

КЛАССИФИКАЦИЯ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ, МИНИМАЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ КОТОРЫХ НЕ ЛЕЖАТ В КОЛЬЦЕ И ИМЕЮТ ПЯТЬ ПЕРЕКРЕСТКОВ¹

А.А. Акимова²

Построена таблица узлов в утолщенном торе $T \times I$, минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и имеют пять перекрестков.

Ключевые слова: узел, утолщенный тор, таблица узлов.

Введение

Усиление интереса к узлам в многообразиях типа $F \times I$, где F – замкнутая ориентируемая поверхность, привело к задаче табулирования узлов в этих многообразиях. Естественным образом возникло продолжение теории узлов в S^3 на узлы в утолщенном торе $T \times I$, где $T = S^1 \times S^1$ – самая простая замкнутая ориентируемая поверхность после сферы. Узлы в $T \times I$ можно задавать диаграммами, аналогичными сферическим диаграммам классических узлов. При этом роль преобразований Рейдемейстера сохраняется: они реализуют изотопии узлов. Из немногих работ по табулированию узлов в других многообразиях упомянем работы [1, 2] по узлам в проективном пространстве и [3] по узлам в полном торе. Эффективный метод табулирования тэнглов описан в [4]. Настоящая статья продолжает исследование, начатое в работе [5], руководствуясь её основными идеями. Автор выражает благодарность профессору С.В. Матвееву за постановку задачи и помощь в её решении.

Основной результат

Будем рассматривать узлы (т.е. простые замкнутые кривые) в утолщенном торе с точностью до эквивалентности в смысле гомеоморфизма. Проекция узла $K \subset T \times I$ представляет собой регулярный граф $G \subset T$ степени 4, для которого прохождение вершин по правилу «прямо вперед» определяет полный обход, отвечающий узлу. Диаграмма узла K получается из этого графа указанием (путем разрывов обхода), какой из проходящих через каждую вершину участков узла расположен выше, какой – ниже другого в смысле величины координаты $t \subset I$. Две проекции считаются эквивалентными, если одна получается из другой гомеоморфизмом тора на себя. Эквивалентность диаграмм имеет тот же смысл, но дополнительно разрешается одновременно изменять типы всех перекрестков.

Определение 1. Диаграмма узла K называется минимальной, если ее сложность (число перекрестков) не превосходит сложности любой диаграммы любого узла, эквивалентного узлу K . Проекция $G \subset T$ называется минимальной, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.

Мы будем рассматривать только примарные узлы, т.е. узлы, отличные от локальных и составных. Локальный узел отвечает узлу в сфере, а составной является либо нетривиальной связанной суммой узлов в сфере с уже табулированными узлами в $T \times I$, либо круговой связанной суммой табулированных узлов [6]. Кроме того, мы не включаем в таблицу узлы, минимальные диаграммы которых можно расположить в некотором кольце на T . Дело в том, что такие узлы близки к узлам в полном торе, табулированным в [3]. Аналогичным образом определяются понятия примарных, локальных, составных проекций и диаграмм на торе.

Следующая теорема является основным результатом статьи.

Теорема 1. Существуют ровно 69 различных примарных узла в $T \times I$, минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и имеют пять перекрестков. Эти диаграммы изображены на рис. 1.

Доказательство теоремы 1 состоит из четырех частей и аналогично доказательству соответствующей теоремы, подробно описанному в [5]. Сначала мы перебираем все абстрактные регулярные графы с 5 вершинами, потом – все минимальные проекции с 5 перекрестками на торе, не лежащие в кольце, затем – отвечающие им минимальные диаграммы. При этом дубликаты от-

¹ Исследования были поддержаны грантом РФФИ 12-01-00748, грантом НШ-1414.2012.1 по государственной поддержке ведущих научных школ, а также грантом 12-Т-1-1003/2 ОМН РАН.

² Акимова Алёна Андреевна – студент, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: akimova_susu@mail.ru

брасываются. На последнем этапе мы доказываем, что отвечающие этим диаграммам узлы в $T \times I$ различны. Для этого мы используем обобщенные полиномы Кауфмана [7, 8].

