

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.В. Карачик¹

Исследуется среднее значение на единичной сфере произведения гармонической в шаре функции на однородный полином.

Ключевые слова: гармонические функции, теорема о среднем, гармонические полиномы.

1. Введение

Настоящая работа является продолжением исследований автора, изложенных в [1–3]. В [2], была построена полная система однородных гармонических полиномов от n переменных $\{G_{(\nu)}(x)\}$, которая ортогональна в $L_2(\partial S)$, где ∂S – единичная сфера в \mathbb{R}^n . Оказывается, что эта система ортогональна и в \mathcal{P} (теорема 3). В качестве приложения этих результатов в теореме 5 получена формула для значения выражения вида $G_{(\nu)}(D)u(x)|_{x=0}$, где $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в \bar{S} функция. В теореме 6 получена формула вычисления интеграла вида $\int_{|x|=1} Q_m(x) ds_x$, где $Q_m(x)$ – однородный полином.

2. Полная система гармонических полиномов

Рассмотрим полиномы вида

$$G_k^s(x_{(n)}) = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^i \frac{|x_{(n-1)}|^{2i} x_n^{k-2i!}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i},$$

где обозначено $x^{k!} = x^k/k!$, $x_{(n-1)} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и $(a,b)_k = a(a+b)\cdots(a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a,b)_0 = 1$. Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$H_k^s(x_{(2)}) = \sum_{i=0}^{[(k-s)/2]} (-1)^i x_1^{2i+s!} x_2^{k-2i-s!}, \quad s=0,1.$$

Теорема 1. [2] При $n \geq 2$ и $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_n$, $\nu_n = 0,1$ полиномы

$$G_{(\nu)}(x_{(n)}) = \prod_{i=1}^{n-2} G_{\nu_i - \nu_{i+1}}^{\nu_{i+1}}(x_{(n-i+1)}) H_{\nu_{n-1}}^{\nu_{n-1}}(x_{(2)}),$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ образуют базис в однородных степени ν_1 гармонических полиномах.

Теорема 2. [2] Полиномы $\{G_{(\nu)}\}$ при различных векторах $\nu \in \mathbb{N}_0^n$, удовлетворяющих условию $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n$, $\nu_n = 0,1$, ортогональны на единичной сфере.

Рассмотрим полиномы $G_{(\nu)}(x)$ в пространстве полиномов $\mathcal{P} = \{P(x) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} x^{\alpha}\}$ со скалярным произведением $\langle P(x), Q(x) \rangle = P(D)Q(x)|_{x=0}$ [1]. Норму полинома $P(x) \in \mathcal{P}$ будем обозначать $|P|_D$. Например, $|x_1^2 + \dots + x_n^2|_D = \Delta |x|_{x=0}^2 = 2n$. Система полиномов $G_{(\nu)}(x)$ обладает еще одним интересным свойством.

Теорема 3. Полиномы $G_{(\nu)}(x)$ для различных векторов $\nu \in \mathbb{N}_0^n$, удовлетворяющих условию $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_n$ ($\nu_n = 0,1$) ортогональны в \mathcal{P} .

¹ Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: karachik@susu.ru

Доказательство. Нам необходимо проверить справедливость следующего утверждения: $\nu \neq \mu \Rightarrow \langle G_{(\nu)}, G_{(\mu)} \rangle = 0$. Применим индукцию по размерности n . Рассмотрим случай $\nu_1 = \mu_1$ поскольку если $\nu_1 \neq \mu_1$, то гармонические полиномы $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны, как имеющие различную степень. Это следует из формулы Гаусса–Остроградского [4]

$$0 = \int_{|x|=1} \left(H_p(x) \frac{\partial}{\partial \nu} H_m(x) - H_m(x) \frac{\partial}{\partial \nu} H_p(x) \right) ds_x = (m - p) \int_{|x|=1} H_p(x) H_m(x) ds_x,$$

где $H_p(x)$ и $H_m(x)$ однородные гармонические полиномы степеней $p \neq m$ соответственно.

