1	1	1	0	2	0
0	1	0	2	2	2	0	1	0	0	2	0	2	1	2	2	2	2
0	1	1	0	2	2	0	1	1	0	2	1	0	1	2	2	2	0
0	1	1	1	2	0	2	1	0	0	2	1	1	1	0	1	2	2
0	1	1	2	2	1	1	1	2	0	2	1	2	1	1	0	2	1
0	1	2	0	2	1	1	1	0	0	2	2	0	1	1	0	2	2
0	1	2	1	2	2	0	1	2	0	2	2	1	1	2	2	2	1
0	1	2	2	2	0	2	1	1	0	2	2	2	1	0	1	2	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	2	1	0	1	2
1	0	0	1	0	2	0	0	2	1	1	0	1	2	2	2	1	1

1	0	0	2	0	0	2	0	1	1	1	0	2	2	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	2	0	2	1	1	1	0	2	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1	0	1	0
1	0	1	2	0	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	1	2
1	0	2	0	0	2	0	0	1	1	1	2	0	2	2	2	1	0
1	0	2	1	0	0	2	0	0	1	1	2	1	2	0	1	1	2
1	0	2	2	0	1	1	0	2	1	1	2	2	2	1	0	1	1
1	2	0	0	1	1	2	2	1	2	0	0	0	0	2	2	0	0
1	2	0	1	1	2	1	2	0	2	0	0	1	0	0	1	0	2
1	2	0	2	1	0	0	2	2	2	0	0	2	0	1	0	0	1
1	2	1	0	1	0	0	2	0	0	2	0	1	0	0	1	0	2
1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	0	1	1	0	2	2	0	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0	1	2	0	0	1	0	0
1	2	2	0	1	2	1	2	2	2	0	2	0	0	0	1	0	1
1	2	2	1	1	0	0	2	1	2	0	2	1	0	1	0	0	0
1	2	2	2	1	1	2	2	0	2	0	2	2	0	2	2	0	2
2	1	0	0	2	2	1	1	2	2	2	0	0	1	2	0	2	1
2	1	0	1	2	0	0	1	1	2	2	0	1	1	0	2	2	0
2	1	0	2	2	1	2	1	0	2	2	0	2	1	1	1	2	2
2	1	1	0	2	1	2	1	1	2	2	1	0	1	1	1	2	0
2	1	1	1	2	2	1	1	0	2	2	1	1	1	2	0	2	2
2	1	1	2	2	0	0	1	2	2	2	1	2	1	0	2	2	1
2	1	2	0	2	0	0	1	0	2	2	2	0	1	0	2	2	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1
2	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	1	2	0	2	0

Выбрав из них порождающие, мы получаем следующий результат.

**Теорема 6.**  $K = \langle w_1 \rangle \times \dots \times \langle w_9 \rangle$ , где

$$\begin{aligned} \varphi(w_1) &= (u_1, u_3, u'_1), & \varphi(w_2) &= (u_2, u_2^2, u_1'^2 u_2' u_3'^2), & \varphi(w_3) &= (u_3, u_3^2, u_1' u_3'^2), \\ \varphi(w_4) &= (1, u_1 u_3, u_1'^2 u_3'^2), & \varphi(w_5) &= (1, u_2^3, 1), & \varphi(w_6) &= (1, u_3^3, 1), \\ \varphi(w_7) &= (1, 1, u_1'^3), & \varphi(w_8) &= (1, 1, u_2'^3), & \varphi(w_9) &= (1, 1, u_3'^3), \end{aligned}$$

$$F \times F / \varphi(K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

Так же, как и в предыдущих примерах, решим вопрос об индексе подгруппы Милнора и выберем более удобный базис.

**Теорема 7.** Пусть  $W(G)$  – подгруппа Милнора, тогда  $|V(\mathbb{Z}G) : W(G)| = 1$ ,

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \dots \times \langle u_{12} \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 + (a^3 + a^{12}), \quad u(x) = 3 - 2(x + x^{14}) + 2(x^2 + x^{13}) - 2(x^3 + x^{12}) + (x^4 + x^{11}) - (x^5 + x^{10}) + (x^6 + x^9), \\ u_1 &= u(a), \quad u_2 = u(a^2), \quad u_3 = u(a^4), \quad u_4 = u(ab), \quad u_5 = u(a^2 b^2), \quad u_6 = u(a^4 b), \quad u_7 = u(a^2 b), \\ u_8 &= u(a^4 b^2), \quad u_9 = u(a^8 b), \quad u_{10} = u(a^3 b), \quad u_{11} = u(a^6 b^2), \quad u_{12} = u(a^{12} b). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Перечислим все  $V(\mathbb{Z}C)$ , порождающие  $W(G)$ , когда  $C$  пробегает все циклические подгруппы группы  $G$ .