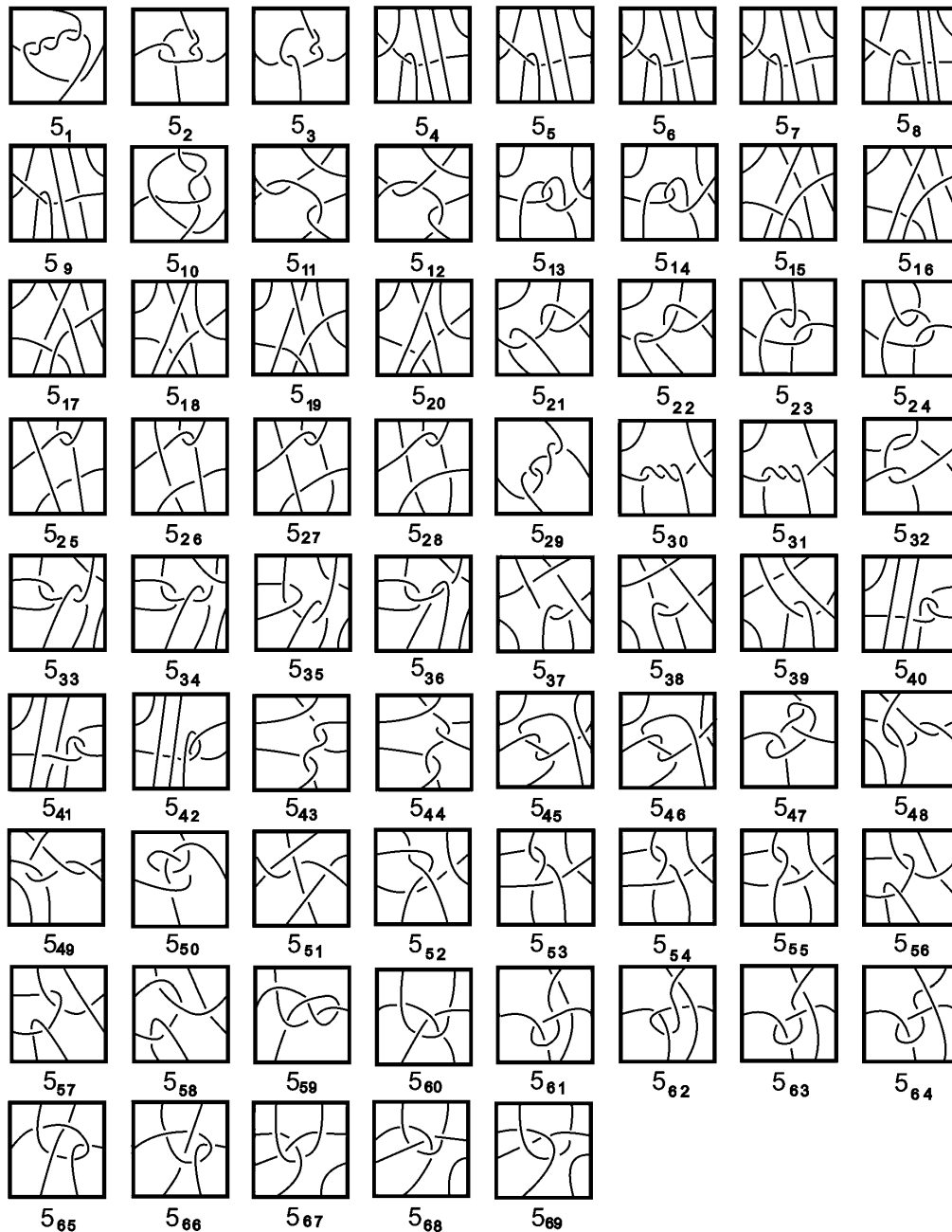


Рис. 1. Диаграммы с 5 перекрестками узлов на торе T , не лежащие в кольце. Тор T представлен в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами

Перечисление графов и проекций

Отметим, что минимальная проекция узла в $T \times I$, не лежащая в кольце, не может иметь петель.

Лемма 1. Существуют ровно 6 регулярных графов без петель, имеющих пять вершин (рис. 2).

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 2 работы [5], в которой был рассмотрен случай графов с $n \leq 4$ вершинами.

Теорема 2. Существуют ровно 34 различные примарные проекции узлов в $T \times I$, которые имеют 5 перекрестков, не имеют тривиальных петель и не лежат в кольце (рис. 3).