Пусть $n = 2$. Полиномы $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны поскольку они имеют различную четность по x_1 : если $\nu_2 = 0$ тогда $G_{(\nu)}(x)$ – четный, а если $\nu_2 = 1$, то нечетный.

Пусть $m > 2$. Рассмотрим случай $\nu_2 < \mu_2$. Определим G -полиномы для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ как $G_k^s \equiv 0$ и обозначим $\tilde{\Delta} = \Delta - \partial^2 / \partial x_n^2$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x_n} G_{(\mu)}(x) = G_{(\mu_-)}(x), \quad \tilde{\Delta} G_{(\mu)}(x) = -G_{(\mu_-)}(x),$$

где $\mu_- = (\mu_1 - 1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ и $\mu_- = (\mu_-)$. Поэтому, будем иметь

$$G_{(\nu)}(D)G_{(\mu)}(x) = G_{(\bar{\nu})}(\tilde{D})\left(G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(D)G_{\mu_1-\mu_2}^{\mu_2}(x)G_{(\bar{\mu})}(\tilde{x})\right). \tag{1}$$

Поскольку при $k \geq m$ и однородном гармоническом полиноме $H_s(x)$

$$\Delta^m \frac{|x|^{2k} H_s(x)}{(2, 2)_k (n + 2s, 2)_k} = \frac{|x|^{2k-2m} H_s(x)}{(2, 2)_{k-m} (n + 2s, 2)_{k-m}},$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} G_{k_1}^{\nu_2}(D)G_{k_2}^{\mu_2}(x)H_{\mu_2}(\tilde{x}) &= \\ &= \sum_{i=0}^{[k_1/2]} \frac{(-1)^i \tilde{\Delta}^i D_n^{k_1-2i}}{(2, 2)_i (n-1+2\nu_2, 2)_i (k_1-2i)!} \sum_{j=0}^{[k_2/2]} \frac{(-1)^j |\tilde{x}|^{2j} x_n^{k_2-2j}!}{(2, 2)_j (n-1+2\mu_2, 2)_j} H_{\mu_2}(\tilde{x}) = \\ &= \sum_{i=0}^{[k_1/2]} \frac{1}{(2, 2)_i (n-1+2\nu_2, 2)_i (k_1-2i)!} \sum_{j=i}^{[(k_2-k_1)/2]+i} \frac{(-1)^{j-i} |\tilde{x}|^{2j-2i} x_n^{k_2-k_1+2i-2j}!}{(2, 2)_{j-i} (n-1+2\mu_2, 2)_{j-i}} H_{\mu_2}(\tilde{x}) = \\ &= C(k_1, \nu_2) \sum_{j=0}^{[(k_2-k_1)/2]} \frac{(-1)^j |\tilde{x}|^{2j} x_n^{k_2-k_1-2j}!}{(2, 2)_j (n-1+2\mu_2, 2)_j} H_{\mu_2}(\tilde{x}) = C(k_1, \nu_2) G_{k_2-k_1}^{\mu_2}(x) H_{\mu_2}(\tilde{x}), \end{aligned}$$

где $C(k_1, \nu_2) = \sum_{i=0}^{[k_1/2]} 1/((2, 2)_i (n-1+2\nu_2, 2)_i (k_1-2i)!)$. Значит из (1) при $k_1 = \nu_1 - \nu_2$ и $k_1 = \mu_1 - \mu_2$

ВЫВОДИМ

$$G_{(\nu)}(D)G_{(\mu)}(x) = C(\nu_1 - \nu_2, \nu_2) G_{(\bar{\nu})}(\tilde{D}) \left[G_{(\mu_1-\mu_2)-(\nu_1-\nu_2)}^{\mu_2}(x) G_{(\bar{\mu})}(\tilde{x}) \right]. \tag{2}$$

Так как $\mu_1 - \mu_2 - \nu_1 + \nu_2 = \nu_2 - \mu_2 < 0$, то мы можем заключить, что $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны. В силу симметричности скалярного произведения это утверждение верно и при $\nu_2 > \mu_2$. Рассмотрим последний случай $\nu_2 = \mu_2$. Используя равенство (2) и учитывая, что $G_0^s = 1$ получим $\langle G_{(\nu)}, G_{(\mu)} \rangle = C(\nu_1 - \nu_2, \nu_2) \langle G_{(\bar{\nu})}, G_{(\bar{\mu})} \rangle$. Так как $\nu_1 = \mu_1$ и $\nu \neq \mu$ имеем $\bar{\nu} \neq \bar{\mu}$. Следовательно, по индукции, полиномы $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны в \mathcal{P} . Теорема доказана.

