УДК 517.977.58

МЕТОД ПРИГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

А.А. Зимовец[2]

Приводится описание метода приграничного слоя, предназначенного для приближенного построения множеств достижимости некоторой динамической системы в *n*-мерном евклидовом пространстве при наличии фазовых ограничений. Предложенный метод относится к классу сеточных методов и использует подход, при котором в ходе итерационного процесса используются не все точки уже построенных множеств, а лишь точки из их приграничных слоев. Такой подход дает существенный выигрыш во времени счета по сравнению с классическими сеточными методами.

Ключевые слова: управляемая система, дифференциальное включение, множество достижимости, сеточный метод.

Введение

Представленная работа посвящена разработке эффективного численного метода построения множеств достижимости в задачах управления динамическими системами. Задача построения множеств достижимости возникает, прежде всего, в теории оптимального управления, а также в робототехнике, в экономике и т.д. Одной из трудноредшаемых проблем, с которой сталкиваются математики при разработке алгоритмов численного построения множеств достижимости, является проблема их быстродействия. Дело в том, что численные методы базируются как на дискретном представлении времени, так и, в случае сеточных методов, на дискретном представлении пространства. При этом, чтобы вычислять множества достижимости динамических систем с приемлемой точностью, необходимо уменьшать данные дискреты до достаточно малых величин. Это приводит к быстрому росту количества обсчитываемых точек и, как следствие, к росту времени вычислений на рабочих ЭВМ. В связи с этим особенно актуальными стали методы, которые позволяют существенно сократить время вычислений. Одним из таких методов является предложенный в данной работе метод приграничного слоя, являющийся дальнейшим развитием идей и подходов, описанных в работах [1–6].

Постановка задачи

В работе рассматривается некоторая динамическая система, чья динамика описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = f(t,x,u)\,,\ t \in [t_0, \vartheta]\,,\ u \in P\,, \tag{1}$$

где x – n-мерный фазовый вектор системы в евклидовом пространстве R^n, u – вектор управляющих воздействий, P – компакт в евклидовом пространстве R^p.

Будем считать, что для системы (1) выполнены следующие условия.

Условие А. Вектор-функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных (t,x,u) в области $[t_0,\vartheta]\times R^n \times P$, а также для любой ограниченной замкнутой области $D \subset [t_0,\vartheta]\times R^n$ существует такая константа $L = L(D) \in (0,\infty)$, что

$$\left\| f(t,x^*,u) - f(t,x_*,u) \right\| \le L \left\| x^* - x_* \right\|$$

для всех $(t,x,u) \in D \times P$.

Условие В. Существует такая константа $\mu \in (0,\infty)$, что

$$\left\| f(t,x,u) \right\| \le \mu\left(1 + \|x\|\right)$$

[1] Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002), а также при поддержке гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ № НШ-5927.2012.1.

[2] Зимовец Артем Анатольевич – старший преподаватель, кафедра информационных технологий, Институт радиоэлектроники и информационных технологий – РТФ, Уральский федеральный университет. E-mail: aazimovets@gmail.com

для всех $(t,x,u)\in[t_0,\vartheta]\times R^n\times P$.

На систему (1) наложено фазовое ограничение $\Phi\subset[t_0,\vartheta]\times R^n$, имеющее в каждый момент времени $t\in[t_0,\vartheta]$ непустые сечения $\Phi(t)$ и удовлетворяющее условию C.

Условие C. Выполняется неравенство

$$\sup_{t_*,t^* \text{ из } [t_0,\vartheta]:\ \left|t_*-t^*\right|\le\rho} d\left(\Phi(t_*),\Phi(t^*)\right)\le\chi(\rho),$$

где $\chi(\rho)$ – монотонно убывающая при $\rho\downarrow 0$ функция, удовлетворяющая предельному соотношению $\lim\limits_{\rho\downarrow 0}\chi(\rho)=0$. Это условие не позволяет множеству Φ (а точнее его сечениям $\Phi(t)$) изменяться скачкообразно с изменением t. Кроме фазового ограничения для системы (1) задано множество стартовых позиций $X_0\neq\varnothing$: $X_0\subset\Phi(t_0)$.

