

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

М.В. Фалалеев

В работе методами теории фундаментальных оператор-функций и теории полугрупп операторов с ядрами исследована задача Коши для интегро-дифференциального уравнения соболевского типа в банаховых пространствах. Построена фундаментальная оператор-функция, с помощью которой получена конструктивная формула для обобщенного решения в классе распределений с ограниченным слева носителем. Описаны условия совпадения классического и обобщенного решений. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах задач Коши–Дирихле из математической теории вязкоупругости.

Ключевые слова: банаховы пространства; обобщенные функции; вязкоупругость.

Введение

Некоторые колебательные процессы в вязкоупругих средах моделируются начально-краевыми задачами для неклассических интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с необратимым оператором при старшей по времени производной. Редукция таких задач к вырожденным интегро-дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах позволяет исследовать их в наиболее общей постановке с единых методологических позиций. Таковыми в данной работе являются теория фундаментальных оператор-функций [1] и теория полугрупп операторов с ядрами [2]. Целью предлагаемой работы является через комбинирование основных идей этих двух подходов получить общие теоремы о разрешимости в классах распределений задачи Коши

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int_0^t g(t-s)Bu(s)ds + f(t), \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \dots, \quad u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \quad (2)$$

где $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{Cl}(E_1, E_2)$, B необратим, E_1, E_2 — банаховы пространства $g(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. На этой основе можно получить полное представление о структуре обобщенного решения и сформулировать утверждения о гладких решениях задачи (1), (2), что в свою очередь позволяет всесторонне исследовать некоторые задачи теории вязкоупругости.

1. Построение обобщенного решения

В обобщенных функциях [1] задача (1), (2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \left(B \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t) \right) - A\delta(t) \right) * \tilde{u}(t) = \\ & = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \dots + Bu_0\delta^{(N-1)}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

В классе $K'_+(E_1)$ обобщенных функций с ограниченным слева носителем единственным решением уравнения (3) является функция

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * (f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \dots + Bu_0\delta^{(N-1)}(t)). \quad (4)$$

Здесь $\mathcal{E}_N(t)$ — фундаментальная оператор-функция [1] интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t)) = B(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)) - A\delta(t)$, удовлетворяющая следующей паре уравнений

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * v(t) = v(t), \forall v(t) \in K'_+(E_2),$$

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * w(t) = w(t), \forall w(t) \in K'_+(E_1).$$

Пусть оператор A спектрально ограничен относительно оператора B (или (B, σ) -ограничен) [2], т.е. вне некоторого круга радиуса a непрерывно обратим оператор $(\mu B - A)$. Тогда проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mu B - A)^{-1} B d\mu : E_1 \rightarrow E_1, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} B(\mu B - A)^{-1} d\mu : E_2 \rightarrow E_2,$$

$\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$, порождают разложения пространств в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = N(P) \oplus R(P)$ и $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = N(Q) \oplus R(Q)$. Действия операторов A и B расщепляются таким образом, что непрерывно обратимы $A_0 : E_1^0 \rightarrow E_2^0$ и $B_1 : E_1^1 \rightarrow E_2^1$, ограничен $A_1 : E_1^1 \rightarrow E_2^1$, $QB = BP$ и $QA = AP$. Отсюда естественным образом вытекают вспомогательные тождества

$$BB_1^{-1}Q = Q, \quad AA_0^{-1}(I - Q) = I - Q, \quad (A_1B_1^{-1})^k BP = (A_1B_1^{-1})^{k-1} A_1P,$$

$$A(A_0^{-1}B_0)^k A_0(I - Q) = B_0(A_0^{-1}B_0)^{k-1} A_0(I - Q), \quad k \geq 1.$$

В дальнейшем изложении потребуется следующая вспомогательная лемма из [3]

Лемма 1. Пусть $\mathcal{R}(t)$ — резольвента ядра $k(t) = \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \theta(t) * g(t)\theta(t)$, тогда в сверточной алгебре \mathcal{D}'_+ справедливы равенства

$$\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \theta(t) * (\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * (\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)) = \delta(t),$$

$$\begin{aligned} \frac{t^{(k+1)N-1}}{((k+1)N-1)!} \theta(t) * (\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t))^{k+1} * (\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)) = \\ = \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!} \theta(t) * (\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t))^k, \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

здесь под степенью обобщенной функции понимается ее кратная свертка с собой, нулевая степень обобщенной функции есть $\delta(t)$.

