УДК 517.948

О СВЯЗИ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.Д. Менихес[1]

Исследуется одна бесконечная серия достаточных условий регуляризуемости интегральных уравнений. Доказано, что любые два из этих условий не являются эквивалентными, даже если ограничиться уравнениями с гладкими ядрами.

Ключевые слова: регуляризуемость, интегральные уравнения, гладкие ядра.

Введение

Решение интегральных уравнений первого рода является некорректной задачей. В 1963 г. в работе [1] А.Н. Тихонов предложил метод регуляризации для решения некорректных задач. Далее было выяснено, что метод регуляризации применим не ко всем некорректным задачам. Задачи, к которым применим метод регуляризации, стали называть регуляризуемыми. В работе [2] было построено нерегуляризуемое интегральное уравнение. Таким образом, нахождение условий регуляризуемости превратилось в важную и актуальную задачу.

В работах [3–11] исследовались различные условия регуляризуемости, использующие понятия теории двойственности банаховых пространств.

В работах [12–14] условия регуляризуемости находились с помощью исследования свойств продолженного оператора.

Достаточные условия регуляризуемости линейных обратных задач

Пусть E и F – банаховы пространства, $A: E \to F$ – линейный непрерывный инъективный оператор.

Определение 1. *Отображение* A^{-1} *называется регуляризуемым, если существует семейство отображений* $R_\delta : F \to E$, $\delta \in (0, \delta_0)$ *такое, что для любого* $x \in E$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\|y - Ax\| \le \delta} \|R_\delta y - x\| = 0 .$$

В этом случае семейство $\{R_\delta\}$ называется регуляризатором для A^{-1}. Операторное уравнение $Ax = y$ называется регуляризуемым, если регуляризуемо отображение A^{-1}. В случае регуляризуемости уравнения семейство $x_\delta = R_\delta y_\delta$ может быть взято в качестве удовлетворительного приближенного решения некорректной задачи нахождения решения уравнения первого рода при приближенно заданной правой части y_δ с точностью δ.

Рассмотрим классическую ситуацию $E = C(0,1)$, $F = L_2(0,1)$. Будем предполагать, что оператор A непрерывен также и в L_2-норме. Тогда оператор A может быть продолжен по непрерывности на различные подпространства M, $C(0,1) \subset M \subset L_2(0,1)$.

В работе [2] было показано, что если продолжение A на некоторое $L_p(0,1)$, $p \ge 2$ имеет конечномерное ядро, то отображение A^{-1} регуляризуемо.

Теорема 1. *Если интегральный оператор* $A: C(0,1) \to L_2(0,1)$ *инъективен и его продолжение на некоторое* $L_p(0,1)$, $p \ge 2$ *имеет конечномерное ядро, то* A^{-1} *регуляризуемо.*

Таким образом, мы имеем различные достаточные условия регуляризуемости. Это бесконечная серия условий при разных $p \ge 2$. Возникает вопрос, не будут ли какие-то из этих условий

[1] Менихес Леонид Давидович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: leonid.menikhes@gmail.com

эквивалентными, если рассматривать не произвольные операторы A, а интегральные операторы с гладкими симметричными ядрами.

В работе [14] был дан отрицательный ответ на этот вопрос. Оказалось, что все рассмотренные в теореме 1 достаточные условия попарно не эквивалентны.

В работе [13] доказывается такое усиление теоремы 1.

Теорема 2. *Если интегральный оператор $A:C(0,1)\to L_2(0,1)$ инъективен и его продолжение на $L_\infty(0,1)$ имеет конечномерное ядро, то A^{-1} регуляризуемо.*

Здесь также возникает естественный вопрос, не будут ли какие-нибудь достаточные условия из теоремы 1 эквивалентны достаточному условию из теоремы 2, если ограничиться операторами с гладкими ядрами. Из теоремы 3 следующего пункта следует отрицательный ответ на этот вопрос.

