УДК 517.948.00

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫМ МЕТОДОМ ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Т.С. Камалтдинова[1]

Решена обратная граничная задача в предположении, что искомое решение является кусочно-гладкой функцией и найдены оценки сверху приближенного решения. Данные оценки значительно превосходят по точности известные оценки.

Ключевые слова: операторное уравнение, регуляризация, оптимальный метод, оценка погрешности, некорректная задача.

Введение

В работе [1] аналогичная задача решена, в предположении, что искомое граничное условие $h(t)$ принадлежит пространству $C^2[0,\infty)$, линейным методом проекционной регуляризации. При этом были получены точные по порядку оценки погрешности приближенного решения.

В статье [2] предполагалось, что решение $h(t)\in \bigcap\limits_{\varepsilon>0} W_2^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)}(-\infty,\infty)$ и использован нелинейный метод проекционной регуляризации к решению более простой задачи.

В настоящей работе, используя методику работы [2], решена обратная граничная задача при условии кусочной гладкости решения и найдена оценка погрешности приближенного решения.

Постановка прямой задачи и исследование применимости преобразований Фурье для нахождения решения

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2};\ 0<x<1,\ t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=0;\quad 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t)=h(t);\quad t\ge 0, \tag{3}$$

где $h(t)$ – кусочно-гладкая на полупрямой функция, имеющая конечное число точек разрыва первого рода производной $h'(t)$,

$$h(0)=0 \tag{4}$$

и существует число $t_0>0$ такое, что для любого $t\ge t_0$

$$h(t)=0; \tag{5}$$

$$u(1,t)=0;\quad t\ge 0. \tag{6}$$

Рассмотрим классическое решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3), (6), т.е. такое, что $u(x,t)\in C\big([0,1]\times[0,\infty)\big)\bigcap C^{2,1}\big((0,1)\times(0,\infty)\big)$.

Из теоремы, сформулированной в [3, с. 424] следует единственность классического решения $u(x,t)$. Перейдем к исследованию его существования и применимости к его определению преобразования Фурье по переменной t.

Теорема 1. Пусть $\Phi(t)\in C[0,\infty)$ и ограничена на этой полупрямой. Тогда справедливы соотношения:

---

[1] Камалтдинова Татьяна Сергеевна – старший преподаватель, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: KamaltdinovaTS@mail.ru

$$\int_0^\infty u'_x(x,t)\Phi(t)dt = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\infty u(x,t)\Phi(t)dt\right]$$

и

$$\int_0^\infty u''_{xx}(x,t)\Phi(t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int_0^\infty u(x,t)\Phi(t)dt\right].$$

Теорема 2. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1)–(3), (6). Тогда справедливы соотношения

$$\lim_{x\to 0}\int_0^\infty |u(x,t)-h(t)|dt = \lim_{x\to 1}\int_0^\infty |u(x,t)|dt = 0.$$

Постановка обратной граничной задачи

Обратная граничная задача заключается в том, что в постановке прямой задачи (1)–(6) граничное условие (3), определяемое функцией $h(t)$, не известно и подлежит определению, а вместо него в точке $x_1 \in (0,1)$, измеряется температура $f(t)$ стержня, соответствующая данному процессу

$$u(x_1,t) = f(t); \quad t \ge 0. \tag{7}$$

Сведение обратной задачи (1)–(2), (6)–(7) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

Пусть $Z \in L_2[0,\infty)$. Элемент $h(t) \in Z$ тогда и только тогда, когда

$$h(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) + \psi(t),$$

где

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \frac{a_j}{2}\left[(t-c_j)^2 - b^2{}_j\right]; c_j - b_j \le t \le c_j + b_j \\ 0; \qquad t < c_j - b_j, t > c_j + b_j \end{cases},$$

$a_j, b_j, c_j > 0, \quad c_j \ge b_j$ и $c_j \ne c_k$ при $j \ne k$, а $\psi(t) \in W_2^{3/2}[0,\infty)$.

Тогда предположим, что при $f(t) = f_0(t)$, участвующем в условии (7), существует функция $h_0(t)$, принадлежащая множеству Z, но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in L_2[0,\infty) \cap L_1[0,\infty)$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \le \delta. \tag{8}$$

Требуется, используя $f_\delta, \delta,$ и Z, определить приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1)–(2), (6)–(8) и оценить уклонение $\|h_\delta - h_0\|_{L_2}$ приближенного решения $h_\delta(t)$ от точного $h_0(t)$.

