УДК 514.772

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ОДНОЗНАЧНОЙ ПРОЕКЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Д.Г. Азов [1]

Рассматривается поверхность с отрицательной гауссовой кривизной, которая однозначно проектируется на круг. Получены достаточные условия, при которых существует оценка для радиуса круга.

Ключевые слова: поверхности отрицательной гауссовой кривизны, уравнение Монжа–Ампера гиперболического типа, оценка области однозначной проекции.

Пусть поверхность

$$z = f(x,y) \tag{1}$$

имеет гауссову кривизну $K(x,y)$. Известно, что если

$$K(x,y) \le -\alpha^2 < 0, \tag{2}$$

то поверхность (1) не может проектироваться на всю плоскость. Имеет место теорема Н.В. Ефимова [1]: существует $a_0 > 0$ такое, что если C^2-гладкая функция $f(x,y)$ задана на квадрате со стороной a и ее график (1) имеет кривизну (2), то $a \le a_0 / \alpha$. Е. Хайнц [2] получил оценку для радиуса круга, на который может проектироваться поверхность с улучшением оценки Н.В. Ефимова: существует $r_0 > 0$ такое, что если C^2-гладкая поверхность (1) с кривизной (2) задана на круге радиуса r, то $r < r_0 / \alpha$. Е. Хайнц доказал, что $r_0 \le e\sqrt{3}$. Пример гиперболического параболоида дает оценку снизу: $r_0 \ge 0,5$. Точные значения констант r_0 и a_0 неизвестны. В работе [3] Н.В. Ефимов получил оценки для сторон прямоугольника, на который проектируется поверхность (1). Данные результаты были обобщены в работах [4–7].

Учитывая известную формулу

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = K(x,y)(1 + z_x^2 + z_y^2)^2, \tag{3}$$

результаты Н.В. Ефимова и Е. Хайнца можно сформулировать следующим образом: гиперболическое уравнение Монжа–Ампера (3) не имеет C^2-гладких решений в круге радиуса $r > r_0 / \alpha$ или на квадрате со стороной $a > a_0 / \alpha$, если $K(x,y)$ удовлетворяет условию (2).

В настоящей работе рассматриваются достаточные условия существования оценки радиуса круга, на который однозначно проектируется поверхность (1).

Теорема 1. *Пусть поверхность* $z = z(x,y) \in C^2$ *с отрицательной кривизной* $K(x,y) < 0$ *определена на круге* $x^2 + y^2 \le R^2$. *Если существует постоянная* $C > 0$, *такая, что*

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \le r^2} \frac{dxdy}{|K(x,y)|} \le Cr^m,\ 0 < m < 4,\ r > 0, \tag{4}$$

то

$$R \le \begin{cases} \left(\dfrac{4-m}{2}\right)^{\frac{2}{2-m}} \cdot \left(\dfrac{3C}{\pi}\right)^{\frac{1}{4-m}}, & \text{если } m \ne 2; \\ e\sqrt{\dfrac{3C}{\pi}}, & \text{если } m = 2. \end{cases} \tag{5}$$

[1] Азов Дмитрий Георгиевич – доцент, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: azykl@rambler.ru

Доказательство теоремы 1. Для доказательства используем интегральную формулу С.Н. Бернштейна:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left(\overline{z}_{\varphi}(\rho,\varphi)\right)^2 d\varphi\right)=\int_0^{2\pi}\left(\overline{z}_{\rho}(\rho,\varphi)\right)^2 d\varphi-2\iint_{x^2+y^2\le r^2}(z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2)dxdy. \tag{6}$$

Здесь $z(x,y)\in C^2$, $\overline{z}(\rho,\varphi)=z(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, ρ, φ – полярные координаты.

Введем вспомогательную функцию

$$g(r)=\int_0^r \rho d\rho\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{\rho^2}\left(\overline{z}_{\varphi}(\rho,\phi)\right)^2\right)d\varphi.$$

Тогда $g(0)=0$, $g(r)\ge\pi r^2$ и $g'(r)>0$ при $0<r<R$. Оценим $g(r)$ сверху, используя неравенство Буняковского:

$$g^2(r)\le\left(\iint_{x^2+y^2\le r^2}(1+z_x^2+z_y^2)dxdy\right)^2\le\iint_{x^2+y^2\le r^2}\frac{dxdy}{|K(x,y)|}\cdot\iint_{x^2+y^2\le r^2}|K(x,y)|\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^2dxdy. \tag{7}$$

