УДК 519.642.8

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ С УЧЕТОМ РЕЗОНАНСОВ

Ю.В. Худяков

В работе описан метод распараллеливания алгоритма численного решения задачи восстановления динамически искаженного сигнала инерционностью измерительного устройства и резонансами в его цепях – задачи оптимального измерения с учетом резонансов. Предлагаемый подход позволяет значительно повысить скорость вычислений и снять основной недостаток – большое время вычислений – процедуры поиска минимума функционала качества в алгоритме. Идеи данного подхода распараллеливания алгоритма могут быть применимы и к алгоритмам решения класса задач оптимального управления для систем леонтьевского типа.

Ключевые слова: задача оптимального измерения; резонансы в цепях измерительного устройства; системы леонтьевского типа; динамические измерения; оптимальное управление.

Одной из основных задач теории динамических измерений является задача восстановления динамически искаженных сигналов. Ряд принципиально новых идей для решения этой задачи – представление модели измерительного устройства (ИУ) как системы леонтьевского типа, применение методов теорий оптимального управления и разрешающих полу(групп) – предложили А.Л. Шестаков и Г.А. Свиридюк [1]. Полученную задачу было принято называть задачей оптимального измерения, первоначально в ней учитывалось искажение входящего сигнала инерционностью ИУ. Но искажение сигнала возникает не только вследствие инерционности ИУ, но и наличия резонансов в его цепях. В [2] А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком и для этого более общего случая была предложена математическая модель и проведен ее качественный анализ. Для представления этой модели введем в рассмотрение пространства состояний $\aleph = \{x \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n)\}$, измерений $\mathfrak{U} = \left\{u \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n)\right\}$ и наблюдений $\mathfrak{Y} = C[\aleph]$ при некотором фиксированном $\tau \in \mathbb{R}^+$. Кроме того, полезным является рассмотрение пространства $\mathfrak{Z} = \aleph \times \mathfrak{Y}$. Выделим в $\mathfrak{U}$ замкнутое и выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ – множество допустимых измерений. Требуется найти *оптимальное измерение* $v \in \mathfrak{U}_\partial$ почти всюду на $(0,\tau)$, удовлетворяющую системе леонтьевского типа

$$L\dot{z} = Mz + Du \tag{1}$$

при начальных условиях Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\mu L - M)^{-1}L\right]^{p+1}(z(0) - z_0) = 0, \tag{2}$$

минимизирующую значение функционала

$$J(v) = \min_{u\in\mathfrak{U}_\partial} J(u) = \min_{u\in\mathfrak{U}_\partial}\left(\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \left\|Sz^{(q)}(u,t) + S\overline{z}_0^{(q)}(t) - Sz_0^{(q)}(t)\right\|^2 dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{\theta}\int_0^\tau \langle F_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t)\rangle dt\right). \tag{3}$$

Здесь $z = \operatorname{col}(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_m)$, причем $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\dot{x} = \operatorname{col}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $u = \operatorname{col}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $y = \operatorname{col}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор-функции измерений и наблюдений соответственно; $z_0(t) = \operatorname{col}(x_{01}(t), x_{02}(t), \ldots, x_{0k}(t), y_{01}(t), y_{02}(t), \ldots, y_{0m}(t))$ – наблюдаемые состояние системы и выходящий сигнал, получаемые в ходе натурного эксперимента, $Sz_0(t)$ – те наблюдаемые величины, по которым проводится восстановления динамически искаженного сигнала; $\overline{z}_0(t)$ – наблюдаемые состояние системы и выходящий сигнал, получаемые в ходе натурного эксперимента при нулевых значениях полезных измеряемых сигналов, $S\overline{z}(t)$ – те наблюдаемые величины (при нулевых значениях полезных измеряемых сигналов), по которым проводится восстановления динамически искаженного сигнала; $z(t)$ – моделируемые состояние системы и выходящий сигнал, получаемые в ходе натурного эксперимента, $Sz(t)$ – те моделируемые величины, по которым проводится восстановления динамически искаженного сигнала; $n = k + m$ – число параметров состояний системы; L и M – квадратные матрицы порядка n, представляющие собой взаимовлияние скоростей состояния и состояния измерительного устройства соответственно, причем $detL = 0$, D – квадратная матрица порядка n, характеризующие взаимовлияние параметров измерения и связь между состоянием системы и наблюдением соответственно, $u : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, $F_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – самосопряженные положительно определенные операторы, $\theta = 0, 1, \ldots, p + 1$, $\| \cdot \|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ соответственно.

