

ЕДИНИЦЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ПРЯМЫМ СОМНОЖИТЕЛЕМ ПОРЯДКА 3

С.А. Колясников¹

Получено строение единиц целочисленных групповых колец конечных групп типа $A \times Z_3$, где A содержит центральную подгруппу порядка 3. В качестве примеров найдены группы единиц целочисленных групповых колец абелевых групп типов (9,3), (9,3,3) и (15,3).

Ключевые слова: абелева группа, групповое кольцо, группа единиц группового кольца.

1. Основная теорема

Пусть $G = A \times \langle b \rangle$ – конечная группа, где b – элемент порядка 3, A содержит центральную подгруппу $\langle a \rangle$ порядка 3. Через $V(\mathbb{Z}G)$ обозначим нормализованную группу единиц целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$.

Рассмотрим следующие гомоморфизмы:

$$\begin{aligned}\varphi_0 : V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}A), \quad x \mapsto x(\forall x \in A), \quad b \mapsto 1; \\ \varphi_1 : V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}A) \cong V(\mathbb{Z}G/\langle ab \rangle), \quad x \mapsto x(\forall x \in A), \quad b \mapsto a^2; \\ \varphi_2 : V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}A) \cong V(\mathbb{Z}G/\langle a^2b \rangle), \quad x \mapsto x(\forall x \in A), \quad b \mapsto a; \\ \varphi_3 : V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle), \quad g \mapsto g\langle a \rangle \quad (\forall g \in G).\end{aligned}$$

Зафиксируем полную систему представителей левых смежных классов группы A по подгруппе $\langle a \rangle$, и обозначим это множество через H . Дополнительно рассмотрим инъективное отображение

$$\sim : \mathbb{Z}G/\langle a \rangle \rightarrow \mathbb{Z}G, \quad h\langle a \rangle \mapsto h(\forall h \in H).$$

Теорема 1. $V(\mathbb{Z}G) = (\langle b \rangle \times V(\mathbb{Z}A)) \ltimes K$, где

$$\begin{aligned}K = \langle v = 1 + \frac{v_1-1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{v_2-1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{v_3-1}{3}(1+a+a^2) \rangle \cap V(\mathbb{Z}G), \quad \varphi_1(v) = v_1, \\ \varphi_2(v) = v_2 \in (1+I(\langle a \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}A), \quad \varphi_3(v) = v_3 \in (1+I(\langle b \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle). \quad I(\langle a \rangle) \text{ – идеал кольца } \mathbb{Z}A, \\ \text{порожденный элементами } a-1, \quad a^2-1; \quad I(\langle b \rangle) \text{ – идеал кольца } \mathbb{Z}G/\langle a \rangle, \text{ порожденный элементами } b-1, \quad b^2-1 \text{ (об идеалах см. [1]).}\end{aligned}$$

Доказательство. Из теоремы 1 статьи [2] мы имеем $V(\mathbb{Z}G) = (\langle b \rangle \times V(\mathbb{Z}A)) \ltimes K$, где $K = (1 + A(\mathbb{Z}A))A(\mathbb{Z}\langle b \rangle) \cap V(\mathbb{Z}G)$, $A(\mathbb{Z}A)A(\mathbb{Z}\langle b \rangle)$ – идеал, порожденный как аддитивная подгруппа кольца $\mathbb{Z}G$ элементами $(x-1)(b-1)$, $(x-1)(b^2-1)$ для любого $x \in A \setminus \{1\}$. Поэтому нам осталось показать только то, что K имеет такой вид как в формулировке теоремы.

Возьмем $v \in K$ и запишем его в следующем виде

$$\begin{aligned}v = \left(\sum_{h \in H} \alpha_h h + \sum_{h \in H} \alpha_{ha} ha + \sum_{h \in H} \alpha_{ha^2} ha^2 \right) \cdot 1 + \left(\sum_{h \in H} \beta_h h + \sum_{h \in H} \beta_{ha} ha + \sum_{h \in H} \beta_{ha^2} ha^2 \right) \cdot b + \\ + \left(\sum_{h \in H} \gamma_h h + \sum_{h \in H} \gamma_{ha} ha + \sum_{h \in H} \gamma_{ha^2} ha^2 \right) \cdot b^2.\end{aligned}$$

А элементы $v_1, v_2 \in V(\mathbb{Z}A)$ и $v_3 \in V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle)$

$$v_1 = \left(\sum_{h \in H} \lambda_h h + \sum_{h \in H} \lambda_{ha} ha + \sum_{h \in H} \lambda_{ha^2} ha^2 \right),$$