Используя (4), (6) и (7), получаем неравенство

$$g''(r)\ge\frac{2g^2(r)}{Cr^m}. \tag{8}$$

Интегрируя неравенство (8) по $\rho\in(0,R)$, получим

$$g'(\rho)g^{-\frac{3}{2}}(\rho)\ge\frac{2}{\sqrt{3C}}r^{-\frac{m}{2}}.$$

Переходя к пределу при $\rho\to r$ и интегрируя по r от R_1 до R_2 $(0<R_1<R_2<R)$ при $m\ne2$, получаем

$$g^{-\frac{1}{2}}(R_1)-g^{-\frac{1}{2}}(R_2)\ge\frac{2}{(2-m)\sqrt{3C}}(R_2^{\frac{2-m}{2}}-R_1^{\frac{2-m}{2}}).$$

Так как $g(r)\ge\pi r^2$, то

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}R_1}\ge\frac{2}{(2-m)\sqrt{3C}}\left(R_2^{\frac{2-m}{2}}-R_1^{\frac{2-m}{2}}\right). \tag{9}$$

Пусть $2<m<4$. Устремляя в неравенстве (9) R_2 к R, получим

$$R^{\frac{2-m}{2}}\ge\frac{2-m}{2}\sqrt{\frac{3C}{\pi}}+R_1^{\frac{2-m}{2}}. \tag{10}$$

Максимальное значение правой части неравенства (10) достигается при $R_1=\left(\frac{3C}{\pi}\right)^{\frac{1}{4-m}}$ и равно $\frac{4-m}{2}\left(\frac{3C}{\pi}\right)^{\frac{2-m}{2(4-m)}}$. Поэтому $R^{\frac{2-m}{2}}\ge\frac{4-m}{2}\left(\frac{3C}{\pi}\right)^{\frac{2-m}{2(4-m)}}$ и, следовательно,

$$R\le\left(\frac{4-m}{2}\right)^{\frac{2}{2-m}}\left(\frac{3C}{\pi}\right)^{\frac{1}{4-m}}. \tag{11}$$

При $0<m<2$ в (10) изменится знак неравенства:

$$R^{\frac{2-m}{2}}\le\frac{2-m}{2}\sqrt{\frac{3C}{\pi}}+R_1^{\frac{2-m}{2}}.$$

И в этом случае правая часть неравенства достигает минимальное значение при $R=\left(\frac{3C}{\pi}\right)^{\frac{1}{4-m}}$. Отсюда снова получим неравенство (11).

При $m=2$ неравенство (9) будет иметь вид $\frac{1}{\sqrt{\pi}R_1}\geq\frac{1}{\sqrt{3C}}\ln\frac{R_2}{R_1}$. Поэтому $\ln R\leq\sqrt{\frac{3C}{\pi}}\frac{1}{R_1}+\ln R_1$ и $\ln R\leq 1+\ln\sqrt{\frac{3C}{\pi}}$. Но тогда

$$R\leq e\sqrt{\frac{3C}{\pi}}. \tag{12}$$

Оценка (12) получается из (11) предельным переходом при $m\to 2$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Если* $K(x,y)\leq-\alpha^2<0$, *то* $\iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2}\frac{dxdy}{|K(x,y)|}\leq\frac{\pi r^2}{\alpha^2}$ *и при* $m=2$ *из (5) следует оценка Е. Хайнца* $R\leq\frac{e\sqrt{3}}{\alpha}$.

Замечание 2. *Теорема 1 останется верной, если условие (4) выполняется при* $r\geq r_0$, *где* r_0 – *некоторая постоянная. В этом случае при доказательстве нужно рассматривать* $r>r_0$. *При необходимости* r_0 *можно уменьшить, увеличивая значение постоянной* C.

Замечание 3. *Если в условии (4) убрать ограничения на* m, *то существуют поверхности, которые проектируются на круг любого радиуса. Например, пусть* $K(x,y)=-\frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^n}$. *Тогда при* $n<1$ *выполняется неравенство* $\iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2}\frac{dxdy}{|K(x,y)|}\leq Cr^m$, *где* $0<m<4$. *По теореме 1 существует оценка для радиуса круга над которым задана поверхность. А при* $n>1$ *имеем* $m>4$ *и существует поверхность, которая проектируется на круг любого радиуса. В самом деле, если* $A=1+(1+R^2)^{1-n}$, *то поверхность* $z=\int\limits_0^r\sqrt{\frac{1}{A-(1+t^2)^{1-n}}-1}dt$, *где* $r=\sqrt{x^2+y^2}$, *проектируется на круг любого радиуса* R *и ее кривизна равна* $K(x,y)=\frac{1-n}{\left(1+x^2+y^2\right)^n}$.

