

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГРАВИМЕТРИИ

В.В. Васин, Е.Н. Акимова, А.Ф. Миниахметова

В статье представлен краткий обзор подходов к построению итерационных процессов ньютоновского и градиентного типов для устойчивой аппроксимации решений нелинейных нерегулярных операторных уравнений в гильбертовых пространствах. Для двухэтапного алгоритма, основанного на схеме регуляризации Лаврентьева и модифицированном методе Ньютона, формулируются теоремы сходимости и обсуждаются результаты численного решения трехмерной обратной задачи гравиметрии для модели двухслойной среды.

Ключевые слова: нерегулярное операторное уравнение, модифицированный метод Ньютона, обратная задача гравиметрии.

Введение

Нелинейное уравнение первого рода

$$A(u) = f \quad (1)$$

с оператором A , действующим на паре вещественных гильбертовых пространств U, F , и имеющим разрывный обратный оператор A^{-1} , служит достаточно общей формой постановки обратных некорректно поставленных задач. Ввиду нелинейности оператора A и приближенного задания правой части, $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ основными методами приближенного решения уравнения (1) являются итерационные процессы градиентного и ньютоновского типов, учитывающие нерегулярность задачи (1).

В современных исследованиях условно можно выделить несколько подходов к построению регулярных итерационных процессов для устойчивой аппроксимации решения некорректно поставленной задачи (1).

Первый из них, основанный на идее итеративной регуляризации, связанной с введением переменных управляющих параметров (т.е. параметров регуляризации) и их априорном или апостериорном выборе, гарантирующим сходимость итераций. Примером могут служить построенные на этой методологии итеративно регуляризованные методы Ньютона и Гаусса–Ньютона, предложенные и исследованные в работах [1–3]:

$$u^{k+1} = u^k - (A'(u^k) + \alpha_k I)^{-1}(A(u^k) + \alpha_k(u^k - u^0) - f_\delta), \quad (2)$$

$$u^{k+1} = u^k - (A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha_k I)^{-1}(A'(u^k)^* A(u^k) - f_\delta) + \alpha_k(u^k - u^0), \quad (3)$$

и метод Левенберга–Марквардта

$$u^{k+1} = u^k - (A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha_k I)^{-1}(A'(u^k)^* A(u^k) - f_\delta) + \alpha_k(u^k - u^0), \quad (4)$$

который получается из метода Гаусса–Ньютона (3) заменой начального приближения u^0 итерацией u^k , полученной на предыдущем шаге. Отметим здесь работы [4–6], в которых исследовался этот процесс.

Во втором подходе управляющие параметры фиксированы либо отсутствуют, но при этом формулируется правило останова итераций в зависимости от уровня погрешности δ , например, из принципа невязки

$$k(\delta) : \|A(u^{k(\delta)}) - f_\delta\| \leq \tau\delta < \|A(u^k) - f_\delta\|, \quad k = 0, 1, \dots, k(\delta) - 1.$$

На этом пути были исследованы метод Ландвебера [7, 8]

$$u^{k+1} = u^k - \mu(A^*(u^k))(A(u^k) - f_\delta), \quad \mu > 0, \quad (5)$$

а также нелинейные аналоги метода наискорейшего спуска (МНС)

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|S(u^k)\|^2}{A'(u^k)S(u^k)\|^2} S(u^k) \quad (6)$$

и метода минимальной ошибки (ММО)

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|A(u^k) - f_\delta\|^2}{\|S(u^k)\|^2} S(u^k), \quad S(u^k) = A'(u^k)(A(u^k) - f_\delta), \quad (7)$$

предложенные и исследованные в работе [9].

В третьем подходе, развитом в работах [10–11], методы ньютоновского типа, например, (3), (4), приобретают вид:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k)^*A'(u^k) + \beta I)^{-1}(A'(u^k)^*(A'(u^k) - f_\delta) + \alpha(u^k - u^0)) \equiv T(u^k), \quad (8)$$

т.е. вводится дополнительный демпфирующий множитель γ и управляющие параметры α , β допускаются быть различными и могут выбираться независимо, только $\beta \geq \alpha$. Такая трехпараметрическая форма итерационного процесса открывает дополнительные возможности при исследовании сходимости итераций, получении оценок погрешности и позволяет избавиться в некоторых случаях от дополнительных структурных условий на оператор A . Данная методика допускает следующую интерпретацию. Строится двухэтапный алгоритм, в котором на первом этапе исходное уравнение регуляризуется методом Тихонова

$$S_\alpha(u) \equiv A'(u)^*(A(u) - f_\delta) + \alpha(u - u^0) = 0, \quad (9)$$

а затем к уравнению (9) при фиксированном параметре α применяется итерационный процесс (8) или его модифицированные аналоги [10–13]

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^0)^*A'(u^0) + \beta I)^{-1}(A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta) + \alpha(u^k - u^0)), \quad (10)$$

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^0)^*A'(u^0) + \beta I)^{-1}(A'(u^0)^*(A(u^k) - f_\delta) + \alpha(u^k - u^0)). \quad (11)$$

Заметим, что в отличие от (10) процесс (11) аппроксимирует решение регуляризованного уравнения

$$A'(u^0)^*(A(u^k) - f_\delta) + \alpha(u^k - u^0) = 0,$$

отличное от (9).