¹ Колясников Сергей Андреевич – старший преподаватель, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: koliasnikovsa@susu.ac.ru

$$v_2 = \left(\sum_{h \in H} \mu_h h + \sum_{h \in H} \mu_{ha} ha + \sum_{h \in H} \mu_{ha^2} ha^2 \right),$$

$$v_3 = \left(\sum_{h \in H} v_h h \langle a \rangle + \sum_{h \in H} v_{hb} hb \langle a \rangle + \sum_{h \in H} v_{hb^2} hb^2 \langle a \rangle \right).$$

Из условий, что $\varphi_0(v) = 1$ (т.к. $v \in K$) и если $\varphi_1(v) = u_1$, $\varphi_2(v) = v_2$, $\varphi_3(v) = v_3$, мы получаем следующую систему уравнений.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_h \\ \alpha_{ha} \\ \alpha_{ha^2} \\ \beta_h \\ \beta_{ha} \\ \beta_{ha^2} \\ \gamma_h \\ \gamma_{ha} \\ \gamma_{ha^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_h \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_h \\ \lambda_{ha} \\ \lambda_{ha^2} \\ \mu_h \\ \mu_{ha} \\ \mu_{ha^2} \\ v_h \\ v_{hb} \\ v_{hb^2} \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon_h = \begin{cases} 1, & h = 1; \\ 0, & h \neq 1. \end{cases}$$

Заметим, что сложив три уравнения каждого отображения, мы получим ограничения для u_1 , v_2 , v_3

$$\lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h; \quad \lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h; \quad \lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h.$$

Отсюда мы имеем, что $u_1, v_2 \in (1 + I(\langle a \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}A)$, а $v_3 \in (1 + I(\langle b \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle)$.

Далее, решая нашу систему, мы получим единственное решение

$$\begin{aligned} \alpha_h &= (\lambda_h + \mu_h + v_h)/3; & \alpha_{ha} &= (\lambda_{ha} + \mu_{ha} + v_h - \varepsilon_h)/3; & \alpha_{ha^2} &= (\lambda_{ha^2} + \mu_{ha^2} + v_h - \varepsilon_h)/3; \\ \beta_h &= (\lambda_{ha^2} + \mu_{ha} + v_{hb})/3; & \beta_h &= (\lambda_h + \mu_{ha^2} + v_{hb} - \varepsilon_h)/3; & \beta_{ha^2} &= (\lambda_{ha} + \mu_h + v_{hb} - \varepsilon_h)/3; \\ \gamma_h &= (\lambda_{ha} + \mu_{ha^2} + v_{hb^2})/3; & \gamma_{ha} &= (\lambda_{ha^2} + \mu_h + v_{hb^2} - \varepsilon_h)/3; & \gamma_{ha^2} &= (\lambda_h + \mu_{ha} + v_{hb^2} - \varepsilon_h)/3. \end{aligned}$$

Затем, подставив эти значения в v и сгруппировав соответствующие коэффициенты, легко увидеть, что получится

$$v = 1 + \frac{v_1 - 1}{3}(1 + ab + a^2b^2) + \frac{v_2 - 1}{3}(1 + a^2b + ab^2) + \frac{v_3 - 1}{3}(1 + a + a^2). \quad (1)$$

Введем дополнительное отображение $\varphi: K \rightarrow V(\mathbb{Z}A) \times V(\mathbb{Z}A) \times V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle)$, действующее по правилу

$$\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)).$$

Это отображение является инъективным гомоморфизмом.

Действительно, так как

$$\varphi(vw) = (\varphi_1(vw), \varphi_2(vw), \varphi_3(vw)) = (\varphi_1(v)\varphi_1(w), \varphi_2(v)\varphi_2(w), \varphi_3(v)\varphi_3(w)).$$

И в силу того, что

$$\begin{aligned} (1 + a + a^2)^2 &= 3(1 + a + a^2), \\ (1 + ab + a^2b^2)^2 &= 3(1 + ab + a^2b^2), \\ (1 + a^2b + ab^2)^2 &= 3(1 + a^2b + ab^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+a+a^2)(1+b+b^2) &= (1+b+b^2)(1+a+a^2) = \\ &= (1+a^2b+ab^2)(1+ab+a^2b^2) = (1+ab+a^2b^2)(1+a^2b+ab^2) = \\ &= (1+a+a^2)(1+ab+a^2b^2) = (1+ab+a^2b^2)(1+a+a^2) = \\ &= (1+a^2b+ab^2)(1+a+a^2) = (1+a+a^2)(1+a^2b+ab^2). \end{aligned}$$