В [3] представлен алгоритм программы, реализующей численный метод решения задачи оптимального измерения с учетом резонансов, в основе этой работе использованы те же идеи, что и в [4] с учетом различия задач. В [5] представлен алгоритм программы для численного решения задачи оптимального измерения с учетом инерционности и резонансов. В данной работе использован иной вид функционала качества, позволяющий более точно восстанавливать динамически искаженный сигнал и, кроме того, предложено распараллелить процессы в процедуре оптимизации функционала качества.

Алгоритм построен в предположении о том, что известны только частоты резонансов ω_i, причем возникающие как в i-х цепях ИУ, $i = 1, 2, \ldots, k$, так и на i-х выходах ИУ, $i = k + 1, k + 2, \ldots, k + m$, а амплмтуды резонансов не известны. Заметим, что по построению пространство $\mathfrak{U}$ сепарабельно. Значит, существует последовательность $\{\mathfrak{U}^l\}$ конечномерных подпространств $\mathfrak{U}^l \subset \mathfrak{U}$ *монотонно исчерпывающих* пространство $\mathfrak{U}$, т.е. $\mathfrak{U}^l \subset \mathfrak{U}^{l+1}$ и $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \mathfrak{U}^l$ плотно в $\mathfrak{U}$. Поэтому приближенное рещение задачи оптимального измерения будем искать в виде

$$u^l = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{l} a_{1j} \sin jt + a_{\omega_1} \sin \omega_1 t \\ \sum\limits_{j=0}^{l} a_{2j} \sin jt + a_{\omega_2} \sin \omega_2 t \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=0}^{l} a_{kj} \sin jt + a_{\omega_k} \sin \omega_k t \\ a_{\omega_{k+1}} \sin \omega_{k+1} t \\ a_{\omega_{k+2}} \sin \omega_{k+2} t \\ \ldots \\ a_{\omega_{k+m}} \sin \omega_{k+m} t \end{pmatrix},$$

где $l \in \mathbb{N}$, $l > p$.

Опишем логическую структуру программы. В ее состав входят следующие модули:

– ввод данных;

– расчет решения;

– операции над матрицами.

Для представления чисел используется вещественный тип двойной точности (double). Для величин такого типа под порядок и мантиссу отвводится 11 и 52 разряда соответственно, длина мантиссы определяет точность числа, а длина порядка – его диапазон. Ввод данных осуществляется из конфигурационного текстового файла, задающего параметры расчета и имена файлов, из которых загружаются необходимые массивы. Основными этапами расчета решения являются:

1. Рассчитываются веса и узлы квадратурной формулы Гаусса, используемой для приближенного нахождения интегралов.

2. По данным натурного эксперимента при нулевом значении входящего сигнала проводится их интерполирование с использованием тригонометрического ряда $\sum\limits_{j=0}^{\varpi} \nu_j \sin \varphi_j t$. В качестве φ_j принимаются значения частот резонансов ω_j и другие, близкие по значению к ним, так как частоты резонансов известны не точно. На основании результатов интерполяции находятся значения $\overline{z}_0$ и $\overline{z}_0^{\,|}$ в узлах квадратурной формулы Гаусса.

3. По данным натурного эксперимента с неизвестным входящим сигналом проводится их интерполирование полиномом Лагранжа, определяется вид $z_0(t)$. Затем определяется значение этой функции и ее производной в узлах квадратурной формулы Гаусса.