Если операторное уравнение (1) допускает регуляризацию в форме метода Лаврентьева

$$A(u) + \alpha u = f_\delta, \quad (12)$$

то для аппроксимации решения u_α регуляризованного уравнения (12) применимы метод ньютоновского типа

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \beta I)^{-1}(A(u^k) + \alpha u^k - f_\delta), \quad (13)$$

который для $\gamma = 1$, $\beta = \alpha$ переходит в схему из [2], либо модифицированный аналог процесса (13) (см. [14])

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^0) + \beta I)^{-1}(A(u^k) + \alpha u^k - f_\delta) = T(u^k), \quad (14)$$

который при $\gamma = 1$, $\beta = \alpha$ при иных предположениях рассматривался в [13].

Двухэтапные алгоритмы строятся также на основе методов градиентного типа. Например, процессы в такой форме с привлечением метода Ландвебера (5) исследовались в работах [15, 16]. Регуляризованный метод наискорейшего спуска в рамках этого же подхода, т.е. для устойчивой аппроксимации решения u_α регуляризованного уравнения (9) рассматривался в [11], он имеет вид:

$$S_\alpha(u) = A'(u)^*(A(u) - f_0) + \alpha(u - u^0),$$

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|S_\alpha(u^k)\|^2}{\|A'(u^k)S_\alpha(u^k) + \alpha S_\alpha(u^k)\|^2} S_\alpha(u^k).$$

Вопросы слабой сходимости метода Ландвебера (5), методов наискорейшего спуска и минимальной ошибки в форме (6), (7) были предметом исследования работ [17, 18].

Статья организована следующим образом. В разделе 1 исследуется модифицированный метод Ньютона (ММН) в форме (14), когда в обрабатываемом операторе производная оператора A вычисляется в фиксированной точке, что является привлекательным свойством процесса с точки зрения численной реализации.

Результаты численных экспериментов решения структурной задачи гравиметрии методами (13), (14) обсуждаются в разделе 2.

1. Модифицированный метод Ньютона

Рассмотрим модифицированный метод Ньютона в форме (14). Введем обозначение $F_0(u) = B_0^{-1}(A(u) + \beta(u - u^0) - f_\delta)$, где $B_0 = (A'(u^0) + \beta I)$, где u^0 – некоторое начальное приближение.

Следующая теорема дает достаточные условия сходимости процесса (14) к решению уравнения, разрешимость которого предполагается.

Теорема 1. Пусть $A : U \rightarrow U$ – непрерывно дифференцируемый оператор с условиями

$$\|A'(u)\| \leq N_1, \quad \|A'(u_1) - A'(u_2)\| \leq N_2 \|u_1 - u_2\|, \quad \forall u, u_i \in U, \quad (15)$$

$A'(u^0)$ – самосопряженный неотрицательно определенный оператор. Если начальное приближение u^0 и параметры $\alpha \leq \beta$, r , N_1 , N_2 удовлетворяют условиям:

$$\|u^0 - u_\alpha\| \leq r, \quad 0 < \alpha \leq \beta, \quad r = \alpha / (6N_2), \quad \beta \geq 3N_1,$$

то при $\gamma < \alpha\beta / (\alpha + N_1^2)^2$ последовательность u^k , порождаемая процессом (14), сходится сильно к решению u_α уравнения (12), и выполнено соотношение

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\|^2 \leq \|u^k - u_\alpha\|^2 - \nu \|u^{k+1} - u^k\|^2 \quad (16)$$

при некотором $\nu > 0$.

Доказательство. Убедимся сначала, что оператор F_0 монотонен в точке u_α . Действительно, имеем для $u \in S_r(u_\alpha)$:

$$\langle F_0(u) - F_0(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle = \alpha \langle B_0^{-1}(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + B_0^{-1} \langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle =$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha \langle B_0^{-1}(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \langle B_0^{-1} \int_0^1 A'(u_\alpha + \vartheta(u - u_\alpha))(u - u_\alpha) d\vartheta, u - u_\alpha \rangle = \\
 &= \alpha \langle B_0^{-1}(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \langle B_0^{-1} \int_0^1 A'[u_\alpha + \vartheta(u - u_\alpha)] - A'(u_0)(u - u_\alpha) d\vartheta, u - u_\alpha \rangle + \\
 &+ \langle B_0^{-1} A'(u_0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{\alpha}{\beta + N_1} \|u - u_\alpha\|^2 - \frac{N_2}{\beta} \int_0^1 [(1 - \vartheta) \|u_\alpha - u^0\| + \vartheta \|u - u^0\|] d\vartheta \|u - u_\alpha\|^2 \geq \\
 &\geq \frac{\alpha}{\beta + N_1} \|u - u_\alpha\|^2 - \frac{3N_2 r}{2\beta} \|u - u_\alpha\|^2.
 \end{aligned}$$