И так как, $w_1 - 1, w_2 - 1 \in I(\langle a \rangle)$, а $w_2 - 1 \in I(\langle b \rangle)$,

$$\begin{aligned} (w_1 - 1)(1+a+a^2) &= (w_2 - 1)(1+a+a^2) = (\tilde{w}_3 - 1)(1+b+b^2) = 0. \\ vw &= \left(1 + \frac{w_1 - 1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{w_2 - 1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{\tilde{w}_3 - 1}{3}(1+a+a^2)\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{w_1 - 1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{w_2 - 1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{\tilde{w}_3 - 1}{3}(1+a+a^2)\right) = \\ &= 1 + \frac{w_1 w_1 - 1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{w_2 w_2 - 1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{\tilde{w}_3 \tilde{w}_3 - 1}{3}(1+a+a^2). \end{aligned}$$

Вообще говоря, $\widetilde{v_3 w_3} \neq \tilde{v}_3 \tilde{w}_3$, но зато легко видеть, что $\widetilde{v_3 w_3}(1+a+a^2) = \tilde{v}_3 \tilde{w}_3(1+a+a^2)$.

Таким образом, мы показали, что отображение φ определено корректно и является гомоморфизмом. А инъективность следует из (1), как единственного решения системы. Теорема доказана.

В следующих разделах мы приведем примеры использования этой теоремы для некоторых абелевых групп.

2. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (9,3)

Пусть $G = \langle a \mid a^9 = 1 \rangle \times \langle b \mid b^3 = 1 \rangle$. Описание группы единиц $V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$ известно из работы [3]. Для удобства вычислений возьмем базис как в работе [2].

$$V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) = \langle a \rangle \times F, \quad F = \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - (a + a^8) + (a^2 + a^7), \quad u_1^{-1} = -1 - (a + a^8) + (a^3 + a^6) + (a^4 + a^5), \\ u_2 &= 1 - (a^2 + a^7) + (a^4 + a^5), \quad u_2^{-1} = -1 - (a^2 + a^7) + (a^3 + a^6) + (a + a^8). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 мы имеем

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times K,$$

где для любого $v \in K$

$$v = 1 + \frac{v_1 - 1}{3}(1 + a^3b + a^6b^2) + \frac{v_2 - 1}{3}(1 + a^6b + a^3b^2),$$

$v_1, v_2 \in (1 + I(\langle a^3 \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$, и так как $V(\mathbb{Z}G / \langle a^3 \rangle)$ – тривиальная группа (см. [3]) $\varphi_3(v) = 1$.

Если $\sum_{i=0}^8 \lambda_i a^i, \sum_{i=0}^8 \mu_i a^i$, то

$$\begin{aligned} v &= 1/3 \left((1 + \lambda_0 + \mu_0) \cdot 1 + (\lambda_1 + \mu_1) \cdot a + (\lambda_2 + \mu_2) \cdot a^2 + (\lambda_3 + \mu_3) \cdot a^3 + (\lambda_4 + \mu_4) \cdot a^4 + \right. \\ &+ (\lambda_5 + \mu_5) \cdot a^5 + (\lambda_6 + \mu_6) \cdot a^6 + (\lambda_7 + \mu_7) \cdot a^7 + (\lambda_8 + \mu_8) \cdot a^8 + (\lambda_6 + \mu_3) \cdot b + (\lambda_7 + \mu_4) \cdot ab + \\ &+ (\lambda_8 + \mu_5) \cdot a^2b + (\lambda_0 + \mu_6 - 1) \cdot a^3b + (\lambda_1 + \mu_7) \cdot a^4b + (\lambda_2 + \mu_8) \cdot a^5b + (\lambda_3 + \mu_0 - 1) \cdot a^6b + \\ &+ (\lambda_4 + \mu_1) \cdot a^7b + (\lambda_5 + \mu_2) \cdot a^8b + (\lambda_3 + \mu_6) \cdot b^2 + (\lambda_4 + \mu_7) \cdot ab^2 + (\lambda_5 + \mu_8) \cdot a^2b^2 + \\ &+ (\lambda_6 + \mu_0 - 1) \cdot a^3b^2 + (\lambda_7 + \mu_1) \cdot a^4b^2 + (\lambda_8 + \mu_2) \cdot a^5b^2 + (\lambda_0 + \mu_3 - 1) \cdot a^6b^2 + \\ &\left. + (\lambda_1 + \mu_4) \cdot a^7b^2 + (\lambda_2 + \mu_5) \cdot a^8b^2 \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Далее заметим, что $u_1, u_2 \in (1 + I(\langle a^3 \rangle))$, так как

$$u_1 = 1 - a^2(a^6 - 1) + a(a^6 - 1), \quad u_2 = 1 - a(a^6 - 1) + a(a^3 - 1) + a^2(a^3 - 1).$$

Поэтому рассмотрим гомоморфизм $\varphi: K \rightarrow F \times F$, действующий по правилу $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v))$.