Известно [5], что максимальное число линейно независимых однородных степени k гармонических полиномов равно $h_k = \frac{2k+n-2}{n-2} \binom{k+n-3}{n-3}$. Перенумеруем полиномы $G_{(\nu)}(x)$ с $\nu_1 = k$ так, что получится полная система ортогональных сферических гармоник степени k . Обозначим эту систему $\{H_k^{(i)}(x) : i = 1, \dots, h_k\}$ и нормируем так, что $\int_{\partial S} (H_k^{(i)}(x))^2 ds_x = \omega_n$.

Теорема 4. Если $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в \bar{S} функция тогда справедливо представление

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} h_k^{(i)} H_k^{(i)}(x), \quad (3)$$

где $h_k^{(i)} = 1/\omega_n \int_{\partial S} H_k^{(i)}(\xi) u(\xi) d\xi$.

Доказательство. Пусть $E(x, \xi) = (n-2)^{-1} |\xi - x|^{2-n}$ ($n > 2$), $\Lambda = x_1 \partial / \partial x_1 + \dots + x_n \partial / \partial x_n$ и при $x \neq \xi \in \partial S$ верно равенство

$$\Lambda_x E(x, \xi) - \Lambda_\xi E(x, \xi) = - \sum_{i=1}^n \frac{x_i(x_i - \xi_i) - \xi_i(\xi_i - x_i)}{|x - \xi|^n} = \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n}.$$

Воспользуемся леммой 11 из [7]. При $|x| < |\xi|$ имеем

$$E(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi).$$

Поэтому при $|x| < |\xi| = 1$ ядро Пуассона имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n} &= \Lambda_x E(x, \xi) - \Lambda_\xi E(x, \xi) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k - k + (2k + n - 2)}{2k + n - 2} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi). \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференцирование и предельный переход под знаком суммирования законны, поскольку ряд в (4) сходится равномерно по $\xi \in \partial S$ и по x при $|x| \leq \alpha < 1$. Подставляя полученное значение ядра Пуассона в известную формулу решения задачи Дирихле в единичном шаре и используя равномерную сходимость ряда по $\xi \in \partial S$ приходим к (3)

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n} u(\xi) ds_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(\xi) u(\xi) ds_\xi H_k^{(i)}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} H_k^{(i)}(\xi) u(\xi) ds_\xi H_k^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} h_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \end{aligned}$$

Теорема 5. Если $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в \bar{S} функция, тогда имеет место равенство

$$\int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi) u(\xi) ds_\xi = g_\nu G_{(\nu)}(D) u(x)|_{x=0}, \quad (5)$$

где $g_\nu = |G_{(\nu)}|_{L_2}^2 / |G_{(\nu)}|_D^2$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (3) из теоремы 4. Так как для каждого i и k найдется вектор ν такой, что $\nu_1 = k \geq \dots \geq \nu_n$ ($\nu_n = 0, 1$) и

$$H_k^{(i)}(x) = \sqrt{\omega_n} \frac{G_{(\nu)}(x)}{|G_{(\nu)}|_{L_2(\partial S)}},$$

то имеем

$$u(x) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{G_{(\nu)}(x)}{|G_{(\nu)}|_{L_2(\partial S)}} \int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi) u(\xi) ds_\xi.$$

Применяя к этому равенству оператор $G_{(\mu)}(D)$ (дифференцирование можно внести под интеграл так как ряд сходится равномерно по $|x| \leq \alpha < 1$) и полагая затем $x = 0$ получим

$$G_{(\mu)}(D) u(x)|_{x=0} = \sum_{\nu_1=\mu_1} \frac{\langle G_{(\mu)}, G_{(\nu)} \rangle}{|G_{(\nu)}|_{L_2(\partial S)}} \int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi) u(\xi) ds_\xi = \frac{1}{g_\nu} \int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi) u(\xi) ds_\xi.$$

Здесь мы воспользовались ортогональностью полиномов $G_{(\mu)}(x)$ в \mathcal{P} (теорема 3). Отсюда сразу получаем равенство (5). Теорема доказана.