□

Учитывая в последнем соотношении условия на параметры r , α , β , приходим к оценке

$$\langle F_0(u), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{\alpha}{2\beta} \|u - u_\alpha\|^2. \tag{17}$$

Принимая во внимание оценку

$$\begin{aligned}
 \|F_0(u)\| &= \|B_0^{-1}[A(u) + \alpha(u - u^*) - f_\delta]\| = \|B_0^{-1}[A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta - (A(u_\alpha) + \alpha(u_\alpha - u^0) - f_\delta)]\| \leq \\
 &\leq \alpha \|B_0^{-1}(u - u_\alpha)\| + \|B_0^{-1}(A(u) - A(u_\alpha))\| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{N_1}{\beta}\right) \|u - u_\alpha\|
 \end{aligned}$$

и установленное неравенство (16), приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
 \|F_0(u)\|^2 &= \|B_0^{-1}[A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta]\|^2 \leq \varkappa < \\
 < u - u_\alpha, B_0^{-1}(A(u_0) + \alpha(u - u^0) - f_0) > = \varkappa < u - u_\alpha, F_0(u) >, \tag{18}
 \end{aligned}$$

где $\varkappa = 2(\alpha + N_1)^2/\beta\alpha$.

Сильная фейеровость (псевдосжимаемость) оператора шага T процесса (14), означает выполнение неравенства (см. определение 1.3 в [18])

$$\|T(u) - u_\alpha\|^2 - \|u - u_\alpha\|^2 + \nu \|T(u) - u\|^2 \leq 0 \tag{19}$$

для некоторого $\nu > 0$, что эквивалентно

$$-\frac{2}{\gamma(1 + \nu)} \langle u - u_\alpha, B_0^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta) \rangle + \|B_0^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta)\|^2 \leq 0. \tag{20}$$

С учетом оценки (17) при $\gamma < 2/\varkappa$ неравенства (18), (19) будут выполнены для $\nu = 2/\gamma\varkappa - 1$.

Из (19) при $u = u^k$ для процесса (14) имеем соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = d \geq 0, \quad u^{k+1} - u^k = B_0^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \rightarrow 0,$$

что, ввиду (17), влечет сильную сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$$

и, кроме того, выполнение свойства (16).

Во многих прикладных задачах, в частности, в обратных задачах геофизики, соотношения (15) для норм производной оператора A не выполняются для всех элементов $u \in U$, но их можно удовлетворить лишь для некоторого подмножества $Q \in U$ [19], [20]. Чтобы охватить этот случай и построить сходящийся итерационный процесс, достаточно несколько модифицировать итерационную схему (14) и перейти к процессу

$$u^{k+1} = P_Q(T(u^k)), \quad (21)$$

где T – оператор шага метода (14), P_Q – оператор метрического проектирования на выпуклое замкнутое подмножество $Q \in U$.

Заметим, что оператор P_Q определен на всем пространстве U и является однозначным псевдосжимающим отображением с константой $\nu = 1$ в соотношении (19) (см. [18], следствие (3.12)). Предполагаем, что регуляризованное решение u_α принадлежит Q .

Теорема 2. Пусть выполнены условия (15) для $u \in S_r(u_\alpha) \cap Q$ и все требования к оператору $A'(u_\alpha)$ и к выбору параметров r, α, β, γ из теоремы 1. Тогда при $u^0 \in S_r(u_\alpha) \cap Q$ последовательность, генерируемая процессом (21), сходится сильно к u_α , и выполнено соотношение (16).