Составим таблицу произведений элементов u_1, u_2

Таблица 1

	Коэффициенты при				
	1	$a + a^8$	$a^2 + a^7$	$a^3 + a^6$	$a^4 + a^5$
u_1	1	-1	1	0	0
u_1^2	5	-4	3	-2	1
u_1^3	19	-18	15	-9	3
u_2	1	0	-1	0	1
u_2^2	5	1	-4	-2	3
u_2^3	19	3	-18	-9	15
$u_1 u_2$	-1	0	1	1	-1
$u_1 u_2^2$	-5	-1	5	3	-4
$u_1^2 u_2$	1	1	-2	0	-1
$u_1^2 u_2^2$	7	1	-6	-3	5

Из табл. 1 с помощью (2) видно, что

$$(u_1^2, 1), (u_2^3, 1), (1, u_1^3), (1, u_2^3) \in \varphi(K),$$

и для $0 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq 2$ $(u_1^{i_1} u_2^{i_2}, u_1^{j_1} u_2^{j_2}) \in \varphi(K)$ тогда и только тогда, когда

$$i_1 = 1, i_2 = 2, j_1 = 2, j_2 = 1 \text{ или } i_1 = 2, i_2 = 1, j_1 = 1, j_2 = 2.$$

Выбрав из них порождающие, мы получаем следующий результат.

Теорема 2. $\varphi(K) = \langle (u_1 u_2^2, u_1^2 u_2) \rangle \times \langle (u_2^3, 1) \rangle \times \langle (1, u_1^3) \rangle \times \langle (1, u_2^3) \rangle$. $F \times F / \varphi(K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Таким образом, мы уже можем записать и порождающие группы $V(\mathbb{Z}G)$, но в следующей теореме, решив вопрос об индексе подгруппы Милнора (см. [1, стр. 45]), мы выберем более удобный базис.

Теорема 3. Пусть $W(G)$ – подгруппа Милнора, тогда $|V(\mathbb{Z}G) : W(G)| = 1$,

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle \times \langle u_4 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - (a + a^8) + (a^2 + a^7), & u_2 &= 1 - (a^2 + a^7) + (a^4 + a^5), \\ u_3 &= 1 - (ab + a^8 b^2) + (a^2 b^2 + a^7 b), & u_4 &= 1 - (a^2 b^2 + a^7 b) + (a^4 b + a^5 b^2), \\ u_5 &= 1 - (ab^2 + a^8 b) + (a^2 b + a^7 b^2), & u_6 &= 1 - (a^2 b + a^7 b^2) + (a^4 b^2 + a^5 b). \end{aligned}$$

Доказательство. По определению $W(G)$ подгруппа группы $V(\mathbb{Z}G)$, порожденная подгруппами $V(\mathbb{Z}C)$, когда C пробегает все циклические подгруппы группы G . Перечислим все $V(\mathbb{Z}C)$ для нашей группы.

$$V(\mathbb{Z}\langle a^3 \rangle) = \langle a^3 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle b \rangle) = \langle b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^3 b \rangle) = \langle a^3 b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^6 b \rangle) = \langle a^6 b \rangle,$$

$$V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) = \langle a \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle ab \rangle) = \langle ab \rangle \times \langle u_3 \rangle \times \langle u_4 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle ab^2 \rangle) = \langle ab^2 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle.$$

Утверждение следует из теоремы 2 и из того, что

$$\begin{aligned} \varphi(u_1 u_2 u_5^{-1} u_6^{-1}) &= (u_1 u_2^2, u_1^2 u_2), & \varphi(u_2 u_3 u_5^{-1} u_6^{-1}) &= (u_2^3, 1), \\ \varphi(u_1 u_4 u_5^{-1} u_6^{-1}) &= (1, u_1^3), & \varphi(u_2 u_3^{-1} u_4^{-1} u_5) &= (1, u_2^3). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (9,3,3)

Пусть $G = \langle a | a^9 = 1 \rangle \times \langle b | b^3 = 1 \rangle \times \langle c | c^3 = 1 \rangle$. Через A обозначим подгруппу $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Описание группы единиц $V(\mathbb{Z}A)$ возьмем из теоремы 3.

$$V(\mathbb{Z}A) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times F, \quad F = \langle u_1 \rangle \times \dots \times \langle u_6 \rangle.$$

Согласно теореме 1 мы имеем $V(\mathbb{Z}A) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \dots \times \langle u_6 \rangle \times K$, где для любого $v \in K$

$$v = 1 + \frac{u_1 - 1}{3}(1 + a^3b + a^6b^2) + \frac{u_2 - 1}{3}(1 + a^6b + a^3b^2),$$

$u_1, u_2 \in (1 + I(\langle a^3 \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$, и так как $V(\mathbb{Z}G/\langle a^3 \rangle)$ – тривиальная группа (см. [3]) $\varphi_3(v) = 1$.