Определение 1. Множеством достижимости $Y(t^*,t_*,x_*)$ в момент времени t^* системы (1), чья динамика стеснена фазовым ограничением Φ, с начальным условием $x(t_*)=x_*$ будем называть множество всех точек $x^*\in R^n$, для которых существует решение $x(t)$ системы (1), порожденное допустимым управлением $u(t)$, такое, что $x(t_*)=x_*$, $x(t^*)=x^*$ и $x(t)\in\Phi(t)$ при всех $t\in[t_*,t^*]$.

Под допустимым управлением $u(t)$ будем понимать любую измеримую по Лебегу функцию $u(t)$, удовлетворяющую включению $u(t)\in P$, $t\in[t_0,\vartheta]$.

Обозначим

$$Y(t^*,t_*,X_*)=\bigcup_{x_*\in X_*}Y(t^*,t_*,x_*),\ X_*\in R^n.$$

Задача 1. Необходимо построить множество достижимости $Y(\vartheta,t_0,X_0)$ системы (1), чья динамика стеснена фазовым ограничением Φ.

Помимо системы (1) будем рассматривать дифференциальные включения (д.в.)

$$\dot{x}\in F(t,x),\ t\in[t_0,\vartheta], \tag{2}$$

где $F(t,x)=co\{f(t,x,u):u\in P\}$ – выпуклая оболочка множества $\{f(t,x,u):u\in P\}$ в R^n.

Определение 2. Множеством достижимости $X(t^*,t_*,x_*)$ в момент времени t^* д.в. (2), чья динамика стеснена фазовым ограничением Φ, с начальным условием $x(t_*)=x_*$ будем называть множество всех точек $x^*\in R^n$, для которых существует решение $x(t)$ д.в. (2), такое, что $x(t_*)=x_*$, $x(t^*)=x^*$ и $x(t)\in\Phi(t)$ при всех $t\in[t_*,t^*]$.

Обозначим

$$X(t^*,t_*,X_*)=\bigcup_{x_*\in X_*}X(t^*,t_*,x_*),\ X_*\in R^n.$$

Можно показать, что множества достижимости $Y(t^*,t_0,x_0)$ и $X(t^*,t_0,x_0)$ системы (1) и д.в. (2) соответственно связаны соотношением

$$X(t^*,t_0,x_0)=clY(t^*,t_0,x_0),\ t\in[t_0,\vartheta],$$

где $clY(t^*,t_0,x_0)$ – замыкание множества $Y(t^*,t_0,x_0)$ в R^n.

Приближенное построение множеств достижимости с помощью метода Эйлера

Получение точного аналитического решения поставленной задачи представляется возможным далеко не всегда, поэтому значительное развитие получили численные методы приближенного решения задачи, среди которых можно выделить класс методов, называемых сеточными методами. Основная идея этих методов состоит в том, что в фазовом пространстве R^n вводится «кубическая» сетка Λ_h с шагом h, один из узлов которой совмещен с началом координат, а на промежутке времени $[t_0,\vartheta]$ вводится конечное разбиение $\Gamma=\{t_0,t_1,\ldots,t_N=\vartheta\}$, $N<\infty$ с диаметром разбиения $\Delta = \max\limits_{i=0,N-1} \Delta_i$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, $i = \overline{0, N-1}$ и затем последовательно, шаг за шагом, строятся аппроксимации множеств достижимости д.в. (2), состоящие из конечного числа узлов X_i^h, $i = \overline{0, N}$ сетки Λ_h, сходящиеся в хаусдорфовой метрике с уменьшением шага h и диаметра Δ к множествам достижимости $X(t_i, t_0, X_0)$. Для простоты будем считать, что разбиение Γ равномерно, т.е. $\Delta_i = \Delta$, $i = \overline{0, N-1}$.

Для более детального описания сеточных методов введем отображение $\Lambda^n(X, \delta_n)$ ставящее в соответствие каждой точке x из $X \subset R^n$ ближайший к ней узел сетки Λ_{δ_n} в R^n с шагом δ_n, и отображение $\Lambda^p(P, \delta_p)$, ставящее в соответствие каждой точке u из $P \subset R^p$ ближайший к ней узел сетки Λ_{δ_p} в R^p с шагом δ_p. В случае ограниченности множеств X и P данные операции позволяют перейти от бесконечных наборов точек к конечным и реализовать приближенные вычисления на ЭВМ.

