

# КВАЗИСОБОЛЕВЫ ПРОСТРАНСТВА $\ell_p^m$

Д.К. Аль-Делфи<sup>1</sup>

Впервые рассмотрены понятия квазибанаховых пространств последовательностей  $\ell_p^m$ ,  $m \in R$ ,  $p \in (0, +\infty)$ . Доказаны аналоги теоремы вложения Соболева. Также рассмотрен квазиоператор Лапласа.

Ключевые слова: квазинормы, квазибанахово пространство, квазисоболевы пространства, квазиоператор Лапласа, квазиоператор Грина.

## Введение

Пусть  $\Omega \subset R^n$  – ограниченная область с границей класса  $C^\infty$ . К настоящему времени хорошо изучены функциональные пространства Соболева  $W_p^m(\Omega)$ ,  $m \in \{0\} \cup N$ ,  $p \in [1, +\infty)$ ; где  $W_p^m(\Omega) = L_2(\Omega)$  – пространства Лебега [1]. Также хорошо известна [1] теорема вложения Соболева: при всех  $m \in N$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, m-1$ ,  $p, q \in [1, +\infty)$  таких, что  $\frac{1}{p} + \frac{m-\ell}{n} \leq \frac{1}{q} < 1$ , имеют место плотные и непрерывные вложения

$$W_p^m(\Omega) \subset W_q^\ell(\Omega) \quad (1)$$

Нашей задачей является распространение данного результата на квазисоболевы пространства последовательностей

$$\ell_p^m = \left\{ x = \{x_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^{\frac{m}{2}} |x_k| \right)^p < +\infty \right\},$$

где  $p \in (0, +\infty)$ ,  $m \in R$ ,  $\{\lambda_k\}$  – монотонно неубывающая последовательность положительных чисел такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$ . Статья содержит три части, в первой приводятся основные факты теории квазибанаховых пространств, почерпнутые из [2], а во второй излагаются аналоги теоремы вложения Соболева. В заключение вводится в рассмотрение квазиоператор Лапласа.

## 1. Квазисоболевы пространства.

Пусть  $\mathcal{E}$  – линейное вещественное (простоты ради) пространство. Квазинормированным пространством называется упорядоченная пара  $(\mathcal{E}, {}_p\|\cdot\|)$ , где квазинорма  ${}_p\|\cdot\|: \mathcal{E} \rightarrow R$  удовлетворяет следующим аксиомам:

- (i)  $\forall x \in \mathcal{E} \quad {}_p\|x\| \geq 0$ , причем  ${}_p\|x\| = 0$  точно тогда, когда  $x = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{0}$  – нуль пространства  $\mathcal{E}$ ;
- (ii)  $\forall x \in \mathcal{E} \quad \forall \alpha \in R \quad {}_p\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot {}_p\|x\|$ ;
- (iii)  $\forall x, y \in \mathcal{E} \quad {}_p\|x + y\| \leq \text{const} \left( {}_p\|x\| + {}_p\|y\| \right)$ , где константа  $\text{const} \geq 1$  и не зависит ни от  $x$ , ни от  $y$ .

В дальнейшем квазинормированное пространство  $(\mathcal{E}, {}_p\|\cdot\|)$  будем отождествлять с линейным пространством  $\mathcal{E}$ . Последовательность  $\{x_k\} \subset \mathcal{E}$  называется сходящейся к  $x \in \mathcal{E}$ , если

<sup>1</sup> Джавад К. Аль-Делфи – аспирант кафедры уравнений математической физики, механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет; Al-Mustansiriyah University, Багдад, Ирак.  
E-mail: rassian71@mail.ru

## Краткие сообщения

$\lim_{k \rightarrow \infty} {}_p\|x_k - x\| = 0$ . Этот факт будем записывать так:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ . Последовательность называется фундаментальной, если  $\lim_{k, r \rightarrow \infty} (x_k - x_r) = 0$ .

Пространство  $\mathcal{O}$  называется квазибанаховым, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к некоторой точке этого пространства. Отметим сразу, что любое банахово пространство является квазибанаховым, а обратное, вообще говоря, неверно.

**Пример 1.** Пространства  $\ell_p^m$  – квазибанаховы при всех  $p \in (0, +\infty)$ , однако они банаховы только при  $p \in [1, +\infty)$ .

**Теорема 1.** Квазисоболевы пространства  $\ell_p^m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}_+$ , являются квазибанаховыми.

Приведем набросок доказательства. На, очевидно, линейном пространстве  $\ell_p^m$  построим функцию  ${}_p^m\|\cdot\|: \ell_p^m \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле

$${}_p^m\|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^{\frac{m}{2}} |x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет аксиомам (i) и (ii) квазинормы. Рассмотрим вектор  $y = \left\{ \lambda_k^{\frac{m}{2}} x_k \right\} \in \ell_p$ , поэтому  ${}_p^m\|\cdot\|$  удовлетворяет и аксиоме (iii), причем  $\text{const} = 2^{\frac{1}{p}}$  при  $p \in (0, 1)$ , и  $\text{const} = 1$  при  $p \in [1, +\infty)$  [2].