В введенных здесь обозначениях сформулируем следующую

Теорема 1. Пусть оператор A спектрально ограничен относительно B , тогда интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!} \theta(t) * (\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t))^k (A_1B_1^{-1})^{k-1} Q - \\ - \sum_{q=0}^{+\infty} (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I - Q) (\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t))^q. \quad (5) \end{aligned}$$

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции проверим справедливость следующих двух сверточных равенств

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I_2 \delta(t), \quad \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = I_1 \delta(t),$$

где I_1, I_2 — тождественные операторы банаховых пространств E_1 и E_2 соответственно. Справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) &= BB_1^{-1} \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \theta(t) * \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t) \right) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right) Q + \\ &+ BB_1^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{(k+1)N-1}}{((k+1)N-1)!} \theta(t) * \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t) \right) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^{k+1} (A_1 B_1^{-1})^k Q - \\ &\quad - B \sum_{q=0}^{+\infty} (A_0^{-1} B_0)^q A_0^{-1} (I - Q) \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t) \right)^{q+1} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!} \theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^k (A_1 B_1^{-1})^k Q + \\ &+ AA_0^{-1} (I - Q) \delta(t) + A \sum_{q=0}^{+\infty} (A_0^{-1} B_0)^{q+1} A_0^{-1} (I - Q) \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t) \right)^{q+1}. \end{aligned}$$

Отсюда в соответствии со вспомогательными тождествами и леммой получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) &= Q \delta(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!} \theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^k (A_1 B_1^{-1})^k Q - \\ &\quad - B_0 \sum_{q=0}^{+\infty} (A_0^{-1} B_0)^q A_0^{-1} (I - Q) \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t) \right)^{q+1} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!} \theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^k (A_1 B_1^{-1})^k Q + \\ &\quad + (I - Q) \delta(t) + B_0 \sum_{q=0}^{+\infty} (A_0^{-1} B_0)^q A_0^{-1} (I - Q) \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t) \right)^{q+1} = \\ &= Q \delta(t) + (I - Q) \delta(t) = I \delta(t). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) &= B_1^{-1} Q B \delta(t) + B_1^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!} \theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^k (A_1 B_1^{-1})^k Q B - \\ &\quad - \sum_{q=0}^{+\infty} (A_0^{-1} B_0)^q A_0^{-1} (I - Q) B \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t) \right)^{q+1} - \\ &\quad - B_1^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!} \theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^k (A_1 B_1^{-1})^{k-1} Q A + \end{aligned}$$

$$+A_0^{-1}(I-Q)A\delta(t) + \sum_{q=0}^{+\infty} (A_0^{-1}B_0)^{q+1} A_0^{-1}(I-Q)A \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t) \right)^{q+1}.$$

Поскольку

$$B_1^{-1}QB = B_1^{-1}BP = P, \quad (A_1B_1^{-1})^k QB = (A_1B_1^{-1})^k BP = (A_1B_1^{-1})^{k-1} A_1P, \\ (A_1B_1^{-1})^{k-1} QA = (A_1B_1^{-1})^{k-1} A_1P, \quad A_0^{-1}(I-Q)A = A_0^{-1}A_0(I-P) = I - P,$$

тогда

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = P\delta(t) + (I - P)\delta(t) = I\delta(t).$$

□

Замечание 1. Если бесконечность является устранимой особой точкой [2] для $(\mu B - A)^{-1}$ (B -резольвенты оператора A), т.е. $A_0^{-1}B_0 \equiv 0$, то представление (5) для фундаментальной оператор-функции $\mathcal{E}_N(t)$ имеет следующий наиболее простой вид

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = B_1^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!} \theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^k (A_1B_1^{-1})^{k-1} Q - A_0^{-1}(I-Q)\delta(t).$$

Замечание 2. Если в условиях теоремы 1 бесконечность является устранимой особой точкой для $(\mu B - A)^{-1}$, то обобщенное решение (4) задачи (1), (2) является регулярной обобщенной функцией и имеет вид

$$\tilde{u}(t) = B_1^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!} \theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^k * (A_1B_1^{-1})^{k-1} Qf(t)\theta(t) - A_0^{-1}(I-Q)f(t)\theta(t) \\ + \sum_{j=0}^{N-1} B_1^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{kN-1-j}}{(kN-1-j)!} \theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^k * (A_1B_1^{-1})^{k-1} QBu_{N-1-j}\delta(t). \quad (6)$$

Далее из формулы (6) прямыми вычислениями находим

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{u}(t) \right|_{t=0} = -A_0^{-1}(I-Q)f^{(j)}(0) + B_1^{-1}QB u_j = P u_j - A_0^{-1}(I-Q)f^{(j)}(0).$$

Поскольку функция $\tilde{u}(t)$ удовлетворяет уравнению (1), то потребовав выполнения условий $\tilde{u}^{(j)}(0) = u_j$, получим

Теорема 2. Пусть оператор A спектрально ограничен относительно B , бесконечность является устранимой особой точкой для B -резольвенты оператора A , $f(t)$ — достаточно гладкая, то задача Коши (1), (2) имеет единственное решение класса $C_+^N(t \geq 0, E_1)$ вида (6), если выполнены условия

$$(I - Q) \left(Au_j + f^{(j)}(0) \right) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1.$$

2. Приложения

Рассмотрим две начально-краевые задачи теории вязкоупругости [4].