Для использования теоремы 5 необходима формула для вычисления интегралов вида $\int_{|x|=1} Q_m(x) ds_x$, где $Q_m(x)$ – однородный полином степени m .

Теорема 6. Справедлива формула

$$\int_{|x|=1} Q_m(x) ds_x = \begin{cases} 0, & m \in 2\mathbb{N} - 1 \\ \frac{\Delta^{m/2} Q_m(x)}{m!! n \cdots (n+m-2)} \omega_n, & m \in 2\mathbb{N} \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 4 из [7].

Лемма 1. Гармонические полиномы $R_{m-2k}(x)$ в разложении однородного полинома $Q_m(x)$ по формуле Альманси

$$Q_m(x) = R_m(x) + |x|^2 R_{m-2}(x) + \cdots + |x|^{2l} R_{m-2l}(x)$$

имеют вид

$$R_{m-2k}(x) = \frac{2m-4k+n-2}{(2,2)_k} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s} \Delta^{s+k} Q_m(x)}{(2,2)_s (2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+1}}$$

Из теоремы о среднем для гармонических функций и формулы Альманси следует, что

$$\int_{|x|=1} Q_m(x) ds_x = \int_{|x|=1} (R_m(x) + R_{m-2}(x) + \cdots + R_{m-2l}(x)) ds_x = \begin{cases} 0, & 2l < m \\ \omega_n R_0, & 2l = m \end{cases}$$

При нечетном m интеграл равен нулю так как $m-2l > 0$ и значит $R_{m-2l}(0) = 0$. При четном m , используя лемму 1 запишем ($s=0, k=m/2$)

$$\int_{|x|=1} Q_m(x) ds_x = \frac{n-2}{(2,2)_{m/2} (n-2,2)_{m/2+1}} \Delta^{m/2} Q_m(x) \omega_n = \frac{\Delta^{m/2} Q_m(x)}{m!! n \cdots (n+m-2)} \omega_n.$$

Теорема доказана.

В [6] формула Альманси обобщена на аналитические функции.

Следствие. Если $u(x)$ гармоническая в S и непрерывная в \bar{S} функция, то имеет место равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \bar{G}_{(\nu)}(\xi) u(\xi) ds_\xi = \frac{\Delta^{\nu_1} \bar{G}_{(\nu)}^2(x)}{(2\nu_1)!! (n,2)_{\nu_1}} \bar{G}_{(\nu)}(D) u(x)|_{x=0}, \quad (7)$$

где $\bar{G}_{(\nu)}(x) = G_{(\nu)}(x) / |G_{(\nu)}|_D$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что в обозначениях теоремы 5 и с помощью теоремы 6 ($m = 2\nu_1$) можно записать

$$g_\nu = |G_{(\nu)}|_{L_2}^2 / |G_{(\nu)}|_D^2 = |\bar{G}_{(\nu)}|_{L_2}^2 = \frac{\Delta^{\nu_1} \bar{G}_{(\nu)}^2(x)}{(2\nu_1)!! (n,2)_{\nu_1}} \omega_n. \quad (8)$$

Подставляя найденное значение константы g_ν в (5) и деля обе части полученного равенства на $|G_{(\nu)}|_D$ и ω_n получим (7). Следствие доказано.