Пусть $\bar{H} = L_2[0,\infty) + iL_2[0,\infty)$ – пространство над полем комплексных чисел, а F – оператор, отображающий $L_2[0,\infty) \cap L_1[0,\infty)$ в $\bar{H}$ и определяемый формулой

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty h(t)e^{-i\tau t}dt; \tau \ge 0. \tag{9}$$

Лемма 1. Оператор F, определяемый формулой (9), изометричен.

Доказательство см. [1].

Из теорем 1 и 2 следует применимость преобразований Фурье к решению обратной граничной задачи (1)–(2), (6)–(8).

Таким образом, сведем эту задачу к следующей:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(x,\tau)}{\partial x^2} = i\tau\hat{u}(x,\tau); x \in (0,1), \tau \ge 0, \tag{10}$$

где $\hat{u}(x,\tau)=F\left[u(x,t)\right]$.

Из (6)–(7) следует, что

$$\hat{u}(1,\tau)=0;\quad \tau\ge 0 \tag{11}$$

и

$$\hat{u}(x_1,\tau)=\hat{f}(\tau);\quad \tau\ge 0, \tag{12}$$

где $\hat{f}(\tau)=F\left[f(t)\right]$.

Из теоремы 2 следует, что решение $\hat{u}(x,\tau)$ задачи (10)–(12) непрерывно в полосе $[0,1]\times[0,\infty)$. При этом решение уравнения (10) имеет вид

$$\hat{u}(x,t)=A(\tau)e^{\mu_0 x\sqrt{\tau}}+B(\tau)e^{-\mu_0 x\sqrt{\tau}}, \tag{13}$$

где $\mu_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, а $A(\tau)$ и $B(\tau)$ – произвольные функции.

Из (11)–(13) следует, что

$$\hat{h}(\tau)=\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\hat{f}(\tau),\quad \tau\ge 0. \tag{14}$$

Предположим, что $x_1\le\frac{1}{2}$, а $\tau\in[0,2]$.

Так как

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\right|^2=\frac{\operatorname{ch}\sqrt{2\tau}-\cos\sqrt{2\tau}}{\operatorname{ch}(1-x_1)\sqrt{2\tau}-\cos(1-x_1)\sqrt{2\tau}}, \tag{15}$$

то из (15) следует, что

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\right|^2=\frac{\operatorname{ch}\lambda-\cos\lambda}{\operatorname{ch}(1-x_1)\lambda-\cos(1-x_1)\lambda}, \tag{16}$$

где $\lambda=\sqrt{2\tau}$.

Таким образом, из (16) следует, что

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\right|\le\sqrt{\frac{2\left(e^2+1\right)}{e-2}}\quad 0\le\tau\le 2. \tag{17}$$

Теперь оценим функцию $\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\right|$ при $\tau\ge 2$.

Так как $\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\right|=\frac{\sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{2\tau}-\cos\sqrt{2\tau}}}{\sqrt{\operatorname{ch}(1-x_1)\sqrt{2\tau}-\cos(1-x_1)\sqrt{2\tau}}}\le\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\tau}{2}}}{\operatorname{sh}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}\le\frac{2e^{\sqrt{\frac{\tau}{2}}}}{e^{(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}-e^{-(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}}$,

то, учитывая, что $x_1\le\frac{1}{2}$, $\tau\ge 2$, а $2\le e\le e^{2(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}$, получаем

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\right|\le 4e^{x_1\sqrt{\frac{\tau}{2}}}\quad \tau\ge 2. \tag{18}$$

Так как

$$\sqrt{\frac{2\left(e^2+1\right)}{e-2}}>4,$$

то из (17) и (18) получим соотношение на всей полупрямой

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\right| \le ae^{x_1\sqrt{\frac{\tau}{2}}}, \quad \tau \ge 0, \tag{19}$$

где

$$a=\sqrt{\frac{2\left(e^2+1\right)}{e-2}}. \tag{20}$$

Решение задачи вычисления значений неограниченного оператора (14) нелинейным методом проекционной регуляризации

Из предыдущего пункта следует, что обратную граничную задачу (1)–(2), (6)–(7) можно свести к задаче вычисления значений неограниченного оператора T, действующего из пространства $L_2[0,\infty)$ в $L_2[0,\infty)$ и определяемого формулой

$$T\hat{f}(\tau)=\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}(1-x_1)\mu_0\sqrt{\tau}}\hat{f}(\tau), \quad \tau \ge 0, \tag{21}$$

где $\mu_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\hat{f}, T\hat{f} \in \bar{H}$.

Тогда задачу (14) можно переписать следующим образом:

$$\hat{h}(\tau)=T\hat{f}(\tau); \quad \tau \ge 0. \tag{22}$$

Обозначим через $\hat{Z}$ множество функций из $L_2[0,\infty)$, определяемое соотношением

$$\hat{Z}=F[Z], \tag{23}$$

где оператор F определен формулой (9), и поставим задачу (22) вычисления значений неограниченного оператора T следующим образом.