4. Определяется значение K, начиная с которого можно вычислять приближенные значения $z_r\left(u^l, t\right)$. В предположении (L, p)–регулярности матрицы M(т.е.существует число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$, существует число $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ равное нулю, если в точке ∞ L–резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ матрицы M имеет устранимую особую точку; и равное порядку полюса в точке ∞ матриц–функции $(\mu L - M)^{-1}$ в противном случае), $\det M \neq 0$ и $r > K$ они находятся по формуле

$$z_r(t) = \sum_{q=0}^{p} H_r^q M^{-1} (\mathbb{I} - Q_r)\,(Du_r^l)^{(q)}(t) + U_r^t x_0 + \frac{\tau}{2} \sum_{j=0}^{\eta} R_r^{\frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2} s_j} Q_r D u_k^l \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} s_j\right) \triangle c_j,$$

где s_j и c_j – узлы и веса квадратурной формулы Гаусса соответственно, $s_j \in [0, T]$, $j = \overline{0, \eta}$, $\eta + 1$ – количество узлов, $H_r = M^{-1}\left(Q_r - \mathbb{I}\right) L$ – нильпотентная матрица со степенью нильпотентности p,

$$U_r^t = \left(\left(L - \frac{t}{r} M\right)^{-1} L\right)^r, \quad Q_r = \left(r L_r^L(M)\right)^{p+1},$$

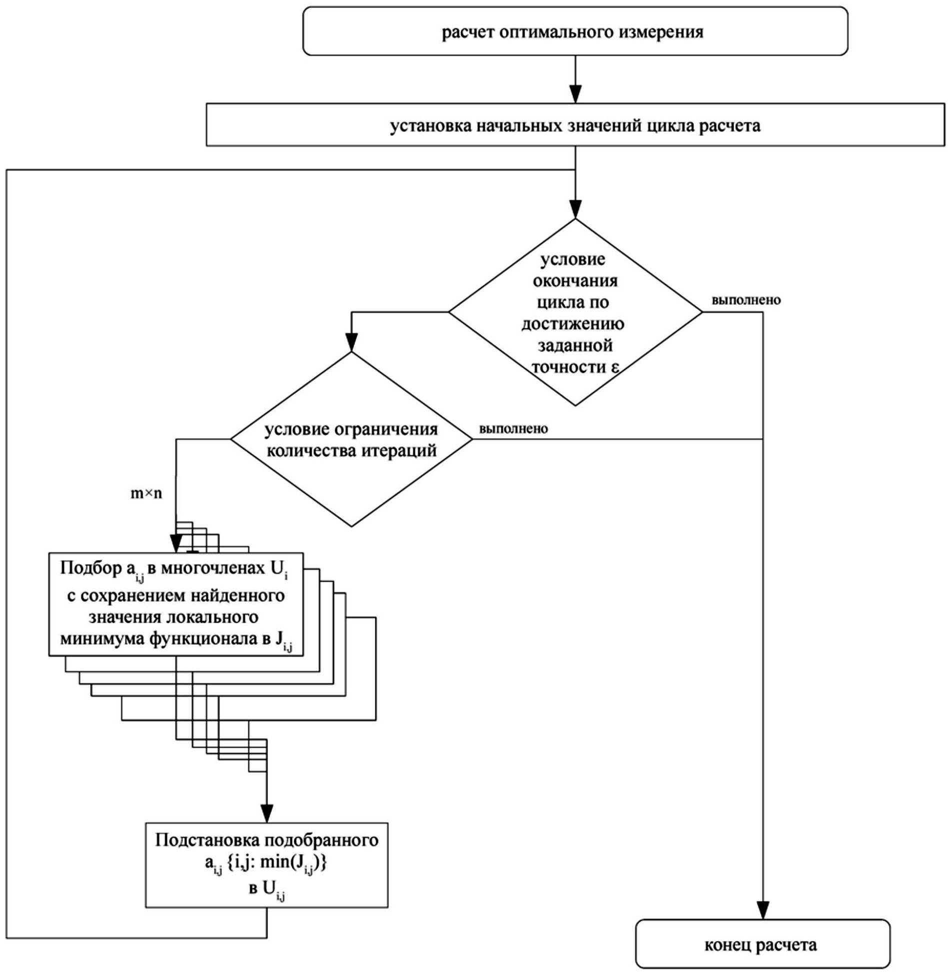
$$R_r^{\frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2} s_j} = \left(\left(L - \frac{\frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2} s_j}{r} M\right)^{-1} L\right)^{r-1} \left(L - \frac{\frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2} s_j}{r} M\right)^{-1}.$$

5. Вычисляется значение функционала качества при $a_{ij} = 0$ и $a_{\omega_i} = 1$.

