УДК 519.642.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ В ПРОТЯЖЕННОЙ ЛИНИИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

С.Н. Какушкин

Работа посвящена описанию нового численного метода вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, основанного на методе регуляризованных следов. Построена математическая модель вычисления значений собственных функций спектральной задачи об электрических колебаниях в протяженной линии. Разработанные алгоритмы позволяют вычислять значения собственной функции возмущенного оператора незавсимо от того, известны предыдущие значения собственных функции или нет. Получены оценки остатков сумм функциональных рядов «взвешенных» поправок теории возмущений возмущенных самосопряженных операторов, и доказана их сходимость. Для вычислительной реализации метода найдены эффективные алгоритмы нахождения «взвешенных» поправок теории возмущений. Проведенные численные эксперименты вычисления значений собственных функций задачи об электрических колебаниях в протяженной линии показывают, что метод хорошо согласуется с другими известными методами А.Н. Крылова и А.М. Данилевского. Метод регуляризованных следов показал свою надежность и высокую эффективность.

Ключевые слова: задача Штурма – Лиувилля, собственные числа, собственные функции, теория возмущений, метод регуляризованных следов.

В последнее время все большее значение приобретают вопросы математического моделирования нахождения собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов [1, 2]. Рассмотрим задачу об электрических колебаниях в протяженной линии, собственные колебания которой описываются собственными значениями задачи Штурма – Лиувилля [3]:

$$-y''(x,\mu)+q(x)y(x,\mu)=\mu y(x,\mu), \qquad (1)$$

$$y'(0,\mu)-(p_1+p_2\mu)y(0,\mu)=0,$$

$$y'(1,\mu)+(p_3+p_4\mu)y(1,\mu)=0,$$

где $p_1=\dfrac{C}{C_0}$, $p_2=-\dfrac{L_0}{L}$, $p_3=\dfrac{C}{\tilde{C}_0}$, $p_4=-\dfrac{\tilde{L}_0}{L}$, C и L – коэффициенты емкости и самоиндукции, рассчитанные на единицу длины провода. Исходя из физического смысла задачи, коэффициенты $p_i,\ i=\overline{1,4}$ должны быть вещественными. Физически граничные условия означают, что левый конец провода заземлен через сосредоточенную самоиндукцию L_0 и емкость C_0, а правый – через сосредоточенную самоиндукцию $\tilde{L}_0$ и емкость $\tilde{C}_0$. Предполагается, что сосредоточенная самоиндукция и емкость соединены последовательно. Для определенности будем считать, что длина провода равна единице.

В работах [4, 5] разработан неитерационный метод регуляризованных следов (РС) вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. Следуя обозначениям метода РС, перепишем уравнение (1) в виде:

$$(T+P)u = \mu u,\ u(x) \in D_T, \tag{2}$$

где $D_T = \Big\{ u \mid u \in C^2(0,1) \bigcap C^1(0,1), \dfrac{d^2u}{dx^2} \in L_2(0,1), \dfrac{du(x)}{dx}\Big|_{x=0} - (p_1 + p_2\mu)u(x)\Big|_{x=0} = \dfrac{du(x)}{dx}\Big|_{x=1} + (p_3 + p_4\mu)u(x)\Big|_{x=1} = 0 \Big\}$, $T = -\Delta$ – оператор Лапласа, $P = q(x)$ – потенциал, $x \in (0,1)$. Собственные числа λ_n невозмущенного оператора T являются корнями уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}\dfrac{h_1+h_2}{\lambda - h_1h_2}$, а соответствующие им собственные функции $v(x)$ имеют вид: $v_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n + h_1^2}}(h_1 \sin\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)$, где $h_1 = p_1 + p_2\lambda$, $h_2 = p_3 + p_4\lambda$. Обозначим через n_0 количество всех неравных друг другу λ_n, лежащих внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{|\lambda_{n_0+1} + \lambda_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости.