Сравнение условий регуляризуемости

Пусть $K(x,t)$ – непрерывная функция на квадрате $[0,1]\times[0,1]$. Рассмотрим интегральный оператор

$$Q: f(x)\to\int_0^1 K(x,t)f(t)\,dt, \tag{1}$$

действующий из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$. Через $\overline{Q}$ обозначим продолжение Q на $L_2(0,1)$. Оператор Q предполагается инъективным, так как здесь будет идти речь о регуляризуемости Q^{-1}. Оператор $\overline{Q}$ может и не быть инъективным.

Теорема 3. *Существует инъективный интегральный оператор из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$ с гладким симметричным ядром, продолжение которого по непрерывности на любое $L_p(0,1)$, $p\ge 2$ имеет бесконечномерное ядро, а продолжение на $L_\infty(0,1)$ имеет конечномерное ядро.*

Заметим, что здесь слово ядро используется в двух различных смыслах, но из контекста ясно, что имеется в виду.

Доказательство. Рассмотрим последовательность промежутков

$$J_k=\left[1-\frac{1}{2^k},1-\frac{1}{2^{k+1}}\right],\ k=1,2,\dots.$$

Определим следующую последовательность функций. Через $h_k(x)$ обозначим функцию на $[0,1]$ с носителем в J_k и такую, что $h_k(x)\in L_{k+1}(0,1)$, но $h_k(x)\notin L_{k+2}(0,1)$, $k=1,2,\dots$.

Через M обозначим наименьшее замкнутое подпространство $L_2(0,1)$, содержащее все функции $h_k(x)$. Пусть $C_0^\infty(a,b)$ – подпространство $C(a,b)$, состоящее из финитных функций, т.е. бесконечно дифференцируемых и равных нулю в окрестностях точек a и b.

Для доказательства теоремы рассмотрим следующую лемму из [2].

Лемма 1. *Пусть $h(t)\in L_2(a,b)$ и*

$$H=\left\{f(t)\in L_2(a,b):\int_a^b f(t)h(t)\,dt=0\right\}.$$

Тогда

$$\overline{H\cap C_0^\infty(a,b)}=H.$$

Теперь покажем, что в ортогональном дополнении N к M существует полная ортонормированная система $\{\psi_n(t)\}$ такая, что $\psi_n(t)\in C_0^\infty(0,1)$, $n=1,2,\dots$. Для этого убедимся, что $\overline{N\cap C_0^\infty(0,1)}=N$. Из этого и будет следовать, что в N существует полная ортонормированная система из финитных функций, так как в этом случае из $N\cap C_0^\infty(0,1)$ можно выбрать линейно независимую последовательность, ортогонализируя которую мы и получаем нужную систему $\{\psi_n(t)\}$.

Пусть $f \in N$ и $\varepsilon > 0$. Выберем номер n так, чтобы

$$\int\limits_{2^{n+1}-1/2^{n+1}}^{1} f^2(t)\,dt \le \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{2}$$

Поскольку $f(t)$ ортогональна $h_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$, в силу леммы 1 существует семейство $\{f_k(t),\ k = 1,2,\ldots,n\}$, для которого выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} &1.\ f_k(t) \in C_0^\infty(J_k),\ k = 1,2,\ldots,n; \\ &2.\ \int\limits_{J_k} f_k(t)h_k(t)\,dt = 0,\ k = 1,2,\ldots,n; \\ &3.\ \left\| f_k - f|_{J_k} \right\| \le \frac{\varepsilon}{2(n+1)},\ k = 1,2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{3}$$

где через $f|_{J_k}$ обозначено сужение $f(t)$ на промежуток J_k. На промежутке $J_0 = \left[0,\frac{1}{2}\right]$ существует функция $f_0 \in C_0^\infty(0,1/2)$ такая, что $\left\| f_0 - f|_{J_0} \right\| \le \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$. Теперь рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} f_k(t) \text{ при } t \in J_k,\ k = 0,1,\ldots,n; \\ 0 \quad \text{при } t \in \left[\dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}},1\right]. \end{cases}$$

В силу (2) и (3) $g \in C_0^\infty(0,1)$, $g \in N$, так как для любого $k = 1,2,\ldots$

$$\int\limits_0^1 g(t)h_k(t)\,dt = \int\limits_{J_k} g(t)h_k(t)\,dt = 0,$$

а значит и для любого $m \in M$

$$\int\limits_0^1 g(t)m(t)\,dt = 0.$$

Наконец, из соотношения

$$\|g-f\| = \sqrt{\int\limits_0^1 (g-f)^2\,dt} \le \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \int\limits_{J_k} (g-f)^2\,dt + \frac{\varepsilon^2}{4}} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\int\limits_{J_k} (g-f)^2\,dt} + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2(n+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

следует, что $\overline{N \cap C_0^\infty(0,1)} = N$.