Поставим в соответствие стартовому множеству X_0 и множеству управляющих воздействий P с помощью отображений Λ^n и Λ^p соответственно множества $X_0^h = \Lambda^n(X_0, h)$ и $P^{\delta_p} = \Lambda^p(P, \delta_p)$, где $\delta_p = \delta_p(\Delta)$, $\delta_p(\Delta)$ – некоторая положительная функция переменной $\Delta > 0$, монотонно убывающая к нулю при $\Delta \to 0$. Далее введем обозначение

$$F^{\delta_p}(t,x) = co\left\{ f(t,x,u) : u \in P^{\delta_p} \right\}, \ (t,x) \in [t_0, \vartheta] \times R^n. \tag{3}$$

Сопоставим каждой точке $(t,x) \in [t_0, \vartheta] \times R^n$ множество

$$\hat{F}(t,x) = \Lambda^n\left(F^{\delta_p}(t,x), \delta_n \right), \tag{4}$$

где $\delta_n = h/\Delta$. В соответствии с (3)–(4) можем записать

$$d\left(F(t,x), \hat{F}(t,x) \right) \le d\left(F(t,x), F^{\delta_p}(t,x) \right) + d\left(F^{\delta_p}(t,x), \hat{F}(t,x) \right), \tag{5}$$

где

$$d\left(F^{\delta_p}(t,x), \hat{F}(t,x) \right) \le \delta_n \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Из соотношения (5) и условия непрерывности функции $f(t,x,u)$ по совокупности переменных (t,x,u) на любой ограниченной замкнутой области D следует, что существует такая монотонная функция $\varphi^*(\delta)$ переменной $\delta = (\delta_n, \delta_p)$ ($\varphi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\|\delta\| \downarrow 0$), что $d\left(F(t,x), \hat{F}(t,x) \right) \le \varphi^*(\delta)$ при любых $(t,x) \in D$.

Предположим, что мы построили множество $X_i^h = \left\{ x_1^i, x_2^i, \dots x_{N_i}^i \right\}$. Тогда опишем один из простейших сеточных методов построения множества X_{i+1}^h по X_i^h.

1. Вычисление для каждой точки $x_j^i \in X_i^h$, $j = \overline{1, N_i}$ с помощью метода Эйлера множества $\hat{X}(t_{i+1}, t_i, x_j^i)$:

$$\hat{X}(t_{i+1}, t_i, x_j^i) = x_j^i + \Delta \hat{F}(t_i, x_j^i). \tag{6}$$

2. Объединение всех полученных множеств $\hat{X}(t_{i+1}, t_i, x_j^i)$ в множество

$$\hat{X}(t_{i+1}, t_i, X_i^h) = \bigcup_{x_j^i \in X_i^h} \hat{X}(t_{i+1}, t_i, x_j^i).$$

3. Построение пересечения множества $\hat{X}(t_{i+1}, t_i, X_i^h)$ с сечением $\Phi(t_{i+1})$ фазового ограничения Φ:

$$X_{i+1}^h = \hat{X}(t_{i+1}, t_i, X_i^h) \cap \Phi(t_{i+1}).$$

Данный метод будем называть методом «грубой силы», поскольку для расчета X_{i+1}^h рассматриваются все точки x_j^i из X_i^h. Следует отметить, что при выборе $\delta_n = h/\Delta$ точки множества $\hat{X}(t_{i+1}, t_i, X_i^h)$ будут совпадать с узлами сетки Λ_h. Из результатов работы [3] следует, что при выборе шага $h = h(\Delta)$, где $h(\Delta) = \Delta h^*(\Delta)$, $h^*(\Delta)$ – некоторая положительная функция переменной $\Delta > 0$, монотонно убывающая к нулю при $\Delta \to 0$, построенные таким образом множества X_i^h, $i = \overline{0, N}$ сходятся в хаусдорфовой метрике к соответствующим множествам достижимости $X(t_i, t_0, X_0)$ д.в. (2) при $\Delta \to 0$.

Метод приграничного слоя

Основной недостаток метода «грубой силы» состоит в том, что для построения множества достижимости с приемлемой точностью требуется очень большой объем вычислений, существенно увеличивающийся с уменьшением шага сетки h и диаметра разбиения Δ. С целью сокращения времени счета в ряде исследований, например [5, 6], были предложены подходы, позволяющие при соблюдении определенных условий построить множества X_{i+1}^h, сходящиеся к соответствующим множествам достижимости $X(t_{i+1}, t_0, X_0)$, без полного перебора точек $x_j^i \in X_i^h$. Для описания этих методов введем ряд определений.