Далее заметим, что $u_\ell \in (1 + I(\langle a^3 \rangle))$, $\ell = 1, \dots, 6$. Поэтому рассмотрим гомоморфизм $\varphi: K \rightarrow F \times F$, действующий по правилу $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v))$.

Из теоремы 2, так как $(ab^i)^3 = a^3$, $i = 0, 1, 2$, следует что $(u_\ell^3, 1), (1, u_\ell^3) \in \varphi(K)$. Так же

$$(u_1^i u_2^j, u_1^i u_2^j), (u_3^i u_4^j, u_3^i u_4^j), (u_5^i u_6^j, u_5^i u_6^j) \in \varphi(K), i_\ell, j_\ell = 0, 1, 2$$

тогда и только тогда, когда

$$i_1 = i_3 = i_5 = 1, i_2 = i_4 = i_6 = 2, j_1 = j_3 = j_5 = 2, j_2 = j_4 = j_6 = 1$$

или

$$i_1 = i_3 = i_5 = 2, i_2 = i_4 = i_6 = 1, j_1 = j_3 = j_5 = 1, j_2 = j_4 = j_6 = 2.$$

Затем в пакете GAP (см. [4]) было проверено, что

$$(u_2^i u_4^j u_6^k, u_1^i u_2^j u_3^k u_4^l u_5^m u_6^n) \notin \varphi(K), i_\ell, j_\ell = 0, 1, 2.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 4. $K = \langle w_1 \rangle \times \dots \times \langle w_{12} \rangle$, где

$$\begin{aligned} \varphi(w_1) &= (u_1 u_2^2, u_1^2 u_2), & \varphi(w_2) &= (u_3 u_4^2, u_3^2 u_4), & \varphi(w_3) &= (u_5 u_6^2, u_5^2 u_6), \\ \varphi(w_4) &= (u_2^3, 1), & \varphi(w_5) &= (u_4^3, 1), & \varphi(w_6) &= (u_6^3, 1), \\ \varphi(w_7) &= (1, u_1^3), & \varphi(w_8) &= (1, u_2^3), & \varphi(w_9) &= (1, u_3^3), \\ \varphi(w_{10}) &= (1, u_4^3), & \varphi(w_{11}) &= (1, u_5^3), & \varphi(w_{12}) &= (1, u_6^3). \end{aligned}$$

$$F \times F / \varphi(K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

Так же, как и в предыдущем разделе, решается вопрос об индексе подгруппы Милнора.

Теорема 5. Пусть $W(G)$ – подгруппа Милнора, тогда $|V(\mathbb{Z}G) : W(G)| = 1$.

4. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (15,3)

Пусть $G = \langle a \mid a^{15} = 1 \rangle \times \langle b \mid b^3 = 1 \rangle$. Описание группы единиц $V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$ было получено в работе [2]. Для удобства вычислений возьмем другой базис.

$$V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) = \langle a \rangle \times \langle u_0 \rangle \times F, \quad F = \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 + (a^3 + a^{12}), \quad u_0^{-1} = -1 + (a^6 + a^9), \\ u_1^{-1} &= -3 - 3(a + a^{14}) - 2(a^2 + a^{13}) - (a^3 + a^{12}) + 2(a^5 + a^{10}) + 3(a^6 + a^9) + 3(a^7 + a^8), \\ u_2 &= 3 - 2(a^2 + a^{13}) + (a^3 + a^{12}) + 2(a^4 + a^{11}) - (a^5 + a^{10}) - 2(a^6 + a^9) + (a^7 + a^8), \\ u_2^{-1} &= -3 + 3(a + a^{14}) - 3(a^2 + a^{13}) + 3(a^3 + a^{12}) - 2(a^4 + a^{11}) + 2(a^5 + a^{10}) - (a^6 + a^9), \\ u_3 &= 3 + (a + a^{14}) - 2(a^3 + a^{12}) - 2(a^4 + a^{11}) - (a^5 + a^{10}) + (a^6 + a^9) + 2(a^7 + a^8), \\ u_3^{-1} &= 3 + 3(a^2 + a^{13}) - (a^3 + a^{12}) - 3(a^4 + a^{11}) + 2(a^5 + a^{10}) + 3(a^6 + a^9) - 2(a^7 + a^8). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 мы имеем $V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle \times K$, где для любого $v \in K$

$$v = 1 + \frac{u_1 - 1}{3}(1 + a^5b + a^{10}b^2) + \frac{u_2 - 1}{3}(1 + a^{10}b + a^5b^2) + \frac{\tilde{u}_3 - 1}{3}(1 + a^5 + a^{10}),$$

$u_1, u_2 \in (1 + I(\langle a^5 \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$, а $v_3 \in (1 + I(\langle b \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a^5 \rangle)$.