Доказательство. Учитывая псевдосжимаемость операторов T и P_Q , имеем

$$\begin{aligned} \|P_Q T(u) - u_\alpha\|^2 &\leq \|T(u) - u_\alpha\|^2 - \|P_Q T(u) - T(u)\|^2 \leq \\ &\leq \|u - u_\alpha\|^2 - \nu \|T(u) - u\|^2 - \|P_Q T(u) - T(u)\|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) при $u = u^k$ следует существование предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = d \geq 0, \quad (23)$$

что влечет

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T(u^k) - u_k\| = \gamma \lim_{k \rightarrow \infty} \|B_0^{-1}[A(u^k) - f_\delta + \alpha(u^k - u_0)]\| = 0. \quad (24)$$

Объединяя (23), (24) с (17), приходим к соотношению

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\|^2 \leq \frac{2\bar{\alpha}}{\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} |\langle B_0^{-1}(A(u^k) - f_\delta + \alpha(u^k - u_0)), u^k - u_\alpha \rangle| = 0.$$

Неравенство (16) есть следствие псевдосжимаемости оператора $P_Q T$ (см. [18], теорема 1.8). □

Замечание 1. Из теорем 1, 2 следует, что итерационная последовательность u^k , генерируемая процессами (14), (21), порождает сильную аппроксимацию регуляризованного решения u_α , т.е. решения уравнения (12). При наличии теоремы сходимости (см., например, [14]) регуляризованных решений $u_{\alpha(\delta)}$ к точному решению \hat{u} уравнения (1), приходим к цепочке соотношений

$$u_{\alpha(\delta)}^{k(\delta)} \longrightarrow u_{\alpha(\delta)} \longrightarrow \hat{u} \quad \text{при} \quad \delta \longrightarrow 0,$$

что означает принципиальную возможность аппроксимации последовательностью u^k , порождаемой процессом (14), искомого решения уравнения (1).

Замечание 2. Методы ньютоновского и градиентного типов широко используются при решении обратных структурных задач гравиметрии и магнитометрии (см., например, [19])— [22]). В работе [19]) в серии численных экспериментов для обратной задачи гравиметрии с модельными и реальными данными было показано, что для достижения одной и той же точности при решении задачи неявные регуляризованные методы Ньютона, Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта уступают методам наискорейшего спуска (6) и минимальной ошибки (7) по затратам машинного времени. Это связано с тем, что пересчет и обращение оператора (в дискретной форме – матрицы) на каждом шаге процесса – весьма трудоемкая процедура.

Однако использование модифицированных методов в форме (10), (11), (14) существенно меняет ситуацию. Нахождение очередного приближения u^{k+1} в этом случае сводится (после дискретной аппроксимации уравнения) к решению СЛАУ с постоянной симметричной положительно определенной матрицей, что можно реализовать очень экономично, привлекая, например, метод квадратного корня или градиентные методы (см. раздел 2).

2. Восстановление модельного решения в обратной задаче гравиметрии

В декартовой системе координат с осью z , направленной вниз, уравнение гравиметрии имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma \Delta \sigma \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + [(y-y')^2 + H^2]^{1/2}} dx' dy' - \\ - \frac{1}{[(x-x')^2 + [(y-y')^2 + u^2(x', y')]^{1/2}} dx' dy' = \Delta g(x, y), \end{aligned} \quad (25)$$

где γ – гравитационная постоянная, $\Delta \sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ – скачок плотности на поверхности раздела сред, описываемой функцией $u(x, y)$, подлежащей определению, $f(x, y)$ – аномальное гравитационное поле, вызванное отклонением поверхности от асимптотической плоскости, $z = H$ – горизонтальная асимптотическая плоскость, т.е. для искомого решения $\hat{u}(x, y)$ выполнено соотношение

$$\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} |\hat{u}(x, y) - H| = 0.$$

Так как первое слагаемое в (25) не зависит от $u(x, y)$, то уравнение (25) можно записать в виде

$$[A(u)](x, y) = - \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + [(y-y')^2 + u^2(x', y')]^{1/2}} dx' dy' = f(x, y), \quad (26)$$

где $f(x, y) = \Delta g(x, y) + A(H)$.

Производная оператора A в точке $u^0(x, y)$ выражается формулой

$$[A'(u^0)] h = \iint_D \frac{u^0(x', y') h(x', y')}{[(x-x')^2 + [(y-y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{3/2}} dx' dy'.$$

Применяя к интегральному уравнению (26) двумерный аналог формулы прямоугольников с равномерной сеткой по каждой переменной с шагом Δx , Δy , получаем систему нелинейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_1} \frac{1}{[(x_k - x'_j)^2 + [(y_l - y'_i)^2 + u^2(x'_j, y'_i)]^{1/2}} \Delta x \Delta y = f(x_k, y_l), \quad k = 1, 2, \dots, m_1, \quad l = 1, 2, \dots, m_2$$

относительно неизвестного вектора $u_{j,i} = u(x_j, y_i)$, $j = 1, 2, \dots, m_1$, $i = 1, 2, \dots, m_2$, которую перепишем в векторно-матричном виде

$$A_n(u_n) = f_n, \tag{27}$$

где u_n, f_n – векторы размерности $n = m_1 \times m_2$.

Дискретный аналог производной $A'(u^0)$ принимает форму

$$(A_n^0 h_n)_{k,l} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\Delta x \Delta y u^0(x_j, y_i) h(x'_j, y'_i)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{3/2}}, \tag{28}$$

где (при $u^0(x, y) = \text{const}$) A_n^0 – симметричная матрица, компоненты которой вычисляются по формуле (28).