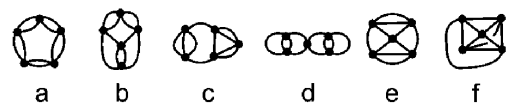


Рис. 2. Регулярные графы степени 4 с пятью вершинами, не имеющие петель

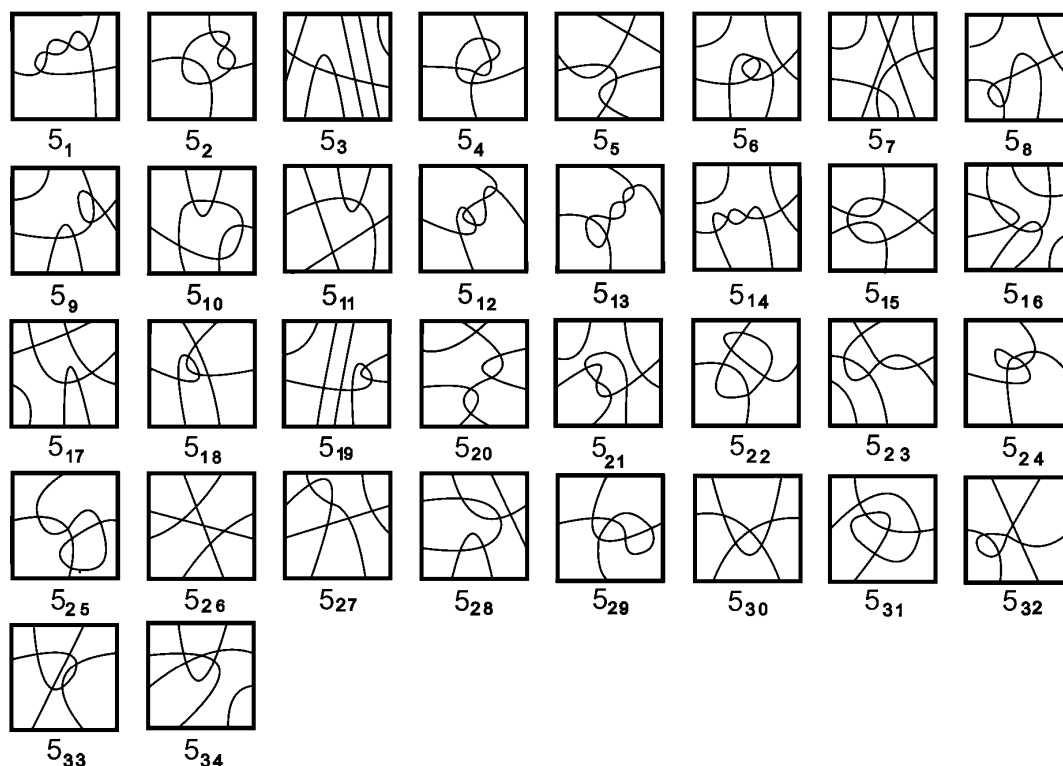


Рис. 3. Проекция с 5 перекрестками узлов на торе T , не лежащие в кольце.
Тор T представлен в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 2 работы [5], в которой был рассмотрен случай проекций с $n \leq 4$ перекрестками.

Доказательство теоремы 1

Восстановим по проекциям, описанным в теореме 2 (см. рис. 3), диаграммы узлов на T , указав тип каждого перекрестка. Для проекции с n вершинами это можно сделать 2^n , то есть в нашем случае 32 способами. Однако перебор можно существенно сократить за счет соображений, описанных в [5]. Например, тип одной вершины можно зафиксировать. Только две, а не четыре, разметки вершин двухугольной грани могут дать минимальную диаграмму. Кроме того, только две разметки вершин треугольной грани, имеющей общее ребро с двухугольной гранью, могут дать минимальную диаграмму.

Различность всех приведенных в таблице узлов доказывается с помощью вычисления их обобщенных полиномов Кауфмана [7, 8]. Точная формула такова:

$$X(K) = (-a)^{-3\omega(K)} \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)} x^{\delta(s)},$$

где $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ – числа маркеров A и B в состоянии s , а $\gamma(s)$ и $\delta(s)$ – числа тривиальных и нетривиальных окружностей в торе, полученных в результате разрешения всех перекрестков, которое соответствует состоянию s . Разумеется, сумма берется по всем возможным состояниям, а $\omega(K)$ обозначает число скручивания диаграммы.

Все полиномы оказались различными. Отсюда следует, что все узлы, приведенные на рис. 1, различны. Попутно мы получаем доказательство минимальности каждой из 34 проекций, указанных в теореме 2.

Заключительные замечания

1. Таблица содержит ровно 5 гомологически тривиальных узлов: $5_{21}, 5_{22}, 5_{56}-5_{58}$.
2. Таблица содержит ровно 13 альтернированных диаграмм: $5_6, 5_{12}, 5_{13}, 5_{17}, 5_{21}, 5_{31}, 5_{44}, 5_{46}, 5_{49}, 5_{51}, 5_{53}, 5_{56}, 5_{68}$.
3. Максимальное число различных узлов, имеющих одну и ту же проекцию, равно 6. Этим свойством обладают проекции 5_3 и 5_7 .