Теперь рассмотрим интегральный оператор Q (1) с ядром

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \psi_n(t), \tag{4}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ – произвольная ортонормированная система из бесконечно дифференцируемых на $[0,1]$ функций, $\{\psi_n(t)\}$ – построенная выше система и

$$a_n = \left(\sup_{0 \le x \le 1} \max\left(\left|\varphi_n(x)\right|, \ldots, \left|\varphi_n^{(n)}(x)\right| \right) \right)^{-1} \left(\sup_{0 \le t \le 1} \max\left(\left|\psi_n(t)\right|, \ldots, \left|\psi_n^{(n)}(t)\right| \right) \right)^{-1} n^{-2}.$$

Тогда ясно, что ряд (4) сходится равномерно и сходятся равномерно ряды, полученные его почленным дифференцированием произвольное число раз, и, следовательно, $K(x,t)$ – бесконечно дифференцируемая функция на квадрате $[0,1]\times[0,1]$.

Теперь покажем, что $\ker\overline{Q} = M$. Действительно, если

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \psi_n(t) f(t)\, dt = 0, \qquad (5)$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \varphi_n(x) = 0, \qquad (6)$$

где $b_n = \int_0^1 f(t)\psi_n(t)\, dt$ – n-й коэффициент Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\psi_n(t)\}$, так как ряд в формуле (5) по теореме Лебега можно почленно интегрировать. Из (6) следует $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, т.е. $f(t) \in M$. Ясно также, что из $f(t) \in M$ следует $f(t) \in \ker\overline{Q}$. Таким образом доказано, что $\ker\overline{Q} = M$. Для того, чтобы ядро Q было симметричным, достаточно положить $\varphi_n = \psi_n$. Отсюда следует, что Q удовлетворяет условиям теоремы. В самом деле, продолжение Q по непрерывности на любое $L_p(0,1)$ имеет бесконечномерное ядро, так как оно содержит все функции h_k, начиная с некоторого номера. А продолжение Q на $L_\infty(0,1)$ имеет нулевое ядро, так как в M все функции, кроме тождественного нуля, не ограничены. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что достаточные условия регуляризуемости для любого p из теоремы 1 и достаточное условие из теоремы 2 не эквивалентны, так как для построенного в теореме 3 оператора Q теорема 1 не дает ответа о регуляризуемости Q^{-1}, в то время как из теоремы 2 следует регуляризуемость Q^{-1}.

Литература

1. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.

2. Менихес, Л.Д. О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам / Л.Д. Менихес // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 241, № 2. – С. 282–285.

3. Менихес, Л.Д. Необходимое и достаточное условие линейной регуляризуемости / Л.Д. Менихес, В.А. Винокуров // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 229, № 6. – С. 1292–1294.

4. Менихес, Л.Д. Условия линейной и конечномерной регуляризуемости линейных обратных задач / Л.Д. Менихес, А.Н. Пличко // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 241, № 5. – С. 1027–1030.

5. Менихес, Л.Д. О равномерной регуляризации некорректных задач / Л.Д. Менихес // Изв. вузов. Матем. – 1979. – № 11. – С. 34–39.

6. Менихес, Л.Д. Линейная регуляризуемость отображений, обратных к линейным операторам / Л.Д. Менихес // Изв. вузов. Матем. – 1979. – № 12. – С. 35–38.

7. Менихес, Л.Д. О некоторых проблемах линейной регуляризуемости / Л.Д. Менихес, В.А. Винокуров, Е.Н. Доманский, А.Н. Пличко // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 270, № 1. – С. 25–28.