Рассмотрим модель двухслойной среды. Выберем начальное приближение $u^0 = H - \text{const}$, а модельное решение определим формулой

$$\hat{u}(x, y) = 5 - 2e^{-[(x/10-3.5)^2+(y/10-2.5)^2]} - 3e^{-[(x/10-5.5)^2+(y/10-4.5)^2]},$$

заданной на области $D = \{0 \leq x \leq 90, 0 \leq y \leq 100\}$.

Построим сетку с шагом $\Delta x = \Delta y = 1$, $n = 9000$ и положим $\Delta\sigma = 0.25$, $H = 5$.

Заметим, что на множестве вида $Q = \{0.5 \leq u(x, y) \leq 10\}$ выполнены условия (15) (см. [19]), что позволяет пользоваться теоремой 2. Кроме того, при принятых данных матрица A_n^0 – симметричная и положительно определенная, для которой вычисленное минимальное собственное число составляет $\lambda_{\min} \approx 0.0007$, а число обусловленности $\text{cond}(A_n^0) \approx 12206$.

Это означает, что для матрицы $A'(u^0)$, аппроксимирующей оператор $A'(u^0)$ при $u^0 = 5$ выполнены предположения теоремы 2, следовательно, для решения системы нелинейных уравнений (27) можно применить модифицированный метод Ньютона (14). Поскольку итерационные точки u_n^k при численной реализации процесса не выходят из множества Q , то в экспериментах $P_Q = I$.

На рис. 1 изображено модельное решение обратной задачи гравиметрии и синтетическое поле (правая часть уравнения (25)), полученное путем решения прямой задачи гравиметрии для области D .

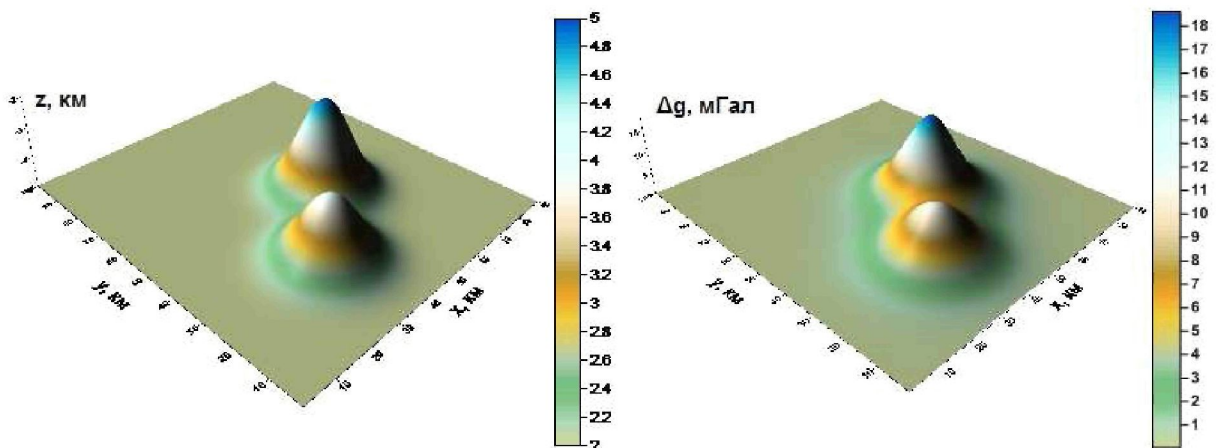


Рис. 1. Модельное решение задачи и синтетическое поле

На рис. 2 изображены численные решения задачи гравиметрии для точной и зашумленной правой части (с добавлением шума 5%).