$$\begin{aligned} V(\mathbb{Z}\langle a^5 \rangle) &= \langle a^5 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle b \rangle) = \langle b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^5 b \rangle) = \langle a^5 b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^{10} b \rangle) = \langle a^{10} b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^3 \rangle) = \langle a^3 \rangle \times \langle u_0 \rangle, \\ V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) &= \langle a \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle ab \rangle) = \langle ab \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_4 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle, \\ V(\mathbb{Z}\langle a^2 b \rangle) &= \langle a^2 b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_7 \rangle \times \langle u_8 \rangle \times \langle u_9 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^3 b \rangle) = \langle a^3 b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_{10} \rangle \times \langle u_{11} \rangle \times \langle u_{12} \rangle. \end{aligned}$$

Утверждение следует из теоремы 6 и из того, что

$$\begin{aligned} \varphi(u_{10}^{-1} u_{11}^{-1} u_{12}^{-1}) &= (u_1, u_3, u'_1), & \varphi(u_1^{-1} u_2 u_3^{-1} u_4 u_6 u_7^{-1}) &= (u_2, u_2^2, u_1'^2 u_2' u_3'^2), \\ \varphi(u_1^{-1} u_7^{-1} u_8^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) &= (u_3, u_3^2, u_1' u_3'^2), & \varphi(u_1^{-1} u_3^{-1} u_7^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) &= (1, u_1 u_3, u_1'^2 u_3'^2), \end{aligned}$$

$$\varphi(u_2 u_4 u_6 u_9 u_{12}) = (1, u_2^3, 1),$$

$$\varphi(u_1^{-1} u_3^{-1} u_4 u_8 u_{10}^{-1} u_{11}^{-1} u_{12}^{-1}) = (1, 1, u_1'^3)$$

$$\varphi(u_1^{-1} u_3^{-1} u_6 u_7^{-1} u_8^{-1} u_9^{-1} u_{11}) = (1, 1, u_3'^3).$$

$$\varphi(u_3 u_4^{-1} u_6^{-1} u_7^{-1} u_8^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) = (1, u_3^3, 1),$$

$$\varphi(u_1 u_3 u_5 u_9 u_{10}) = (1, 1, u_2'^3),$$

Теорема доказана.

### Литература

1. Бовди, А.А. Мультипликативная группа целочисленного группового кольца / А.А. Бовди. – Ужгород: Ужг. гос. ун., 1987. – 210 с. (Деп. УкрНИИТИ 24.09.87, №2712–Ук87).
2. Колясников, С.А. О группе единиц целочисленного группового кольца конечных групп разложимых в прямое произведение / С.А. Колясников. – Новосибирск, Ред. Сиб. мат. журн., 2000. – 45 с. (Деп. В ВИНТИ 30.03.00, №860–В00).
3. Алеев, Р.Ж. Единицы циклических групп порядков 7 и 9 / Р.Ж. Алеев, Г.А. Панина // Известия вузов, Математика. – 1999. – № 11(450). – С. 81–84.
4. Martin Schönert *et al.* GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, sixth edition, 1997.

## UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS OF FINITE GROUPS WITH A DIRECT MULTIPLIER OF ORDER 3

**S.A. Kolyasnikov<sup>1</sup>**

The description of units of integral group rings of finite groups of type  $A \times Z_3$  was obtained, where  $A$  contains a central subgroup of order 3. For example, the unit groups of integral group rings of Abelian groups of the types (9,3), (9,3,3) and (15,3) were found.

*Keywords:* Abelian group, group ring, unit group of group ring.

### References

1. Bovdi A.A. *Mul'tiplikativnaya gruppy tselochislennogo gruppovogo kol'tsa* (Multiplicative group of integral group ring). Uzhgorod: Uzhgorodskiy gosudarstvennyy universitet, 1987. 210 p. (in Russ.).
2. Kolyasnikov S.A. *O grupe edinit tselochislennogo gruppovogo kol'tsa konechnykh grupp razlozhimykh v pryamoe proizvedenie* (About group of units of integral group ring of finite groups factorable into direct composition). Novosibirsk, Red. Sibirskogo Matematicheskogo Zhurnala, 2000. 45 p. (in Russ.).
3. Alev R.Zh., Panina G.A. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*. 1999. Vol. 43, no. 11. pp. 80–83.
4. Martin Schönert *et al.* GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Lehrstuhl D für Mathematik. Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, sixth edition, 1997.

*Поступила в редакцию 6 марта 2013 г.*

---

<sup>1</sup> Kolyasnikov Sergey Andreevich is Senior Lecturer, General Mathematics Department, South Ural State University.  
E-mail: kolyasnikovsa@susu.ac.ru