Математика

Обозначим через ψ изоморфизм групп $V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$ и $V(\mathbb{Z}G/\langle a^5 \rangle)$, действующий по правилу $\psi: a \rightarrow ab\langle a^5 \rangle$. Тогда $V(\mathbb{Z}G/\langle a^5 \rangle) = \langle ab\langle a^5 \rangle \rangle \times \langle u'_0 \rangle \times F'$, $F' = \langle u'_1 \rangle \times \langle u'_2 \rangle \times \langle u'_3 \rangle$, где $u'_i = \psi(u_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Далее заметим, что $u_1, u_2, u_3 \in (1 + I(\langle a^5 \rangle))$, а $u'_1, u'_2, u'_3 \in (1 + I(\langle b \rangle))$ так как

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + (a^4 + a - 1)(a^5 - 1) - (2a^4 - 2a^3 + 2a^2 - a + 1)(a^{10} - 1), \\ u_2 &= 1 - (2a^4 - a^3 - a^2 + 2a + 1)(a^5 - 1) - (2a^3 - a^2 - 2a + 1)(a^{10} - 1), \\ u_3 &= 1 + (a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a - 1)(a^5 - 1) - (a^4 - 2a^2 - 2a + 1)(a^{10} - 1), \\ u'_1 &= \langle a^5 \rangle + (a^4 \langle a^5 \rangle + 2a^3 \langle a^5 \rangle - 2a \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b - 1) - \\ &\quad - (2a^4 \langle a^5 \rangle - 2a^2 \langle a^5 \rangle - a \langle a^5 \rangle + \langle a^5 \rangle)(b^2 - 1), \\ u'_2 &= \langle a^5 \rangle + (2a^4 \langle a^5 \rangle - 2a^3 \langle a^5 \rangle + a^2 \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b - 1) + \\ &\quad + (a^3 \langle a^5 \rangle - 2a^2 \langle a^5 \rangle + 2a \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b^2 - 1), \\ u'_3 &= \langle a^5 \rangle + (2a^4 \langle a^5 \rangle - 2a^2 \langle a^5 \rangle - a \langle a^5 \rangle + \langle a^5 \rangle)(b - 1) + \\ &\quad + (a^4 \langle a^5 \rangle + 2a^3 \langle a^5 \rangle - 2a \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b^2 - 1). \end{aligned}$$

Причем $u_0 \notin (1 + I(\langle a^5 \rangle))$, а $u'_0 \notin (1 + I(\langle b \rangle))$.

Поэтому рассмотрим гомоморфизм $\varphi: K \rightarrow F \times F \times F'$, действующий по правилу

$$\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)).$$

Аналогично, как в примере для группы $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, мы имеем здесь, что

$$(u_i^3, 1, 1), (1, u_i^3, 1), (1, 1, u_i^3) \in \varphi(K), i = 1, 2, 3.$$

Далее с помощью GAP (см. [4]) было проверено, что

$$(u_1^{i_1} u_2^{j_2} u_3^{k_3}, u_1^{i_1} u_2^{j_2} u_3^{k_3}, u_1^{i_1} u_2^{j_2} u_3^{k_3}) \in \varphi(K), i_\ell, j_\ell, k_\ell = 0, 1, 2 (\ell = 1, 2, 3).$$

тогда и только тогда, когда показатели степеней соответствуют значениям из табл. 2.

Таблица 2

i_1	i_2	i_3	j_1	j_2	j_3	k_1	k_2	k_3
0	0	0	1	0	1	2	0	2
0	0	0	2	0	2	1	0	1
0	0	1	0	0	2	1	0	2
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	2	0	1	2	0	0
0	0	2	0	0	1	2	0	1
0	0	2	1	0	2	1	0	0
0	0	2	2	0	0	0	0	2