Рассмотрим фундаментальную в  $\ell_p^m$  последовательность  $\{x_\ell\}$ . Ее координатные последовательности  $\{x_\ell^k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , фундаментальны и в силу полноты  $\mathbb{R}$  сходятся к  $x^k$ . Полученный предел  $x = \{x^k\}$  и будет искомым [2].

## 2. Теоремы вложения.

Пусть  $U$  и  $F$  – два квазибанаховых пространства. Будем говорить, что

–  $U$  вложено в  $F$ , если  $U$  подмножество  $F$ , то есть  $U \subseteq F$ ;

–  $U$  плотно вложено в  $F$ , если вдобавок замыкание  $\overline{U} = F$ ;

–  $U$  плотно и непрерывно вложено в  $F$ , если вдобавок для всех  $u \in U$   ${}_p\|u\|_U \geq C {}_p\|u\|_F$ ,

где  $C \in \mathbb{R}_+$  – некоторая константа не зависящая от  $u$ .

**Теорема 2.** При всех  $p \in \mathbb{R}_+$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\ell \leq m$ , имеют место плотные и непрерывные вложения  $\ell_p^m$  в  $\ell_p^\ell$ .

**Доказательство.** Вложение  $\ell_p^m \subset \ell_p^\ell$  очевидно. Докажем плотность вложения.

Пусть  $x \in \ell_p^\ell$ , рассмотрим последовательность  $\{x_k\}$ , где  $x_1 = (x^1, 0, \dots)$ ,  $x_2 = (x^1, x^2, 0, \dots)$ , ...  $x_k = (x^1, x^2, \dots, x^k, 0, \dots)$ , ... Очевидно,  $\{x_k\} \in \ell_p^\ell$ , причем  $x_k \rightarrow x$  в квазинорме  $\ell_p^\ell$ . Непрерывность вложения тоже очевидна.

## 3. Квазиоператор Лапласа.

Пусть  $U$  и  $F$  – квазибанаховы пространства, линейный оператор  $L: U \rightarrow F$  назовем непрерывным, если его область определения  $\text{dom} L = U$  и  ${}_p\|u\|_U \geq C {}_p\|Lu\|_F$  при всех  $u \in U$ , а  $C \in \mathbb{R}_+$  – константа, не зависящая от  $u$ . Линейный оператор  $L \in \mathcal{L}(U; F)$  назовем топлинейным изоморфизмом, если существует обратный оператор  $L^{-1} \in \mathcal{L}(F; U)$ .

Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа  $\Lambda x = \{\lambda_k x_k\}$ , где  $x \in \ell_p^m$ .

**Теорема 3.** При всех  $p \in R_+$  и  $m \in R$  квазиоператор Лапласа  $\Lambda: \ell_p^{m+2} \rightarrow \ell_p^m$  – топлинейный изоморфизм.

**Доказательство.** Непрерывность оператора  $\Lambda$  очевидна в силу

$${}^m_p \|\Lambda x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^{\frac{m}{2}+1} |x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = {}^{m+2}_p \|x\|.$$

Построим обратный оператор  $\Lambda^{-1}x = \{\lambda_k^{-1}x_k\}$  (квазиоператор Грина). Очевидно,  $\Lambda^{-1}\Lambda x = x$  при всех  $x \in \ell_p^{m+2}$  и  $\Lambda\Lambda^{-1}x = x$  при всех  $x \in \ell_p^m$ . Далее,

$${}^{m+2}_p \|\Lambda x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^{\frac{m+2}{2}-1} |x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = {}^m_p \|x\|.$$

**Замечание.** Обобщение всех приведенных выше результатов на случай комплексных квазисоболевых пространств  $\ell_p^m$  очевидно.

*В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и проявленный интерес к работе.*

#### Литература

1. Трибель, Х. Теория интерполяций, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М: Мир, 1980. – 664 с.
2. Al-Delfi, J.K. Quasi-Banach space for the sequence space  $\ell_p$ , where  $0 < p < 1$  / J.K. Al-Delfi // Journal of college of Education (Iraq – Baghdad). Mathematics. – 2007. – № 3. – P. 285–295.

*Поступила в редакцию 28 февраля 2013 г.*

## QUASI-SOBOLEV SPACES $\ell_p^m$

**Jawad K. Al-Delfi<sup>1</sup>**

Firstly, the notion of quasi-Banach spaces for the sequence spaces  $\ell_p^m$ ,  $m \in R$ ,  $p \in (0, +\infty)$  has been considered and we have been proved analogs of the Sobolev embedding theorem. Also, the notion quasi-operator Laplace has been considered.

Keywords: quasi-norm, Quasi-Banach space, Quasi-Sobolev spaces, Laplace' Quasi-operator, Green' Quasi-operator.

#### Reference

1. Triebel H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. Moscow: Mir, 1980. 664 p. (in Russ).
2. Al-Delfi J.K. Quasi-Banach space for the sequence space  $\ell_p$ , where  $0 < p < 1$ . *Journal of college of Education (Iraq – Baghdad). Mathematics*. 2007. no. 3. pp. 285–295.

<sup>1</sup> Jawad K. Al-Delfi is Post-graduate student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University; Al-Mustansiriyah University, Baghdad, Iraq.  
E-mail: rassian71@mail.ru