Литература

1. Дроботухина, Ю.В. Аналог полинома Джонса для зацеплений в RP^3 и обобщение теоремы Кауфмана–Мурасуги / Ю.В. Дроботухина // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2, № 3. – С. 171–191.
2. Drobotukhina, Yu.V. Classification of links in RP^3 with at most six crossings / Yu.V. Drobotukhina // Advances in Soviet Mathematics. – 1994. – V. 18, № 1. – P. 87–121.
3. Gabrovshek, B. Knots in the solid torus up to 6 crossings / B. Gabrovshek, I.M. Mroczkowski // J. Knot Theory Ramifications. – 2012. – V. 21. – 1250106. [43 c.] DOI: 10.1142/S0218216512501064
4. Enumerating the k-tangle projections / A. Bogdanov, V. Meshkov, A. Omelchenko, M. Petrov // J. Knot Theory Ramifications. – 2012. – V. 21, № 7. – 1250069. [17 c.] DOI: 10.1142/S0218216512500691
5. Акимова, А.А. Классификация узлов малой сложности в утолщённом торе / А.А. Акимова, С.В. Матвеев // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. – 2012. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 10–21.
6. Matveev, S.V. Prime decompositions of knots in $T \times I$ / S.V. Matveev // Topology and its Applications. – 2012. – V. 159, № 7. – С. 1820–1824. DOI: 10.1016/j.topol.2011.04.022
7. Kauffman, L. State models and the Jones polynomial // Topology. – 1987. – V. 26, № 3. – P. 395–407.
8. Прасолов, В.В. Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия / В.В. Прасолов, А.Б. Сосинский. – М.: МЦНМО, 1997. – 352 с.

CLASSIFICATION OF KNOTS IN THE THICKENED TORUS WITH MINIMAL DIAGRAMS WHICH ARE NOT IN A CIRCLE AND HAVE FIVE CROSSINGS

A.A. Akimova¹

We compose the table of knots in the thickened torus $T \times I$ with minimal diagrams which are not in a circle and have five crossing intersections.

Keywords: knot, thickened torus, knot table.

References

1. Drobotukhina Yu.V. Analog polinoma Dzhonsa dlya zaceplenij v RP^3 i obobshhenie teoremy Kaufmana–Murasugi [An analogue of the Jones polynomial for links in RP^3 and a generalization of the Kauffman–Murasugi theorem]. *Leningrad Mathematical Journal*. 1991. Vol. 2, Issue 3. pp. 613–630.
2. Drobotukhina Yu.V. Classification of links in RP^3 with at most six crossings. *Advances in Soviet Mathematics*. 1994. Vol. 18, no. 1. pp. 87–121.
3. Gabrovshek B., Mroczkowski I.M. Knots in the solid torus up to 6 crossings. *J. Knot Theory Ramifications*. 2012. Vol. 21. 1250106. [43 pages] DOI: 10.1142/S0218216512501064.
4. Bogdanov A., Meshkov V., Omelchenko A., Petrov M. Enumerating the k-tangle projections // *J. Knot Theory Ramifications*. 2012. Vol. 21, no. 7. 1250069. [17 pages] DOI: 10.1142/S0218216512500691
5. Akimova A.A., Matveev S.V. Klassifikaciya uzlov maloj slozhnosti v utolshhenom tore [Classification of Low Complexity Knots in the Thickened Torus]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika*. 2012. Vol. 12. Issue. 3. pp. 10–21. (in Russ.).
6. Matveev S.V. Prime decompositions of knots in $T \times I$. *Topology and its Applications*. 2012. Vol. 159, no. 7. pp. 1820–1824. DOI: 10.1016/j.topol.2011.04.022
7. Kauffman L. State models and the Jones polynomial. *Topology*. 1987. Vol. 26, no. 3. pp. 395–407.
8. Prasolov V.V., Sosinskij A.B. Uzly, zacepleniya, kosy i tryokhmernye mnogoobraziya [Knots, linkage, braids and three-dimensional manifold]. Moscow: MCNMO, 1997. 352 p. (in Russ.).

Поступила в редакцию 24 октября 2012 г.

¹ Akimova Alyona Andreevna is Student, South Ural State University.
E-mail: akimova_susu@mail.ru