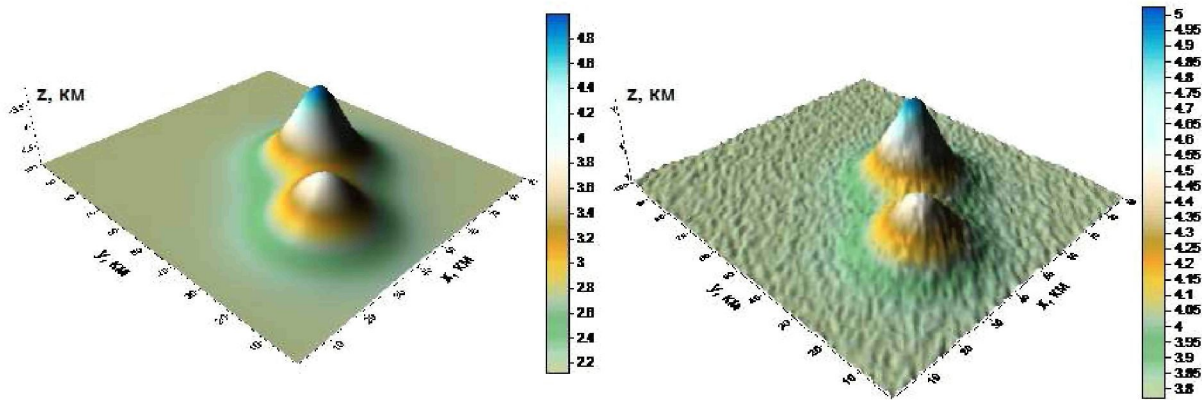


Рис. 2. Приближенные решения задачи для точной и зашумленной правой части

В таблице представлены для $N = 6$ итераций относительные погрешности восстановленного методом (14) численного решения \tilde{u}_n :

$$\Delta_1 = \frac{\|\hat{u}_n - \tilde{u}_n\|_{R^n}}{\|\hat{u}_n\|_{R^n}}, \quad \Delta_2 = \frac{\|A_n(\tilde{u}) - f_n\|_{R^n}}{\|f_n\|_{R^n}}$$

с точной правой частью $f_n = A_n(\hat{u}_n)$ для параметров процесса $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-4}$, а также относительные погрешности $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$ для зашумленной правой части \tilde{f}_n : $\|f_n - \tilde{f}_n\| = 0.05 \cdot \|f_n\|$ с параметрами $\beta = 10$, $\alpha = 10$.

Таблица

Относительные погрешности

N	Δ_1	Δ_2	$\tilde{\Delta}_1$	$\tilde{\Delta}_2$
1	0,01428	0,08468	0,16565	0,88230
2	0,00803	0,01142	0,06652	0,11393
3	0,00278	0,00489	0,05948	0,02317
4	0,00094	0,00203	0,05845	0,00597
5	0,00057	0,00477	0,05811	0,00194
6	0,00037	0,00015	0,05801	0,00074

Заключение

Численные эксперименты, выполненные для модельной задачи гравиметрии, показали, что при решении системы нелинейных уравнений (27) с числом неизвестных $n = 9000$ модифицированный метод Ньютона (14) демонстрирует существенно более высокую экономичность по затратам машинного времени, чем итеративно регуляризованный метод Ньютона (2). Это связано с тем, что при нахождении очередного приближения по методу (2) требуется пересчитывать матрицу $A'_n(u^k)$ в итерационной точке, в то время как для метода (14) матрица $A'_n(u^0)$ постоянна на всех этапах процесса. Кроме того, ввиду несимметричности $A'_n(u^k)$ необходимо переходить к уравнению вида

$$[A'_n(u^k)^T A_n(u^k) + \alpha I]x^{k+1} = d,$$

что увеличивает число операций и ухудшает обусловленность системы уравнений. Например, для получения относительной погрешности $\Delta_1 \approx 10^{-4}$ при точной правой части время решения задачи модифицированным методом Ньютона (14), на каждом шаге которого использовался метод минимальной ошибки, составило менее минуты, а методом Ньютона (2) — около одного часа. Модифицированные процессы (10), (11), (14) могут оказаться полезными при решении обратных задач зондирования ([8], стр. 77), в которых из-за многовариантности расчетов экономичность алгоритмов приобретает первостепенное значение.

Работа выполнена при финансовой поддержке УрО РАН в рамках программы Президиума РАН №18 (проект 12-П-15-2019) и при поддержке РФФИ (проект 12-01-00106). Данное исследование в УрФУ было частично поддержано грантом Правительства РФ № 11.G34.31.0064.