Определение 3. Ячейкой Ξ сетки Λ_h будем называть множество точек, расположенных в узлах сетки Λ_h, составляющих вершины n-мерного куба с ребрами длиной h, ориентированными по осям соответствующей декартовой системы координат.

Пусть y_* – некоторый узел сетки Λ_h. Тогда символом $\Xi(y_*)$ будем обозначать множество ячеек сетки Λ_h, содержащих узел y_*.

Определение 4. Соседними узлами сетки Λ_h будем называть узлы, которые расположены в одной ячейке сетки Λ_h. Два соседних узла сетки Λ_h будем называть непосредственными соседями, если соединяющая их прямая параллельна одной из осей координат.

Пусть $X^h \subset \Lambda_h$ – некоторое множество точек, состоящее из узлов сетки Λ_h.

Определение 5. Точку $x^h \in X^h$ будем называть внутренней точкой множества X^h, если все ее непосредственные соседи также принадлежат множеству X^h.

Определение 6. Точку $x^h \in X^h$ будем называть граничной точкой множества X^h, если у нее есть хотя бы один непосредственный сосед, не принадлежащий множеству X^h.

Определение 7. Множество всех граничных точек множества X^h будем называть границей множества X^h и обозначать ∂X^h.

Основная идея методов, предложенных в исследованиях [5, 6], состоит в построении границы множества X_{i+1}^h с использованием лишь граничных точек множества X_i^h и дальнейшем заполнении области, ограниченной построенными граничными точками. Существенное ускорение в этих методах достигается за счет того, что алгоритм заполнения работает во много раз быстрее непосредственных вычислений точек x_j^{i+1} с использованием формулы (6).

Однако на практике при выполнении вычислений с помощью изложенного выше подхода зачастую возникает ряд проблем, среди которых можно выделить проблему рассеивания облаков точек, получающихся путем расчетов с использованием формулы (6), и проблему существенного изменения структуры границы с течением времени. Эти и другие проблемы были причинами того, что в предыдущих исследованиях (например, в [5]) не всегда корректно удавалось строить множества достижимости. В частности, при переходе к рассмотрению границы множеств достижимости терялась информация о так называемых дырах внутри множеств. В ряде случаев потеря информации о дырах была недопустима. Кроме того, выделение границы множества, представляющего из себя рассеянный набор точек, представляется нетривиальной задачей.

Для решения описанных выше проблем в представленной работе при построении границы множества X_{i+1}^h предлагается использовать не только граничные точки множества X_i^h, но и точки приграничного слоя. При этом проблема рассеивания облаков точек будет решаться путем построения выпуклой оболочки облаков, выбираемых по определенному правилу, а проблема существенного изменения структуры границы будет решаться путем построения процедуры выделения граничных точек, основанной на рассмотрении не только границы, но и приграничного слоя точек множества X_i^h.

Пусть $\partial_\varepsilon X_i^h$ – приграничный слой множества X_i^h толщины ε, определяемый соотношением

$$\partial_\varepsilon X_i^h = X_i^h \cap (X_i^h)_\varepsilon,$$

где $(X_i^h)_\varepsilon$ – множество узлов сетки Λ_h, расположенных в ε-окрестности границы множества X_i^h. Тогда процедура построения множества X_{i+1}^h по X_i^h состоит из следующих этапов.

1. Выделение приграничного слоя $\partial_{\varepsilon_i^*} X_i^h$ толщины $\varepsilon_i^* = 2\varepsilon_i$ множества X_i^h, где параметр ε_i определяется на основе вида системы (1).

2. Построение множества $X_{\varepsilon_i^*}^\Xi = \Lambda^n\left(\tilde{X}^\Xi(t_{i+1}, t_i, \partial_{\varepsilon_i^*} X_i^h), h\right)$, где

$$\tilde{X}^\Xi(t_{i+1}, t_i, \partial_{\varepsilon_i^*} X_i^h) = \bigcup_{x^h \in \partial_{\varepsilon_i^*} X_i^h} \tilde{X}^\Xi(t_{i+1}, t_i, x^h), \tag{7}$$

$$\tilde{X}^\Xi(t_{i+1}, t_i, x^h) = \bigcup_{\Xi \in \Xi(x^h)} co\hat{X}(t_{i+1}, t_i, \Xi \cap \partial_{\varepsilon_i^*} X_i^h). \tag{8}$$

3. Выделение границы $\partial X_{\varepsilon_i^*}^\Xi$ множества $X_{\varepsilon_i^*}^\Xi$.