Теорема 1. *Если T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, с областью определения в D, и для всех натуральных $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n = \dfrac{2||P||}{|\lambda_{n+1} - \lambda_n|} < 1$, то значение произведения собственной функции $u_n(x)$ на ее сопряженную $\overline{u}_n(y)$, при любых значениях аргументов $x,\ y \in D$, можно найти по формулам:*

$$u_n(x)\overline{u}_n(y) = \frac{1}{\mu_n}\Big(\lambda_n v_n(x)\overline{v}_n(y) + \sum_{k=1}^{t}[\alpha_k^{(1)}(n,x,y) - \alpha_k^{(1)}(n-1,x,y)]\Big) + \widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y), \tag{3}$$

где для $\widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y)$ справедливы оценки

$$|\widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y)| \leq \frac{2||P||}{\mu_n} C_0^4 S_n \rho_n^2 \frac{q^t}{1-q},\ \forall t \in N,\ n = \overline{1,n_0}.$$

Здесь $S_n = \sup\limits_{\lambda_i}\Big(\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{\infty} \dfrac{1}{|\lambda_n - \lambda_i|}\Big)^2$, $|v_i(x)| \leq C_0\ \forall i = \overline{1,\infty}$, $q = \max\limits_{n\geq 1} q_n$.

«Взвешенные» поправки теории возмущений $\alpha_k^{(1)}(n,x,y)$, $k = \overline{1,\infty}$, входящие в формулы (3), можно найти, используя следующую теорему.

Теорема 2. *Если T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n < 1$, то „взвешенные“, поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)$ для любых натуральных k, p и n_0 можно найти по формулам:*

$$\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y) = -\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{j_1,\dots,j_{k+1}=1}^{\infty} v_{j_1}(x)\overline{v}_{j_{k+1}}(y) r_k^{(p)}(n,j_1,\dots,j_{k+1}) \prod_{m=1}^{k} V_{j_m j_{m+1}}, \tag{4}$$

$$\text{где } r_k^{(p)}(n,j_1,\dots,j_{k+1}) = \begin{cases} 0,\ \forall j_m \neq n, m = \overline{1,k+1}; \\ \frac{1}{k!}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n} \frac{d^k}{d\lambda^k}\lambda^p,\ l = k+1; \\ \frac{1}{(l-1)!}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}\frac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}}\Big(\frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k-l+1}(\lambda-\lambda_{j_m})}\Big),\ 0 < l \leq k; \end{cases}$$

$V_{i,j} = (Pv_i, v_j)$ – *скалярное произведение; l- число совпадений* $j_m = n$, $m = \overline{1, k+1}$.

Был проведен вычислительный эксперимент по нахождению значений собственных функций спектральной задачи (2). Значения собственных функций u_n вычислялись по формулам (3). Суммы функциональных рядов Рэлея – Шредингера приближались четырьмя «взвешенными» поправками теории возмущений по формулам (4). Значения собственных функций u_n спектральной задачи (2), вычисленные методом РС, сравнивались со значениями, найденными методом А.Н. Крылова. Результаты вычисления значений тринадцатой собственной функции приведены в таблице. Первые обозначены – $\widehat{u}_{13}(x)$, а вторые – $\widetilde{u}_{13}(x)$.

Таблица

Значения тринадцатой собственной функции задачи Штурма – Лиувилля (1), вычисленные при $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$, $p_4 = 0$ и потенциалом $q(x) = x^2$

i	x_i	$\widehat{u}_{13}(x_i)$	$\widetilde{u}_{13}(x_i)$	$\lvert\widehat{u}_{13}(x_i) - \widetilde{u}_{13}(x_i)\rvert$	$\frac{\lvert\widehat{u}_{13}(x_i) - \widetilde{u}_{13}(x_i)\rvert}{\lvert\widetilde{u}_{13}(x_i)\rvert}\%$
1	0,095238	−1,284995	−1,285037	0,000041	0,003226
2	0,142857	0,859796	0,859596	0,000199	0,023195
3	0,190476	0,898039	0,897731	0,000308	0,034311
4	0,238095	−1,264164	−1,264311	0,000146	0,011609
5	0,285714	−0,329073	−0,329143	0,000070	0,021281
6	0,333333	1,412499	1,412254	0,000245	0,017351
7	0,380952	−0,306695	−0,306993	0,000298	0,097239
8	0,428571	−1,274733	−1,274854	0,000121	0,009478
9	0,476190	0,880529	0,880433	0,000095	0,010857
10	0,523809	0,878726	0,878454	0,000272	0,031011
11	0,571428	−1,276228	−1,276495	0,000266	0,020867
12	0,619047	−0,304623	−0,304712	0,000089	0,029144
13	0,666666	1,413653	1,413536	0,000117	0,008295
14	0,714285	−0,331369	−0,331649	0,000280	0,084491
15	0,761904	−1,264955	−1,265172	0,000216	0,017116
16	0,809523	0,900513	0,900457	0,000055	0,006215
17	0,857142	0,860215	0,860080	0,000135	0,015679
18	0,904761	−1,287601	−1,287871	0,000269	0,020894
19	0,952380	−0,281363	−0,281518	0,000155	0,055095