Предположим, что при $\hat{f}(\tau)=\hat{f}_0(\tau)$ существует элемент $\hat{h}_0(\tau)\in\hat{Z}$, но точное значение $\hat{f}_0(\tau)$ нам не известно, а вместо него даны $\hat{f}_\delta(\tau)\in\bar{H}$ и $\delta>0$ такие, что

$$\left\|\hat{f}_\delta(\tau)-\hat{f}_0(\tau)\right\|\le\delta. \tag{24}$$

Требуется, используя исходную информацию $\hat{f}_\delta(\tau)$ и δ, определить приближенное значение $\hat{h}_\delta(\tau)$ и, учитывая принадлежность $\hat{h}_0(\tau)$ множеству $\hat{Z}$, оценить величину уклонения $\left\|\hat{h}_\delta(\tau)-\hat{h}_0(\tau)\right\|$.

Для решения поставленной задачи введем регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha : \alpha \ge 0\}$, определяемое следующим образом:

$$T_\alpha\hat{f}(\tau)=\begin{cases} T\hat{f}(\tau); \tau\le\alpha \\ 0; \quad \tau>\alpha \end{cases}, \quad \alpha>0, \tag{25}$$

где оператор T определен формулой (21).

Таким образом, приближенное значение $\hat{h}_\delta^\alpha(\tau)$ неограниченного оператора T определим формулой

$$\hat{h}_\delta^\alpha=T_\alpha\hat{f}_\delta(\tau), \tag{26}$$

в которой оператор T_α определен (25). Параметр $\alpha=\alpha\left(\hat{f}_\delta,\delta\right)$ в формуле (26) определим из уравнения

$$\left\|T^{-1}\hat{h}_\delta^\alpha(\tau)-\hat{f}_\delta(\tau)\right\|^2=9\delta^2. \tag{27}$$

Аналогично, как это сделано в лемме 1 из [4], можно показать, что невязка $\left\|T^{-1}\hat{h}_\delta^\alpha(\tau)-\hat{f}_\delta(\tau)\right\|^2\in C[0,\infty)$ не убывает по α, а также стремится к $\left\|\hat{f}_\delta\right\|^2$ при $\alpha\to\infty$ и к нулю при $\alpha \to 0$. Из того, что $\left\|\hat{f}_\delta\right\|^2 > 9\delta^2$ следует разрешимость уравнения (27). Заметим, что в случае неединственности, решения уравнения (27) совпадают с отрезком $[\alpha_1, \alpha_2]$ и для любого $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ $\hat{h}_\delta^\alpha = \hat{h}_\delta^{\alpha_1}$. Потому среди всех решений выберем минимальное. Из непрерывности спектра оператора T следует существование минимального из решений уравнения (27).

Таким образом, приближенные значения $\hat{h}_\delta(\tau)$ задачи (22), (24) определим формулой

$$\hat{h}_\delta(\tau) = pr\left[\hat{h}_\delta^{\alpha(\hat{f}_\delta,\delta)}(\tau); H_0\right], \tag{28}$$

где $H_0 = F\left[L_2[0,\infty)\right]$.

Оценка погрешности $\left\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\right\|$ приближенного решения $\hat{h}_\delta$ задачи (22), (24)

Перейдем к оценке уклонения $\left\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\right\|$ приближенного значения $\hat{h}_\delta(\tau)$ от точного $\hat{h}_0(\tau)$. Так как $\hat{h}_0(\tau) \in \hat{Z}$, то на основании (23) существует число $c > 0$ такое, что для любого $\tau \ge 0$ справедливо соотношение

$$\left|\hat{h}_0(\tau)\right| \le \frac{c}{\sqrt{1+\tau^4}}. \tag{29}$$

Из (29) следует существование числа $d > 0$ такого, что для любого $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$\int_0^\infty \left[1 + \tau^{3(1-\varepsilon)}\right] \left|\hat{h}_0(\tau)\right|^2 d\tau \le \frac{d}{\varepsilon}. \tag{30}$$

Так как

$$\hat{h}_0(\tau) \in H_0, \tag{31}$$

то на основании теоремы, доказанной в [2], и соотношений (28), (31) следует, что

$$\left\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\right\| \le 6\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} G_\varepsilon\left[\bar{\alpha}(\delta,\varepsilon)\right], \tag{32}$$