6. Проводится процедура поиска минимума значения фнкционала качества (рис. 1). Именно в этой процедуре и предлагается проводить распараллеливание процессов, представленное на схеме. При этом используется централизованная схема распределения вычислений с архитектурой типа «звезда».

Отметим, что в данном алгоритме, как и в ранее используемых, заложены идеи метода многошагового покоординатного спуска с памятью при поиске коэффициентов полиномов u^l. Однако распараллеливание позволяет значительно усовершенствовать алгоритм численного решения не только повышением скорости вычислений, но и изменение процедуры оптимизации. В данной работе предлагается, найдя возможные изменения всех элементов массива коэффициентов полиномов u^l и соответствующие им значения функционала качества, а затем, определив его наименьшее значение, изменить только один, соответствующий этому наименьшему значению, элемент массива.

7. Выводится графический вид решения задачи оптимального измерения – входящий сигнал.



Процедура поиска минимума значения функционала качества с распараллеливанием

Идеи данного подхода распараллеливания алгоритма численного решения задачи оптимального измерения с учетом резонансов могут быть применимы и к алгоритмам решения класса задач оптимального управления – оптимального, жесткого, стартового, стартового жесткого – для систем леонтьевского типа.

Литература

1. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16 (192), вып. 5. – С. 116–120.

2. Шестаков, А.Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 70–75
3. Келлер, А.В. Задача оптимального измерения: численное решение, алгоритм программы / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 74–82.
4. Келлер, А.В. Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления / А.В. Келлер // Программные продукты и системы. – 2011. – № 3 (95). – С. 161–165.
5. Келлер, А.В. Задача оптимального измерения с учетом резонансов: алгоритм программы и вычислительный эксперимент / А.В. Келлер, Е.В. Захарова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – №27 (286), вып. 13. – С. 58–68.

Юрий Владимирович Худяков, аспирант, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), hudyakov74@gmail.com.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 3, pp. 122–127.

MSC 47A75

Parallelization of Algorithms for the Solution of Optimal Measurements in View of Resonances

Y.V. Khudyakov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, hudyakov74@gmail.com

This paper describes a method for parallel algorithm of numerical solution of the problem of dynamically distorted signal inertial measurement unit and resonances in the chains that is optimal measuring with the resonances. The proposed approach can significantly increase the computing speed and remove the main drawback which is long time for computation and the procedure for finding the minimum of quality functional in the algorithm. Ideas of this method of parallelization algorithm can be applied to algorithms and solutions for optimal control problems of Leontief type systems.

Keywords: the problem of optimal measuring; resonances in circuits measuring device; Leontief type systems; dynamic measurements; optimal control.

References

1. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. A New Approach to Measuring Dynamically Distorted Signals [Novyj podhod k izmereniju dinamicheski iskazhennyh signalov]. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»*, 2010, no. 16 (192), issue 5, pp. 116–120.
2. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Dynamic Measurement of Distorted Signals [Optimal'noe izmerenie dinamicheski iskazhennyh signalov]. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»*, 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 70–75.

3. Keller A.V., Nazarova E.I. The Problem of Optimal Measurement: a Numerical Solution, the Algorithm of the Program [Zadacha optimal'nogo izmerenija: chislennoe reshenie, algoritm programmy]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika»* [J. of News of Irkutsk State University. Series «Mathematics»], 2011, vol.4, no. 3, pp.74–82.
4. Keller A.V. About the Algorithm for Solving Optimal Control and Hard Control [Ob algoritme reshenija zadach optimal'nogo i zhestkogo upravlenija]. *Programmnye produkty i sistemy* [Program Products and Systems], 2011, no. 3, pp. 170–174.
5. Keller A.V., Zaharova E.V. The Problem of Optimal Measurement in View Resonances: the Programm Algorithm and Computer Experiment [Zadacha optimal'nogo izmereniya s uchetom rezonansa: algoritm programmy i vychislitel'nyi eksperiment]. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,* 2012, no. 27 (286), issue 13, pp. 58–68.

Поступила в редакцию 20 июля 2013 г.