Из таблицы видно, что результаты вычисления значений собственных функций методом РС хорошо согласуются с результатами, полученными методом А.Н. Крылова. При этом метод РС показал надежность и высокую эффективность.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А. Свиридюк // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1990. – №12. – С. 65–70.
2. Новый метод вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической теории устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В.А. Садовничий // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 381, № 3. – С. 320–324.

3. Валеев, Н.Ф. О задаче определения параметров граничных условий оператора Штурма-Лиувилля по спектру / Н.Ф. Валеев, С.А. Рабцевич, Э.Р. Нугуманов // Вестник СамГУ. – 2009. – №6 (72). – С. 12–20.

4. Кадченко, С.И. Вычисление значений собственных функций дискретных полуограниченных снизу операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник СамГУ. – 2012. – №6 (97). – С. 13–21.

5. Кадченко, С.И. Алгоритм нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – №40 (299), вып. 14. – С. 71–76.

Сергей Николаевич Какушкин, аспирант, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет (г. Магнитогорск, Российская Федерация), kakushkin-sergei@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 3, pp. 125–129.

MSC 47A75

Mathematical Modelling of Finding the Values of Eigenfunctions for the Electrical Oscillations in the Extended Line Problem Using the Method of Regularized Traces

S.N. Kakushkin, Magnitogorsk State University, Magnitogorsk, Russian Federation, kakushkin-sergei@mail.ru

This paper describes a new numerical method for computing the values of the eigenfunctions of perturbed self-adjoint operators. The new method is based on the method of regularized traces. A mathematical model for calculating the eigenfunction values of the spectral problem concerning electrical oscillations in the extended line is developed. The elaborated algorithms make it possible to calculate the values of the eigenfunction of the perturbed operator whether the previous values are known or not. We've obtained the estimates of functional series residual sum«suspended» the corrections of the perturbation theory of perturbed self-adjoint operators, and proved their convergence. Effective algorithms for finding«suspended» perturbation theory corrections are discovered for the numerical implementation of the method. The numerical experiments on the calculation of the values of a problem on its own electrical oscillations in the extended lines show that the method is consistent with the other well-known methods of A.N.Krylov and A.M.Danilevsky. The method of regularized traces proved its reliability and high efficiency.

Keywords: Sturm – Liouville problem, eigenvalues, eigenfunctions, perturbation theory, the method of regularized traces.

References

1. Sviridyuk G.A. Solubility of the Thermal Convection of Viscoelastic Incompressible Fluid. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika),* 1990, vol. 34, no. 12, pp. 80–86.

2. Dubrovckiy V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichiy V.A. A New Method of Calculation of the First Eigenvalues of the Spectral Problem of Hydrodynamic Stability Theory Cramped Viscous Fluid Between Two rotating Cylinders. *Doklady Akademii nauk [Doklady Mathematics]*, 2001, vol. 381, no. 3, pp. 320–324. (in Russian)

3. Valeev N.F., Rabtsevich S.A., Nugumanov E.R. The Problem of Determining the Parameters of the Boundary Conditions of the Sturm – Liouville Operator on the Spectrum. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya,* 2009, no. 6 (72), pp. 12–20. (in Russian)

4. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Calculation of the Values of Natural Functions of Discrete Semi-Bounded from Below by the Operators of Regularized Traces. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya,* 2012, no. 6 (97), pp. 13–21. (in Russian)

5. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Algorithm for Finding the Values of the Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators Perturbed by Regularized Traces. *Bulletin of the South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫,* 2012, no. 40 (299), issue 14, pp. 71–76. (in Russian)

Поступила в редакцию 9 июня 2013 г.