4. Выделение внешнего приграничного слоя $\partial^h X_{\varepsilon_i^*}^\Xi = \Lambda^n\left((\partial X_{\varepsilon_i^*}^\Xi)_h \setminus X_{\varepsilon_i^*}^\Xi, h\right)$ толщины h множества $X_{\varepsilon_i^*}^\Xi$.

5. Выделение множества точек $S_{i+1} \subset \partial X_{\varepsilon_i^*}^\Xi$, каждая из которых имеет хотя бы одного непосредственного соседа $\bar{x}_* \in \partial^h X_{\varepsilon_i^*}^\Xi$, для которого выполняется

$$\hat{Z}(t_{i+1}, t_i, \bar{x}_*) \cap \left(X_i^h \setminus \partial_{\varepsilon_i} X_i^h\right) = \varnothing,$$

где $\hat{Z}(t_{i+1}, t_i, \bar{x}_*) = \bar{x}_* - \Delta\hat{F}(t_i, \bar{x}_*)$.

6. Построение множества X_{i+1}^h путем заполнения области, ограниченной множеством S_{i+1}, точками, пересекающимися с сечением $\Phi(t_{i+1})$ фазового ограничения Φ.

Описанный метод будем называть методом приграничного слоя. Разберем подробнее процесс построения множества X_{i+1}^h.

На шаге 1 происходит выделение точек множества X_i^h, удаленных от границы не далее чем на ε_i^*. Толщина ε_i должна быть выбрана такой, чтобы обеспечить корректное построение множества S_{i+1} на шаге 5.

На шаге 2 происходит построение множества $X_{\varepsilon_i^*}^\Xi$, которое будет представлять собой плотный набор точек без отдельно расположенных облаков при условии, что множество $\partial_{\varepsilon_i^*} X_i^h$ представляет собой плотный набор точек. Это свойство множества $X_{\varepsilon_i^*}^\Xi$ обеспечивается путем применения процедуры построения выпуклой оболочки в соотношении (8).

На шаге 3 выделяется граница множества, построенного на шаге 2. Следует отметить, что множество $\partial X_{\varepsilon_i^*}^\Xi$ может содержать как граничные, так и внутренние точки множества X_{i+1}^h.

На шаге 4 выделяется внешний приграничный слой множества $X^{\Xi}_{\varepsilon_i^*}$, состоящий из непосредственных соседей граничных точек множества $X^{\Xi}_{\varepsilon_i^*}$, не принадлежащих множеству $X^{\Xi}_{\varepsilon_i^*}$.

На шаге 5 происходит выделение множества S_{i+1}, представляющего собой по сути границу множества X^h_{i+1} без учета фазовых ограничений. Множество S_{i+1} выделяется с помощью метода, основанного на проверке принадлежности непосредственных соседей точек $\partial X^{\Xi}_{\varepsilon_i^*}$ множеству X^h_{i+1} с учетом погрешности вычислений. Для этого строятся предполагаемые множества точек, которые могли участвовать в построении каждой из точек внешнего приграничного слоя, и проверяется, пересекаются ли эти множества с внутренней частью множества X^h_i, не включающей в себя приграничный слой толщиной ε_i.

На шаге 6 происходит заполнение с учетом фазовых ограничений области, ограниченной точками S_{i+1}, в результате чего мы получаем множество X^h_{i+1}.

Определим толщину приграничного слоя, при которой на шаге 5 будут выделены все граничные точки множества X^h_{i+1}, построенного без учета фазовых ограничений, и только они. Пусть

$$\max_{f\in\hat{F}(t_i,x),x\in X^h_i}\|f\|\le K_i .$$

Тогда будет выполняться соотношение

$$d\left(\hat{X}(t_{i+1},t_i,x^h),x^h\right)\le K_i\Delta , \tag{9}$$

где $x^h\in X^h_i$. Принимая во внимание (7)–(8), из неравенства (9) следует оценка

$$d\left(\tilde{X}^{\Xi}(t_{i+1},t_i,X^h),X^h\right)\le\sqrt{K_i^2\Delta^2+\Delta^2(h/\Delta)^2 n} . \tag{10}$$