Литература

1. Бакушинский, А.Б. Регуляризирующий алгоритм на основе метода Ньютона–Канторовича для решения вариационных неравенств / А.Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.
2. Бакушинский, А.Б. К проблемам сходимости итеративно регуляризованного метода Гаусса–Ньютона / А.Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1992. – Т. 32, № 9. – С. 1503–1509.
3. Бакушинский, А.Б. Итеративные методы решения некорректных задач / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. – М.: Наука, 1989.
4. Hanke, M.A. A Regularization Levenberg-Marquardt Scheme with Applications to Inverse Groundwater Filtration Problems / M. Hanke // Inverse problems. – 1997. – V. 13. – P. 79–95.
5. Kaltenbacher, B. Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems / B. Kaltenbacher, A. Neubauer, O. Scherzer. – Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 2008.
6. Hanke, M. The Regularizing Levenberg–Marquardt Scheme is of Optimal Order / M. Hanke // Integral equations & Applications. – 2010. – V. 22, №. 2. – P. 259–283.
7. Scherzer, O. Convergence Criteria of Iterative Methods Based in Landweber Iteration for Solving Nonlinear Ill-Posed Problems / O. Scherzer // J. Math. Anal. Appl. – 1995. – V. 194. – P. 911–933.
8. Hanke, M.A. Convergence Analysis of the Landweber Iteration for Nonlinear Ill-Posed Problems / M. Hanke, A. Neubauer, O. Scherzer // Numer. Math. – 1995. – V. 72. – P. 21–37.
9. Neubauer, A. A Convergence Rate Result for a Steepest Descent Method and Minimal Error Method for the Solution of Nonlinear Ill-Posed Problems / A. Neubauer, O. Scherzer // J. Anal. Appl. – 1995. – V. 14, №. 2. – P. 369–377.
10. Васин, В.В. Метод Левенберга–Марквардта для аппроксимации нерегулярных операторных уравнений / В.В. Васин // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 3. – С. 28–37.
11. Vasin, V.V. Irregular Nonlinear Operator Equations: Tikhonov’s Regularization and Iterative Approximation / V.V. Vasin // J. Inv. Ill-Posed problems. – 2013. – V. 21, №. 1. – P. 109–123.
12. George, S. On Convergence of Regularized Newton’s Method for Nonlinear Ill-Posed Problems / S. George // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2010. – V. 18, №. 2. – P. 133–146.
13. George, S. An Analysis of Lavrentiev Regularization for Nonlinear Ill-Posed Problems Using an Iterative Regularization Method / S. George, A.I. Elmahdy // Int. J. Comput. Appl. Math. – 2010. – V. 5, №. 3. – P. 369–381.

14. Васин, В.В. Модифицированные процессы ньютоновского типа, порождающие фейеровские аппроксимации регуляризованных решений нелинейных уравнений / В.В. Васин // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 2. – С. 85–97.
15. Кокурин, М.Ю. Об организации глобального поиска при реализации схемы Тихонова / М.Ю. Кокурин // Известия вузов. Математика. – 2010. № 12. – С. 20–31.
16. Кокурин М.Ю. О выпуклости функционала Тихонова и итеративно регуляризованных методах решения нерегулярных операторных уравнений / М.Ю. Кокурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т.50, № 4. – С. 651–664.
17. Васин, В.В. О сходимости методов градиентного типа для нелинейных уравнений / В.В. Васин // Доклады РАН. – 1998. – Т. 359, № 1. – С. 7–9.
18. Vasin, V.V. Operators and Iterative Processes of Fejer Type. Theory and Applications / V.V. Vasin, I.I. Eremin. – Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 2009.
19. Vaisin, V.V. Iterative Processes of Gradient Type with Applications to Gravimetry and Magnitometry Inverse Problems / V.V. Vasin, G.G. Skorik // J. Inverse Ill-Posed Problems. – 2010. – V. 18, №. 1. – P. 855–876.
20. Васин, В.В. Метод Левенберга–Марквардта и его модифицированные варианты для решения нелинейных уравнений с приложением к обратной задаче гравиметрии / В.В. Васин, Г.Я. Пересторонина // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 11, № 2. – С. 53–61.
21. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойной среды / В.В. Васин, Г.Я. Пересторонина, И.Л. Пруткин, Л.Ю. Тимерханова // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, № 2. – С. 69–76.
22. Akimova, E.N. Stable Parallel Algorithms for Solving the Inverse Gravimetry and Magnitometry Problems / E.N. Akimova, V.V. Vasin // Intern. J. Engineering Modelling. – 2004. – V. 17, №. 1-2. – P. 13–19.

Владимир Васильевич Васин, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ОНЗАП Института математики и механики УрО РАН, профессор Уральского федерального университета кафедры вычислительной математики ИМКН (г. Екатеринбург, Российская Федерация), vasin@imm.uran.ru.

Елена Николаевна Акимова, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник ОНЗАП Института математики и механики УрО РАН, профессор Уральского федерального университета кафедры ВМиУМФ ИРИТ-РтФ (г. Екатеринбург, Российская Федерация), aen15@yandex.ru.

Алия Фиргатовна Миниахметова, программист ОНЗАП Института математики и механики УрО РАН, аспирант Уральского федерального университета кафедры ВМиУМФ ИРИТ-РтФ (г. Екатеринбург, Российская Федерация), afnapal@gmail.com.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 3, pp. 26–37.

MSC 45Q, 65N20

Iterative Newton Type Algorithms and Its Applications to Inverse Gravimetry Problem

V.V. Vasin, corresponding member of RAS, the main research scientist of Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS, professor of Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation, vasin@imm.uran.ru,

E.N. Akimova, leading research scientist of Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS, professor of Ural Federal University, Russian Federation, aen15@yandex.ru,

A.F. Miniakhmetova, programmer of Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS, postgraduate student of Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation, afinapal@gmail.com

The paper gives a brief overview of approaches to the construction of iterative processes of the Newton and gradient type for stable approximation of solutions to nonlinear irregular operator equations in Hilbert spaces. For two-stage algorithms based on Lavrentiev regularization scheme and a modified Newton's method the convergence theorem are formulated and the results of numerical solution to three-dimensional inverse gravimetry problem for two-layer model are discussed.