i_1	i_2	i_3	j_1	j_2	j_3	k_1	k_2	k_3	i_1	i_2	i_3	j_1	j_2	j_3	k_1	k_2	k_3
0	1	0	0	2	0	2	1	2	0	2	0	0	1	0	1	2	1
0	1	0	1	2	1	1	1	1	0	2	0	1	1	1	0	2	0
0	1	0	2	2	2	0	1	0	0	2	0	2	1	2	2	2	2
0	1	1	0	2	2	0	1	1	0	2	1	0	1	2	2	2	0
0	1	1	1	2	0	2	1	0	0	2	1	1	1	0	1	2	2
0	1	1	2	2	1	1	1	2	0	2	1	2	1	1	0	2	1
0	1	2	0	2	1	1	1	0	0	2	2	0	1	1	0	2	2
0	1	2	1	2	2	0	1	2	0	2	2	1	1	2	2	2	1
0	1	2	2	2	0	2	1	1	0	2	2	2	1	0	1	2	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	2	1	0	1	2
1	0	0	1	0	2	0	0	2	1	1	0	1	2	2	2	1	1

1	0	0	2	0	0	2	0	1	1	1	0	2	2	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	2	0	2	1	1	1	0	2	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1	0	1	0
1	0	1	2	0	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	1	2
1	0	2	0	0	2	0	0	1	1	1	2	0	2	2	2	1	0
1	0	2	1	0	0	2	0	0	1	1	2	1	2	0	1	1	2
1	0	2	2	0	1	1	0	2	1	1	2	2	2	1	0	1	1
1	2	0	0	1	1	2	2	1	2	0	0	0	0	2	2	0	0
1	2	0	1	1	2	1	2	0	2	0	0	1	0	0	1	0	2
1	2	0	2	1	0	0	2	2	2	0	0	2	0	1	0	0	1
1	2	1	0	1	0	0	2	0	0	2	0	1	0	0	1	0	2
1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	0	1	1	0	2	2	0	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0	1	2	0	0	1	0	0
1	2	2	0	1	2	1	2	2	2	0	2	0	0	0	1	0	1
1	2	2	1	1	0	0	2	1	2	0	2	1	0	1	0	0	0
1	2	2	2	1	1	2	2	0	2	0	2	2	0	2	2	0	2
2	1	0	0	2	2	1	1	2	2	2	0	0	1	2	0	2	1
2	1	0	1	2	0	0	1	1	2	2	0	1	1	0	2	2	0
2	1	0	2	2	1	2	1	0	2	2	0	2	1	1	1	2	2
2	1	1	0	2	1	2	1	1	2	2	1	0	1	1	1	2	0
2	1	1	1	2	2	1	1	0	2	2	1	1	1	2	0	2	2
2	1	1	2	2	0	0	1	2	2	2	1	2	1	0	2	2	1
2	1	2	0	2	0	0	1	0	2	2	2	0	1	0	2	2	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1
2	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	1	2	0	2	0

Выбрав из них порождающие, мы получаем следующий результат.

Теорема 6. $K = \langle w_1 \rangle \times \dots \times \langle w_9 \rangle$, где

$$\begin{aligned} \varphi(w_1) &= (u_1, u_3, u'_1), & \varphi(w_2) &= (u_2, u_2^2, u_1'^2 u_2' u_3'^2), & \varphi(w_3) &= (u_3, u_3^2, u_1' u_3'^2), \\ \varphi(w_4) &= (1, u_1 u_3, u_1'^2 u_3'^2), & \varphi(w_5) &= (1, u_2^3, 1), & \varphi(w_6) &= (1, u_3^3, 1), \\ \varphi(w_7) &= (1, 1, u_1'^3), & \varphi(w_8) &= (1, 1, u_2'^3), & \varphi(w_9) &= (1, 1, u_3'^3), \end{aligned}$$

$$F \times F / \varphi(K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

Так же, как и в предыдущих примерах, решим вопрос об индексе подгруппы Милнора и выберем более удобный базис.

Теорема 7. Пусть $W(G)$ – подгруппа Милнора, тогда $|V(\mathbb{Z}G) : W(G)| = 1$,

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \dots \times \langle u_{12} \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 + (a^3 + a^{12}), \quad u(x) = 3 - 2(x + x^{14}) + 2(x^2 + x^{13}) - 2(x^3 + x^{12}) + (x^4 + x^{11}) - (x^5 + x^{10}) + (x^6 + x^9), \\ u_1 &= u(a), \quad u_2 = u(a^2), \quad u_3 = u(a^4), \quad u_4 = u(ab), \quad u_5 = u(a^2 b^2), \quad u_6 = u(a^4 b), \quad u_7 = u(a^2 b), \\ u_8 &= u(a^4 b^2), \quad u_9 = u(a^8 b), \quad u_{10} = u(a^3 b), \quad u_{11} = u(a^6 b^2), \quad u_{12} = u(a^{12} b). \end{aligned}$$