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta) u_t - \Delta u - \int_0^t g(t-s) (\alpha - \Delta) u(s, \bar{x}) ds = f(t, \bar{x}), \quad (7)$$

в котором $u = u(t, \bar{x})$ — искомая функция, $\bar{x} \in \Omega \subset R^m$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Будем искать функцию $u = u(t, \bar{x})$, определенную на цилиндре $R_+ \times \Omega$ и удовлетворяющую начально-краевым условиям

$$u \Big|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega, \quad u \Big|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Задача Коши–Дирихле (7), (8) редуцируется к задаче Коши (1), (2) если положить $\alpha = \lambda$, пространства E_1 и E_2 выбрать как соболевские

$$E_1 \equiv \left\{ v(\bar{x} \in W_2^2(\Omega) : v \Big|_{\partial\Omega} = 0) \right\}, \quad E_2 \equiv W_2(\Omega), \quad (9)$$

операторы A и B определить формулами

$$B = \lambda - \Delta, \quad A = \Delta, \quad \lambda \in \sigma(B). \quad (10)$$

В этом случае оператор A является спектрально ограничен относительно B , и бесконечность является устранимой особой точкой B -резольвенты оператора A . В соответствии с теоремой 2 получаем следующую

Теорема 3. Пусть для задачи Коши–Дирихле (7), (8) пространства E_1 и E_2 определены как в (9), операторы A и B как в (10), то существует единственное решение $u(t, \bar{x}) \in C^1(t \geq 0, E_1)$ задачи (7), (8) если начально-краевые условия (8) удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x})) = 0,$$

здесь $\varphi_i(\bar{x})$ собственные функции оператора Лапласа, соответствующие собственному значению $\lambda \in \sigma(B)$.

Пример 2. Для уравнения

$$(\lambda - \Delta) u_{tt} - \beta \Delta u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s) (\alpha - \Delta) u(s, \bar{x}) ds = f(t, \bar{x}), \quad (11)$$

с начально-краевыми условиями

$$u \Big|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad u_t \Big|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega, \quad u \Big|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

положим $\beta = 0$, $\alpha = \lambda$, пространства E_1 и E_2 выберем как в (9), операторы A и B как в (10), тогда справедлива

Теорема 4. Если для задачи Коши–Дирихле (11), (12), $\beta = 0$, пространства E_1 и E_2 и операторы A и B выбрать как в (9) и (10), то задача Коши–Дирихле однозначно разрешима в классе $C^2(t \geq 0, E_1)$, если начально-краевые условия (12) удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x})) = 0,$$

$$(\lambda u_1(\bar{x}) + f_t(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x})) = 0,$$

здесь $\varphi_i(\bar{x})$ те же, что в теореме 3.

Замечание 3. Представленные здесь результаты допускают обобщение на случаи секториальной и радиальной ограниченности [5] операторного пучка $(\mu B - A)^{-1}$.

Работа проводилась при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, госконтракт № 14.В37.21.0365

Литература

1. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinityn and M. Falaleev. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
2. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // УМН. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.
3. Фалалеев, М.В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения / М.В. Фалалеев // Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2012. – Т. 5, № 2. – С. 90–102.
4. Cavalcanti, M.M. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping / M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Meth. Appl. Sci. – 2001. – V. 24. – P. 1043–1053.
5. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

Михаил Валентинович Фалалеев, доктор физико-математических наук, профессор, кафедры «Математического анализа и дифференциальных уравнений», Иркутский государственный университет (г. Иркутск, Российская Федерация), mihail@ic.isu.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 4, pp. 101–107.

MSC 34G10

Linear Models in Theory of Viscoelasticity of Sobolev Type

M. V. Falaleev, Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation, mihail@ic.isu.ru

In this paper the Cauchy problem for integral differential equation in Banach spaces of a Sobolev type is analyzed by the methods of fundamental operator-functions theory and the theory of operator semigroups with kernels. Fundamental operator-function is constructed and with its help constructive formulae for generalized solution in class of distributions with left-bounded support are obtained. Equal conditions for generalized and classical solutions are described. Abstract results are illustrated by Cauchy–Dirichle problems arised in mathematical theory of viscoelasticity.

Keywords: Banach spaces; generalized functions; viscoelasticity.

References

1. Sidorov N., Loginov B., Sinityn A., Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2002.
2. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups [К общей теории полугрупп операторов]. *Russ. Math. Surv.*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 47–74.

3. Falaleev M.V. Integro-Differential Equations with Fredholm Operator by the Derivative of the Highest Order in Banach Spaces and Its Applications [Integro-differentsialnyye uravneniya s fredgolmovym operatorom pri starshey proizvodnoy v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya]. *J. News of Irkutsk State University. Series «Mathematics»*, Irkutsk, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 90–102.
4. Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2001, vol. 24, pp. 1043–1053.
5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003.

Поступила в редакцию 10 сентября 2013 г.