где функция $G_\varepsilon(\sigma)$, следуя (14), (19), (20) и (30) определена параметрически:

$$\sigma = ae^{x_1\sqrt{\frac{\tau}{2}}}, \quad G_\varepsilon(\tau) = \left[1 + \tau^{3(1-\varepsilon)}\right]^{-\frac{1}{2}}; \quad \tau \ge 0, \tag{33}$$

а $\bar{\alpha}(\delta,\varepsilon)$ определена уравнением

$$\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} \frac{G_\varepsilon(\alpha)}{\alpha} = \delta. \tag{34}$$

Так как оценка (32) выполняется при любом $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, то выберем значение $\bar{\varepsilon}(\delta)$, минимизирующее эту оценку, то есть

$$6\sqrt{\frac{d}{\bar{\varepsilon}(\delta)}} G_{\bar{\varepsilon}(\delta)}\left[\bar{\alpha}(\delta, \bar{\varepsilon}(\delta))\right] = \min_{\varepsilon \in \left(0, 1/2\right]} 6\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} G_\varepsilon\left[\bar{\alpha}(\delta,\varepsilon)\right]. \tag{35}$$

Из (32)–(35) для $\hat{h}_\delta(\tau)$ будет справедлива оценка

$$\left\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\right\| \le 6\sqrt{\frac{d}{\bar{\varepsilon}(\delta)}} G_{\bar{\varepsilon}(\delta)}\left[\bar{\alpha}(\delta, \bar{\varepsilon}(\delta))\right]. \tag{36}$$

Упростив оценку (36), выразим ее в элементарных функциях. Для этого заметим, что при $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$G_\varepsilon(\sigma) = \left[1 + \left(\frac{2}{x_1^2}\right)^{3(1-\varepsilon)} \ln^{6(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Из (37) следует, что при $\sigma > a$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$G_\varepsilon(\sigma) \le \left[\frac{x_1^2}{2}\right]^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right). \tag{38}$$

Из (37) и (38) следует, что при $\sigma > a$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{G_\varepsilon(\sigma)}{\left[\frac{x_1^2}{2}\right]^{3/2(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right)} = 1, \tag{39}$$

а из (37) и (39) следует существование $\sigma_1 > a$ такого, что для любого $\sigma \ge \sigma_1$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$G_\varepsilon(\sigma) \ge \left[\frac{x_1}{2}\right]^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right). \tag{40}$$

Из того, что $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \dfrac{\sigma^{-1}}{\left[\frac{x_1}{2}\right]^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right)} = 0$ следует существование числа $\sigma_2 > \sigma_1$ такого, что при $\sigma > \sigma_2$

$$\sigma < \left[\frac{x_1}{2}\right]^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right),$$

а из последнего соотношения и (40), что для любого $\sigma > \sigma_2$

$$\frac{1}{\sigma^2} < \frac{1}{\sigma} G_\varepsilon(\sigma). \tag{41}$$

Пусть $\bar{\alpha}(\delta,\varepsilon)$ определено уравнением (34), а $\hat{\alpha}(\delta,\varepsilon)$

$$\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}}\alpha^{-2} = \delta. \tag{42}$$

Из (42) следует, что

$$\hat{\alpha}(\delta,\varepsilon) = \sqrt[4]{\frac{d}{\varepsilon\delta^2}}. \tag{43}$$

Из (34), (41) и (42) следует, что

$$\hat{\alpha}(\delta,\varepsilon) \le \bar{\alpha}(\delta,\varepsilon). \tag{44}$$

Таким образом, из (32), (38) и (44) следует существование числа $\delta_0 > 0$ такого, что для любого $\delta \in (0, \delta_0)$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$\left\|\hat{h}_\delta(\tau)-\hat{h}_0(\tau)\right\|^2 \le 36\frac{d}{\varepsilon}\left[\frac{x_1}{2}\right]^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\hat{\alpha}(\delta,\varepsilon)}{a}\right). \tag{45}$$

Из (44) и (45) следует, что при $\delta\in(0,\delta_0)$ и $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$

$$\left\|\hat{h}_\delta(\tau)-\hat{h}_0(\tau)\right\|^2 \le 36\frac{d}{\varepsilon}x_1^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{1}{a}\sqrt[4]{\frac{d}{\varepsilon\delta^2}}\right). \tag{46}$$

Пусть

$$\varepsilon(\delta)=\frac{1}{\ln\ln 1/\delta},$$

тогда из (46) следует, что

$$\left\|\hat{h}_\delta(\tau)-\hat{h}_0(\tau)\right\|^2 \le 36\, d\ln\ln\frac{1}{\delta}\ln^{-3}\left(\sqrt[4]{\frac{d}{a^4\varepsilon(\delta)\delta^2}}\right)\left[\ln^{\varepsilon(\delta)}\left(\sqrt[4]{\frac{d\delta^2}{a^4\varepsilon(\delta)\delta^4}}\right)\right]^3. \tag{47}$$