Доказательство. Перечислим все $V(\mathbb{Z}C)$, порождающие $W(G)$, когда C пробегает все циклические подгруппы группы G .

$$\begin{aligned} V(\mathbb{Z}\langle a^5 \rangle) &= \langle a^5 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle b \rangle) = \langle b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^5 b \rangle) = \langle a^5 b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^{10} b \rangle) = \langle a^{10} b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^3 \rangle) = \langle a^3 \rangle \times \langle u_0 \rangle, \\ V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) &= \langle a \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle ab \rangle) = \langle ab \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_4 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle, \\ V(\mathbb{Z}\langle a^2 b \rangle) &= \langle a^2 b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_7 \rangle \times \langle u_8 \rangle \times \langle u_9 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^3 b \rangle) = \langle a^3 b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_{10} \rangle \times \langle u_{11} \rangle \times \langle u_{12} \rangle. \end{aligned}$$

Утверждение следует из теоремы 6 и из того, что

$$\begin{aligned} \varphi(u_{10}^{-1} u_{11}^{-1} u_{12}^{-1}) &= (u_1, u_3, u'_1), & \varphi(u_1^{-1} u_2 u_3^{-1} u_4 u_6 u_7^{-1}) &= (u_2, u_2^2, u_1'^2 u_2' u_3'^2), \\ \varphi(u_1^{-1} u_7^{-1} u_8^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) &= (u_3, u_3^2, u_1' u_3'^2), & \varphi(u_1^{-1} u_3^{-1} u_7^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) &= (1, u_1 u_3, u_1'^2 u_3'^2), \end{aligned}$$

$$\varphi(u_2 u_4 u_6 u_9 u_{12}) = (1, u_2^3, 1),$$

$$\varphi(u_1^{-1} u_3^{-1} u_4 u_8 u_{10}^{-1} u_{11}^{-1} u_{12}^{-1}) = (1, 1, u_1'^3)$$

$$\varphi(u_1^{-1} u_3^{-1} u_6 u_7^{-1} u_8^{-1} u_9^{-1} u_{11}) = (1, 1, u_3'^3).$$

$$\varphi(u_3 u_4^{-1} u_6^{-1} u_7^{-1} u_8^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) = (1, u_3^3, 1),$$

$$\varphi(u_1 u_3 u_5 u_9 u_{10}) = (1, 1, u_2'^3),$$

Теорема доказана.

Литература

1. Бовди, А.А. Мультипликативная группа целочисленного группового кольца / А.А. Бовди. – Ужгород: Ужг. гос. ун., 1987. – 210 с. (Деп. УкрНИИТИ 24.09.87, №2712–Ук87).
2. Колясников, С.А. О группе единиц целочисленного группового кольца конечных групп разложимых в прямое произведение / С.А. Колясников. – Новосибирск, Ред. Сиб. мат. журн., 2000. – 45 с. (Деп. В ВИНТИ 30.03.00, №860–В00).
3. Алеев, Р.Ж. Единицы циклических групп порядков 7 и 9 / Р.Ж. Алеев, Г.А. Панина // Известия вузов, Математика. – 1999. – № 11(450). – С. 81–84.
4. Martin Schönert *et al.* GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, sixth edition, 1997.

UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS OF FINITE GROUPS WITH A DIRECT MULTIPLIER OF ORDER 3

S.A. Kolyasnikov¹

The description of units of integral group rings of finite groups of type $A \times Z_3$ was obtained, where A contains a central subgroup of order 3. For example, the unit groups of integral group rings of Abelian groups of the types (9,3), (9,3,3) and (15,3) were found.

Keywords: Abelian group, group ring, unit group of group ring.

References

1. Bovdi A.A. *Mul'tiplikativnaya gruppy tselochislennogo gruppovogo kol'tsa* (Multiplicative group of integral group ring). Uzhgorod: Uzhgorodskiy gosudarstvennyy universitet, 1987. 210 p. (in Russ.).
2. Kolyasnikov S.A. *O grupe edinit tselochislennogo gruppovogo kol'tsa konechnykh grupp razlozhimykh v pryamoe proizvedenie* (About group of units of integral group ring of finite groups factorable into direct composition). Novosibirsk, Red. Sibirskogo Matematicheskogo Zhurnala, 2000. 45 p. (in Russ.).
3. Alev R.Zh., Panina G.A. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*. 1999. Vol. 43, no. 11. pp. 80–83.
4. Martin Schönert *et al.* GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Lehrstuhl D für Mathematik. Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, sixth edition, 1997.

Поступила в редакцию 6 марта 2013 г.

¹ Kolyasnikov Sergey Andreevich is Senior Lecturer, General Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: kolyasnikovsa@susu.ac.ru