8. Меніхес, Л.Д. До теорії регуляризовності в топологічних векторних просторах / Л.Д. Меніхес, А.М. Плічко // Укр. матем. журн. – 1990. – Т. 42, № 6. – С. 777–781.

9. Менихес, Л.Д. О критерии сходимости аппроксимаций метода регуляризации в банаховых пространствах / Л.Д. Менихес, В.П. Танана // Докл. РАН. – 1998. – Т. 363, № 5. – С. 961–964.

10. Менихес, Л.Д. О критериях сходимости аппроксимаций метода регуляризации / Л.Д. Менихес // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 130–141.

11. Менихес, Л.Д. О регуляризации неустойчивых задач в пространствах непрерывных функций / Л.Д. Менихес // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика, физика, химия». – 2003. – Вып. 3. – № 6(22). – С. 9–16.

12. Менихес, Л.Д. О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам / Л.Д. Менихес // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65, № 2. – С. 222–229.

13. Менихес, Л.Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач / Л.Д. Менихес // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82, № 2. – С. 242–247.

14. Менихес, Л.Д. О сравнении условий регуляризуемости интегральных уравнений / Л.Д. Менихес, О.А. Кондратьева // Известия Челябинского научного центра. – 2009. – Вып. 1(43). – С. 11–15.

ON CONNECTION BETWEEN SUFFICIENT CONDITIONS OF REGULARIZABILITY OF INTEGRAL EQUATIONS

L.D. Menikhes[1]

In this paper some infinite series of sufficient conditions of regularizability of integral equations is investigated. It is proved, that any two of these conditions are not equivalent, even if the integral equations have the smooth kernels.

Keywords: regularizability, integral equations, smooth kernels.

References

1. Tikhonov A.N. *Dokl. AN SSSR.* 1963. Vol. 151, no. 3. pp. 501–504. (in Russ.).

2. Menikhes L.D. *Soviet Math. Dokl.* 1978. Vol. 19, no. 4. pp. 838–841. (in Russ.).

3. Vinokurov V.A., Menikhes L.D. *Soviet Math. Dokl.* 1976. Vol. 17, no. 4. pp. 1172–1175. (in Russ.).

4. Menikhes L.D., Plichko A.N. *Soviet Math. Dokl.* 1978. Vol. 19, no. 4. pp. 963–965. (in Russ.).

5. Menikhes L.D. *Izv. vuzov. Matem.* 1979. no. 11. pp. 34–39. (in Russ.).

6. Menikhes L.D. *Izv. vuzov. Matem.* 1979. no. 12. pp. 35–38. (in Russ.).

7. Menikhes L.D., Vinokurov V.A., Domanskii E.N., Plichko A.N. *Dokl. AN SSSR.* 1983. Vol. 270, no. 1. pp. 25–28. (in Russ.).

8. Menikhes L.D., Plichko A.M. *Ukr. matem. zhurn.* 1990. Vol. 42, no. 6. pp. 777–781. (in Ukr.).

9. Menikhes L.D., Tanana V.P. *Dokl. RAN.* 1998. Vol. 363, no. 5. pp. 961–964. (in Russ.).

10. Menikhes L.D. *Sibirskii matematicheskii zhurnal.* 1999. Vol. 40, no. 1. pp. 130–141. (in Russ.).

11. Menikhes L.D. *Vestnik YuUrGU. Seriia "Matematika, fizika, khimiya".* 2003. Issue 3. no. 6(22). pp. 9–16. (in Russ.).

12. Menikhes L.D. *Matem. zametki.* 1999. Vol. 65, no. 2. pp. 222–229. (in Russ.).

13. Menikhes L.D. *Matem. zametki.* 2007. Vol. 82, no. 2. pp. 242–247. (in Russ.).

14. Menikhes L.D., Kondrat'eva O.A. *Izvestiya Chelyabinskoko nauchnogo centra.* 2009. Issue 1(43). pp. 11–15. (in Russ.).

Поступила в редакцию 22 августа 2012 г.

[1] Menikhes Leonid Davidovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of General Mathematics, South Ural State University.
E-mail: leonid.menikhes@gmail.com