Результаты этой работы можно сформулировать и для более общего уравнения Монжа–Ампера. Рассмотрим уравнение

$$z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=F(x,y,z,z_x,z_y). \tag{13}$$

Пусть $F(x,y,z,z_x,z_y)\leq K(x,y)\cdot\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^2$, $K(x,y)<0$ – гиперболическое уравнение.

Тогда верна теорема 2. Сформулируем ее.

Теорема 2. *Если уравнение (13) имеет в круге* C^2*-регулярное решение в круге* $x^2+y^2\leq R^2$ *и функция* $K(x,y)$ *удовлетворяет условию (4), то* R *удовлетворяет условию (5).*

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1.

Литература

1. Ефимов, Н.В. Исследование полной поверхности отрицательной кривизны / Н.В. Ефимов. – М.: Докл. АН СССР, 1953. – 640 с.

2. Heinz, E. Über Flachen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind / E. Heinz // Math. Ann. – 1955. – V. 129, № 5. – P. 451–454.

3. Ефимов, Н.В. Оценки размеров области регулярности решений некоторых уравнений Монжа–Ампера / Н.В. Ефимов // Математический сборник. – 1976. – Т. 100(142), № 3(7). – С. 356–363.

4. Азов, Д.Г. Об одном классе гиперболических уравнений Монжа–Ампера / Д.Г. Азов // Успехи математических наук. – 1983. – Т. 38, № 1. – С. 153–154.

5. Брысьев, А.Б. Оценка области регулярности решений некоторых нелинейных дифференциальных неравенств / А.Б. Брысьев // Украинский геометрический сборник. – 1985. – Вып. 28. – С. 19–21.

6. Азов, Д.Г. Изометрическое погружение *n*-мерных метрик в евклидовы и сферические пространства / Д.Г. Азов // Вестник Челябинского государственного университета. – 1994. – № 1(2). – С. 12–17.

7. Азов, Д.Г. Погружение методом Д. Блануши некоторых классов полных n-мерных римановых метрик в евклидовы пространства / Д.Г. Азов // Вестник Московского университета. – 1985. – № 5. – С. 72–74.

ESTIMATION OF BIJECTIVE PROJECTION AREA OF A SURFACE WITH NEGATIVE CURVATURE

D.G. Azov[1]

The article deals with a surface of negative Gaussian curvature which is bijectively projected onto a circle. It provides sufficient conditions of existence of an estimate for the circle radius.

Keywords: surfaces with negative Gaussian curvature, hyperbolic Monge–Ampere equation, estimation of bijective projection area.

References

1. Efimov N.V. Issledovanie polnoj poverkhnosti otricatelnoj krivizny [Research of a complete surface with negative curvature]. *Dokl. AN SSSR.* 1953. 640 p. (in Russ.).

2. Heinz E. Über Flachen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind. *Math. Ann.* 1955. Vol. 129, no. 5. pp. 451–454.

3. Efimov N.V. Ocenki razmerov oblasti regulyarnosti reshenij nekotorykh uravnenij Monzha–Ampera [Estimation of the range of domain of regularity for the solution of Monge–Ampere equations]. *Matematicheskij sbornik*. 1976. Vol. 100(142), no. 3(7). pp. 356–363. (in Russ.).

4. Azov D.G. On a class of hyperbolic Monge–Ampère equations. *Russian Mathematical Surveys.* 1983. Vol. 38. p. 170. DOI:10.1070/RM1983v038n01ABEH003390

5. Brys'ev A.B. Ocenka oblasti regulyarnosti reshenij nekotorykh nelinejnykh differencial'nykh neravenstv [Estimation of the range of domain of regularity for the solution of nonlinear differential inequality]. *Ukrainskij geometricheskij sbornik.* 1985. Issue. 28. p. 19–21. (in Russ.).

6. Azov D.G. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta.* 1994. no. 1(2). pp. 12–17. (in Russ.).

7. Azov D.G. *Vestnik Moskovskogo universiteta.* 1985. no. 5. pp. 72–74.

Поступила в редакцию 7 ноября 2012 г.

[1] Azov Dmitry Georgievich is Associate Professor, Department of General Mathematics, South Ural State University.
E-mail: azykl@rambler.ru