Обозначим

$$K_i^{\Xi}=\sqrt{K_i^2+(h/\Delta)^2 n} .$$

Тогда из (10) следует соотношение

$$d\left(\Lambda^n\left(\tilde{X}^{\Xi}(t_{i+1},t_i,X^h_i),h\right),X^h_i\right)\le K_i^{\Xi}\Delta+h\frac{\sqrt{n}}{2} . \tag{11}$$

Из соотношения (11) следует, что при толщине приграничного слоя $\varepsilon_i^*>2K_i^{\Xi}\Delta+h\sqrt{n}$ множество $X_{\text{int}}=\Lambda^n\left(\tilde{X}^{\Xi}(t_{i+1},t_i,X^h_i\setminus\partial_{\varepsilon_i^*}X^h_i),h\right)$ не пересекается с множеством $X_{edge}=\Lambda^n\left(\tilde{X}^{\Xi}(t_{i+1},t_i,\partial X^h_i),h\right)$, следовательно, множество $X^{\Xi}_{\varepsilon_i^*}$ будет содержать все граничные точки множества X^h_{i+1}, построенного без учета фазовых ограничений.

Пусть

$$\varepsilon_i>(K_i^{\Xi}+K_{i+1}^*)\Delta+h\frac{\sqrt{n}}{2}+h , \tag{12}$$

где величина K_{i+1}^* определяется соотношением

$$\max_{f\in\hat{F}(t_i,x),x\in X^h_{i+1}+hB}\|f\|\le K_{i+1}^* ,$$

B – шар единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда множества $\hat{Z}(t_{i+1},t_i,\bar{x}_*)$ для непосредственных соседей $\bar{x}_*$ точек множеств S_{i+1} и $\partial X^{\Xi}_{\varepsilon_i^*}\setminus S_{i+1}$ не пересекаются.

Таким образом, получаем, что при выполнении условия (12) на шаге 5 будет выделено множество точек, представляющее собой границу множества X^h_{i+1} без учета фазовых ограничений.

Пример

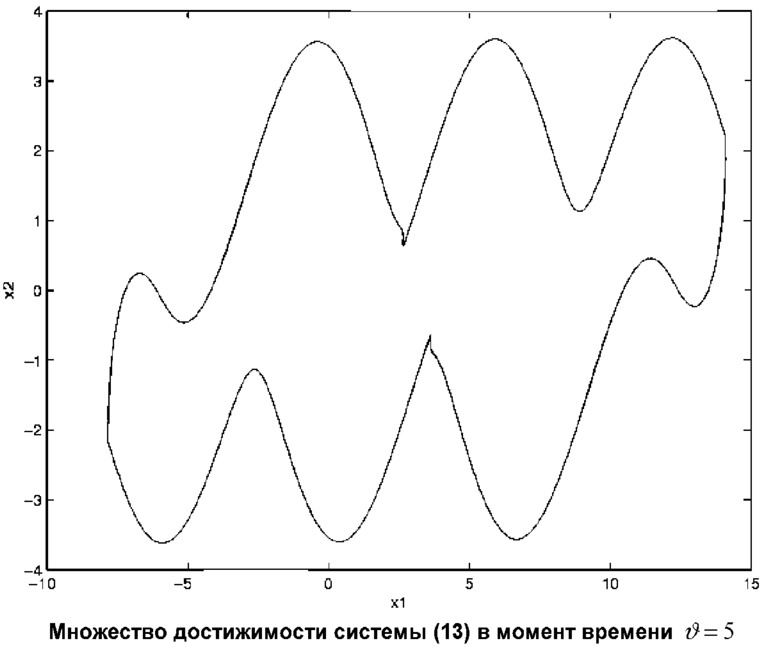
Рассмотрим нелинейную управляемую систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{k}{m}x_2 + u \end{cases} \tag{13}$$

с параметрами $g = 9{,}8$, $l = 3$, $k = 1{,}2$ и $m = 1$. Здесь $x = (x_1, x_2) \in R^2$ – фазовый вектор системы (13), управления u удовлетворяют условию $|u| \le r_u$, $r_u = 3$. Будем считать, что на вектор x наложены фазовые ограничения $x \in \Phi = [-15,15]\times[-5,5]$. Можно показать, что система (13) с наложенными на нее фазовыми ограничениями удовлетворят условиям **A–C**. Задача состоит в том, чтобы приближенно построить множество достижимости $X(\vartheta, t_0, X_0)$ системы (13) в момент времени $\vartheta = 5$ при начальных условиях $x(0) \in X_0 = \{(\pi, 0)\}$ с учетом фазовых ограничений Φ.