Пример. Пусть $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в \bar{S} функция, тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \xi_i u(\xi) ds_\xi &= \frac{1}{n} u_{x_i}(0), & \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \xi_i \xi_j u(\xi) ds_\xi &= \frac{1}{n(n+2)} u_{x_i x_j}(0), \\ \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \xi_i^2 u(\xi) ds_\xi &= \frac{1}{n(n+2)} u_{x_i x_i}(0) + \frac{1}{n} u(0). \end{aligned}$$

1. Первую формулу нетрудно получить из (5). Если взять $\nu = e_1 + \cdots + e_{n-i+1}$, где $e_i = (\delta_{1,i}, \dots, \delta_{n,i})$, то получим

$$G_{(\nu)}(x) = G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(x_{(n)})G_{\nu_2-\nu_3}^{\nu_3}(x_{(n-1)}) \cdots G_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}^{\nu_{n-1}}(x_{(3)})H_{\nu_{n-1}}^{\nu_n}(x_{(2)}) = \\ = G_0^1(x_{(n)})G_0^1(x_{(n-1)}) \cdots G_1^0(x_{(i)}) \cdots G_0^0(x_{(3)})H_0^0(x_{(2)}) = x_i.$$

Так как

$$|x_i|_{L_2}^2 = \int_{|x|=1} x_i^2 ds_x = \frac{1}{n} \int_{|x|=1} (x_1^2 + \cdots + x_n^2) ds_x = \frac{\omega_n}{n},$$

и $|x_i|_D^2 = D_{x_i} x_i = 1$, то $g_\nu = |x_i|_{L_2}^2 / |x_i|_D^2 = \omega_n / n$ и значит первая формула верна

$$\int_{|\xi|=1} \xi_i u(\xi) ds_\xi = \frac{\omega_n}{n} D_{x_i} u(x)|_{x=0}.$$

II. Далее положим $\nu = 2e_1 + \cdots + 2e_{n-j+1} + e_{n-j+2} + \cdots + e_{n-i+1}$ если $i > j$. Тогда

$$G_{(\nu)}(x) = G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(x_{(n)})G_{\nu_2-\nu_3}^{\nu_3}(x_{(n-1)}) \cdots G_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}^{\nu_{n-1}}(x_{(3)})H_{\nu_{n-1}}^{\nu_n}(x_{(2)}) = \\ = G_0^2(x_{(n)})G_0^2(x_{(n-1)}) \cdots G_1^1(x_{(i)})G_0^1(x_{(i-1)}) \cdots G_0^1(x_{(j+1)})G_1^0(x_{(j)}) \cdots G_0^0(x_{(3)})H_0^0(x_{(2)}) = x_i x_j.$$

Для вычисления интеграла $|x_i x_j|_{L_2}^2 = \int_{|x|=1} x_i^2 x_j^2 ds_x$ воспользуемся формулой (6). Имеем

$Q_m(x) = x_i^2 x_j^2$, $m = 4$ и значит

$$\frac{\Delta^{m/2} Q_m(x)}{m!! n \cdots (n+m-2)} = \frac{1}{4!! (n, 2)_2} \Delta^2(x_i^2 x_j^2) = \frac{1}{8n(n+2)} \Delta(2x_i^2 + 2x_j^2) = \frac{1}{n(n+2)}.$$

Поэтому $\int_{|x|=1} x_i^2 x_j^2 ds_x = \frac{\omega_n}{n(n+2)}$. Так как $|x_i x_j|_D^2 = D_{x_i} D_{x_j} x_i x_j = 1$, то

$g_\nu = |x_i x_j|_{L_2}^2 / |x_i x_j|_D^2 = \omega_n / n(n+2)$ и значит вторая формула тоже верна

$$\int_{|\xi|=1} \xi_i \xi_j u(\xi) ds_\xi = \frac{\omega_n}{n(n+2)} D_{x_i} D_{x_j} u(x)|_{x=0}.$$

III. Для доказательства третьей формулы выберем $\nu = 2e_1$ и значит

$$G_{(\nu)}(x) = G_2^0(x_{(n)})G_0^0(x_{(n-1)}) \cdots H_0^0(x_{(2)}) = \frac{x_n^2}{2} - \frac{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{2(n-1)}.$$