Keywords: irregular operator equation, modified Newton method, inverse gravimetry problem.

References

1. Bakushinskii A.B. Regularization Algorithm on the Basis the Newton–Kantorovich Method for Solving Variational Inequalities. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1967, vol. 7, no. 3, pp. 672–677. (in Russian)
2. Bakushinskii A.B. On the Problem of Convergence of the Gauss–Newton Iteratively Regularized Method. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1992, vol. 32, no. 9, pp. 1503–1509. (in Russian)
3. Bakushinskii A.B., Goncharsky A.V. *Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Iterative Methods for Solving Ill-posed Problems]. Moscow, Nauka, 1989.
4. Hanke M. A Regularization Levenberg–Marquardt Scheme with Applications to Inverse Groundwater Filtration Problems. *Inverse problems*, 1997, vol. 13, pp. 79–95.
5. Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. *Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems*. Berlin, N.Y., Walter de Gruyter, 2008.
6. Hanke M. The Regularizing Levenberg–Marquardt Scheme is of Optimal Order. *Integral equations & Applications*, 2010, vol. 22, no. 2, pp. 259–283.
7. Scherzer O. Convergence Criteria of Iterative Methods Based in Landweber Iteration for Solving Nonlinear Ill-Posed Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1995, vol. 194, pp. 911–933.
8. Hanke M., Neubauer A., Scherzer O. A Convergence Analysis of the Landweber Iteration for Nonlinear Ill-Posed Problems. *Numer. Math.*, 1995, vol. 72, pp. 21–37.
9. Neubauer A., Scherzer O. A Convergence Rate Result for a Steepest Descent Method and Minimal Error Method for the Solution of Nonlinear Ill-Posed Problems. *J. Anal. Appl.*, 1995, vol. 14, no. 2, pp. 369–377.
10. Vasin V.V. Levenberg–Marquardt Method for Approximation of Solutions to Irregular Operator Equations. *Automatika i Telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1993, no. 3, pp. 28–37 (in Russian).
11. Vasin V.V. Irregular Nonlinear Operator Equations: Tikhonov's Regularization and Iterative Approximation. *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 2013, vol. 21, no. 1, pp. 109–123.

12. George S. On Convergence of Regularized Newton's Method for Nonlinear Ill-Posed Problems. *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 133–146.
13. George S., Elmahdy A.I. An Analysis of Lavrentiev Regularization for Nonlinear Ill-Posed Problems Using an Iterative Regularization Method. *Int. J. Comput. Appl. Math.*, 2010, vol. 5, no. 3, pp. 369–381.
14. Vasin V.V. Modified Processes of Newton Type Generating Fejer Approximations of Regularized Solutions to Nonlinear Equations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics], 2013, vol. 19, no. 2, pp. 85–97.
15. Kokurin M.Yu. On Organizing Global Search under Implementation of Tikhonov Scheme. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2010, vol. 54, no. 12, pp. 17–26.
16. Kokurin M.Yu. Convexity of the Tikhonov Functional and Iteratively Regularized Methods of Solution Irregular Operator Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 4, pp. 620–632.
17. Vasin V.V. On Convergence of Gradient Type Methods for Nonlinear Equations. *Dokl. RAN.*, 1998, vol. 359, no. 1, pp. 7–9. (in Russian)
18. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operators and Iterative Processes of Fejer Type. Theory and Applications*. Berlin, N.Y., Walter de Gruyter, 2009.
19. Vasin V.V., Skorik G.G. Iterative Processes of Gradient Type with Applications to Gravimetry and Magnetometry Inverse Problems. *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 2010, vol. 18, no. 1, pp. 855–876.
20. Vasin V.V., Perestoronina G.Ya. Levenberg-Marquard Method and Its Modifying Variants for Solutions to Nonlinear Equations with Applications to Inverse Gravimetry Problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics], 2011, vol. 11, no. 2, pp. 53–61. (in Russian)
21. Vasin V.V., Perestoronina G.Ya., Prutkin I.L., Timerkhanova L.Yu. Solutions of Three-Dimensional Gravimetry and Magnetometry Problems for Three-Layer Medium. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2003, vol. 15, no. 2, pp. 69–76. (in Russian)
22. Akimova E.N., Vasin V.V. Stable Parallel Algorithms for Solving the Inverse Gravimetry and Magnetometry Problems. *Intern. J. Engineering Modelling*, 2004, vol. 17, no. 1–2, pp. 13–19.

Поступила в редакцию 15 мая 2013 г.