Введем на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ равномерное разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = \vartheta\}$ с диаметром разбиения $\Delta = \dfrac{\vartheta - t_0}{N}$. Шаг сетки Λ_h будем выбирать в соответствии с правилом $h = \Delta^{\frac{3}{2}}$. Оценивая величину $\|f(t,x,u)\|$ с учетом фазовых ограничений, получаем, что для построения множеств X_i^h, сходящихся при $\Delta \to 0$ к множествам достижимости $X(t_i, t_0, X_0)$, $i = \overline{1, N}$, достаточно взять приграничный слой толщиной $\varepsilon^* = 53\Delta + 5\Delta^{\frac{3}{2}}$.

На рисунке изображен контур приближенно построенного множества достижимости $X(\vartheta, t_0, X_0)$ системы (13) в момент времени $\vartheta = 5$ при $\Delta = 0{,}05$, $h = 0{,}01$. В результате применения метода приграничного слоя для приближенного построения множеств достижимости время расчетов в данном примере удалось сократить с 1 часа до 10 минут.



Множество достижимости системы (13) в момент времени $\vartheta = 5$

Литература

1. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

2. Ушаков, В.Н. О приближенном построении интегральных воронок дифференциальных включений / В.Н. Ушаков, А.П. Хрипунов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т. 34, № 7. – С. 965–977.

3. Гусейнов, Х.Г. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем / Х.Г. Гусейнов, А.Н. Моисеев, В.Н. Ушаков // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 62, № 2. – С. 179–187.

4. Незнахин, А.А. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения / А.А. Незнахин, В.Н. Ушаков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2001. – Т. 41. – Вып. 6. – С. 895–908.

5. Пахотинских, В.Ю. Построение решений в задачах управления на конечном промежутке времени: дис. … канд. физ.-мат. наук / В.Ю. Пахотинских. – Челябинск, 2005. – 160 с.

6. Михалев, Д.К. Построение решений в дифференциальных играх на конечном промежутке времени и визуализация решений: дис. … канд. физ.-мат. наук / Д.К. Михалев. – Челябинск, 2009. – 206 с.

A BOUNDARY LAYER METHOD FOR THE CONSTRUCTION OF APPROXIMATE ATTAINABILITY SETS OF CONTROL SYSTEMS

A.A. Zimovets[1]

A boundary layer method for the construction of approximate attainability sets of dynamical systems in the n-dimensional Euclidean space with phase constraints is given. This method belongs to the group of grid methods and it is based on the approach when only the points of a boundary layer are used in an iterative process but not the points of a constructed set. This method allows us to speed up the calculations by reducing the number of calculating points in traditional grid methods.

Keywords: control system, differential inclusion, attainability set, grid-based method.

References

1. Krasovskij N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka, 1968. 476 p. (in Russ.).

2. Ushakov V.N., Khripunov A.P. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1994. Vol. 34, no. 7. pp. 833–842.

3. Gusejnov X.G., Moiseev A.N., Ushakov V.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 1998. Vol. 62, no. 2. pp. 179–187.

4. Neznakhin A.A., Ushakov V.N. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2001. Vol. 41, no. 6. pp. 846–859.

5. Pakhotinskikh V.Yu. *Postroenie reshenij v zadachax upravleniya na konechnom promezhutke vremeni: dis. kand. fiz.-mat. nauk* [The solution of control problems at finite time period: Cand. phys. math. sci. diss.]. Chelyabinsk, 2005. 160 p. (in Russ.).

6. Mikhalev D.K. *Postroenie reshenij v differencial'nyx igrax na konechnom promezhutke vremeni i vizualizaciya reshenij: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [The solution of the problems in differential games at finite time period and visualization of the solutions: Cand. phys. math. sci. diss.]. Chelyabinsk, 2009. 206 p. (in Russ.).

Поступила в редакцию 4 октября 2012 г.

[1] Zimovets Artem Anatolievich is Senior Teacher, Information Technology Department, Ural Federal University.
E-mail: aazimovets@gmail.com