Предположим, что число $\delta_1>\delta_0$ определено соотношением

$$\frac{\delta_1^2 d}{a^4}\ln\ln\frac{1}{\delta_1}<1.$$

Тогда при $\delta\in(0,\delta_1)$ из (47)

$$\left\|\hat{h}_\delta(\tau)-\hat{h}_0(\tau)\right\|^2 \le 36d\ln\ln\frac{1}{\delta}\ln^{-3}\left(\sqrt[4]{\frac{d\ln\ln 1/\delta}{a^4\delta^2}}\right)\left[\ln^{\varepsilon(\delta)}\frac{1}{\delta}\right]^3. \tag{48}$$

Так как при $\delta\in(0,\delta_1)$

$$\ln\ln^{\varepsilon(\delta)}\left(\frac{1}{\delta}\right)=\frac{1}{\ln\ln\frac{1}{\delta}}\ln\ln\frac{1}{\delta}=1, \tag{49}$$

то из (49) следует, что

$$\left[\ln^{\varepsilon(\delta)}\left(\frac{1}{\delta}\right)\right]^3=e^3, \tag{50}$$

а из (48) и (50), что

$$\left\|\hat{h}_\delta(\tau)-\hat{h}_0(\tau)\right\|^2 \le 36\, d\, e^3\ln\ln\frac{1}{\delta}\ln^{-3}\left(\sqrt[4]{\frac{d\ln\ln 1/\delta}{a^4\delta^2}}\right). \tag{51}$$

Предположим, что $\delta_2<\delta_1$ и $\ln\ln\frac{1}{\delta_2}>\frac{a^4}{d}$, тогда при $\delta\in(0,\delta_2)$

$$\frac{d\quad \ln\ln\frac{1}{\delta}}{a^4\quad \delta^2}>\frac{1}{\delta^2}. \tag{52}$$

Таким образом, из (51) и (52) следует, что при $\delta\in(0,\delta_2)$

$$\left\|\hat{h}_\delta(\tau)-\hat{h}_0(\tau)\right\|^2 \le 36\, d\, e^3\ln\ln\frac{1}{\delta}\ln^{-3}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right). \tag{53}$$

Из (53) следует, что при $\delta\in(0,\delta_2)$ справедливо соотношение

$$\left\|\hat{h}_\delta(\tau)-\hat{h}_0(\tau)\right\| \le 17\sqrt{d\, e^3}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}\ln^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Литература

1. Танана, В.П. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной граничной задачи тепловой диагностики / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Труды ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 238–252.
2. Танана, В.П. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций / В.П. Танана, А.Б. Бредихина, Т.С. Камалтдинова // Труды ИММ УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 1. – С. 281–288.
3. Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
4. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 353–368.

APPROXIMATE SOLUTION OF INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR THE HEAT CONDUCTIVITY EQUATION BY NONLINEAR METHOD OF PROJECTION REGULARITY

T.S. Kamaltdinova[1]

Inverse boundary problem is solved in the hypothesis that the required solution is a piecewise smooth function, estimates of above approximate solution are given. The estimates are considerably superior to the known estimates by the accuracy.

Keywords: operator equation, regularity, optimal method, error estimation, ill-posed problem.

References

1. Tanana V.P., Sidikova A.I. O garantirovannoj ocenke tochnosti priblizhennogo resheniya odnoj obratnoj granichnoj zadachi teplovoj diagnostiki [On the guaranteed accuracy estimate of an approximate solution of one inverse problem of thermal diagnostics]. *Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki URO RAN.* 2010. Vol. 16, no. 2. pp. 238–252. (in Russ.).
2. Tanana V.P., Bredikhina A.B., Kamaltdinova T.S. *Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki URO RAN.* 2012. Vol. 18, no. 1. pp. 281–288. (in Russ.).
3. Mikhlin S.G. Kurs matematicheskoj fiziki [Course of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1968. 576 p. (in Russ.).
4. Tanana V.P., Yaparova N.M. Ob optimal'nom po poryadku metode resheniya uslovno-korrektnykh zadach [The optimum in order method of solving conditionally-correct problems]. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* 2006. Vol. 9, no. 4. pp.353–368. (in Russ.).

Поступила в редакцию 29 ноября 2012 г.

[1] Kamaltdinova Tatyana Sergeevna is a Senior Lecturer, Numerical Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: KamaltdinovaTS@mail.ru