Отсюда следует, что

$$G_{(\nu)}(x) = \frac{x_n^2}{2} - \frac{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{2(n-1)} = \frac{nx_n^2}{2(n-1)} - \frac{|x|^2}{2(n-1)},$$

или $x_n^2 = 2 \frac{n-1}{n} G_{(\nu)}(x) + \frac{1}{n} |x|^2$, а значит, используя формулу (5) и теорему о среднем запишем

$$\int_{|\xi|=1} \xi_n^2 u(\xi) ds_\xi = 2 \frac{n-1}{n} \int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi) u(\xi) ds_\xi + \frac{1}{n} \int_{|\xi|=1} u(\xi) ds_\xi = \\ = 2 \frac{n-1}{n} g_\nu G_{(\nu)}(D)u(x)|_{x=0} + \frac{\omega_n}{n} u(0) = g_\nu \left(2 \frac{n-1}{n} G_{(\nu)}(D) + \frac{1}{n} \Delta \right) u(x)|_{x=0} + \frac{\omega_n}{n} u(0) = \\ = g_\nu D_{x_n}^2 u(x)|_{x=0} + \frac{\omega_n}{n} u(0).$$

Вычислим g_ν . Нетрудно подсчитать, что $|G_{(\nu)}|_D^2 = G_{(\nu)}(D)G_{(\nu)}(x) = \frac{n}{2n-2}$, а значит по формуле (8) ($\nu_1 = 2$) запишем

$$\frac{g_\nu}{\omega_n} = \frac{2n-2}{8n(n, 2)_2} \Delta^2 G_{(\nu)}^2(x) = \frac{\Delta^2 (nx_n^2 - |x|^2)^2}{16n^2(n-1)(n+2)} = \frac{\Delta^2 (n^2 x_n^4 - 2nx_n^2 |x|^2 + |x|^4)}{16n^2(n-1)(n+2)} = \\ = \frac{24n^2 - 16n(n+2) + 8n(n+2)}{16n^2(n-1)(n+2)} = \frac{16n(n-1)}{16n^2(n-1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+2)}.$$

Подставляя вычисленное значение g_v в предыдущую формулу и деля на ω_n получим третью формулу при $i = n$. В силу симметрии эта формула будет верна и для любого $i = 1, \dots, n$.

Литература

1. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 27–38.
2. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of American Mathematical Society. – 1998. – V. 126, № 12. – P. 3513–3519.
3. Karachik, V.V. On some special polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of American Mathematical Society. – 2004. – V. 132, № 4. – P. 1049–1058.
4. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
5. Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 332 с.
6. Карачик, В.В. Об одном представлении аналитических функций гармоническими / В.В. Карачик // Математические труды. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 142–162.
7. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1674–1694.

ON ONE GENERALIZED MEAN THEOREM FOR HARMONIC FUNCTIONS

V.V. Karachik¹

Mean value on the unit sphere of a product of a harmonic function in the unit ball and a homogeneous polynomial is investigated.

Keywords: harmonic functions, mean theorem, harmonic polynomials.

References

1. Karachik V.V. Polinomial'nye resheniya differentsialnykh uravnenij v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koeffitsientami I [Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients I]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 27–38. (in Russ.).
2. Karachik V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proceedings of American Mathematical Society*. 1998. Vol. 126, no. 12. pp. 3513–3519.
3. Karachik V.V. On some special polynomials. *Proceedings of American Mathematical Society*, 2004. Vol. 132, no. 4. pp. 1049–1058.
4. Bicadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1976. 296 p.
5. Stejn I., Vejs G. *Vvedenie v garmonicheskij analiz na evklidovykh prostranstvakh* [Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces]. Moscow: Mir, 1974. 332 p. (in Russ.). [Stein E.M., Weiss G.L. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971. 297 p.]
6. Karachik V.V. *Matematicheskie trudy*. 2007. Vol. 10, no. 2. pp. 142–162.
7. Karachik V.V. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*. 2011. Vol. 51, no. 9. pp. 1674–1694. (in Russ.).

Поступила в редакцию 30 января 2013 г.

¹ Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis Department, South Ural State University.

E-mail: karachik@susu.ru