

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Г.В. Байдин, В.Ф. Куропатенко, И.В. Лупанов

В математическом моделировании непрерывные функции заменяются табличными, а дифференциальные уравнения аппроксимируются разностными уравнениями. Необходимость одинакового ограничения погрешности аппроксимации во всей области отыскания решения требует измельчения шагов сетки в областях с большими значениями производных. Кроме того, в области отыскания решения могут находиться разномасштабные важные детали, что приводит к необходимости использования неоднородных сеток с сильно различающимися размерами сеточных ячеек. В данной работе исследуются решения задачи электростатики, получаемые по оригинальной разностной схеме на адаптивных сетках. Особое внимание обращается на поведение погрешности аппроксимации при переходе от равномерной сетки к неравномерной.

Ключевые слова: электрофизическая установка, уравнение Лапласа, адаптивно-встраиваемая сетка, аппроксимация, сходимость.

Введение

Из множества электрофизических установок ограничимся рассмотрением только импульсных ускорителей электронов [1], используемых для рентгенографии с целью экспериментального измерения характеристик поведения исследуемых веществ под действием динамических нагрузок. Разрешающая способность таких установок прямо зависит от напряжения электрического поля. При его увеличении увеличивается глубина просвечивания образцов и контрастность получаемых изображений, но одновременно возрастает опасность разрушения установки. Иными словами, реализуемая величина напряжения зависит от взаимодействия нескольких взаимосвязанных конкурирующих процессов: разрядка конденсаторов, транспорт энергии, пробой изоляторов.

Каждая физическая модель описывает реальные физические процессы с погрешностью $\Delta_{\text{Физ}}$. Погрешность математического моделирования складывается из погрешности физической модели и погрешности численного решения $\Delta = \Delta_{\text{Физ}} + \Delta_{\text{Мат}}$. Чтобы иметь возможность сравнения физических моделей и выбора модели с минимальным значением $\Delta_{\text{Физ}}$, необходимо, чтобы было $\Delta_{\text{Мат}} \ll \Delta_{\text{Физ}}$. Особенно это важно, когда речь заходит о моделировании сложных, многофакторных и разномасштабных явлений. Из публикаций [2–5] известно, что наилучшими свойствами с точки зрения выполнения законов сохранения и сходимости обладают разностные схемы, полученные путем интегрирования основных уравнений по объему или по поверхности ячейки и применении теоремы о среднем значении, и использующие адаптивные разностные сетки. Среди методов построения адаптивных сеток наиболее простым является метод, использующий ячейки только одной формы, а размеры соседних ячеек могут отличаться в два раза и более, так что неизбежно возникает необходимость контроля точности получаемых приближенных решений. Для этого проводятся как теоретические оценки погрешности аппроксимации и устойчивости разностных уравнений, так и расчетные исследования сходимости результатов применения метода на модельных задачах, близких к реальным.

1. Разностный оператор Лапласа

В электростатике уравнения Максвелла для электрического поля принимают вид уравнений Пуассона или Гельмгольца [6]. И в том, и в другом уравнении центральное место занимает оператор Лапласа. В данной работе рассматривается оператор Лапласа в двумерной цилиндрической (r, z) геометрии

$$L\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где $\varphi(r, z)$ – электрический потенциал. Покроем расчетную область ячейками одинаковой (квадратной) формы: отношение длины стороны базовой ячейки к длине стороны любой ячейки равно целой степени числа 2. Таким образом, каждая ячейка по каждой из своих четырех границ граничит с одной или с несколькими соседними ячейками (рис. 1).

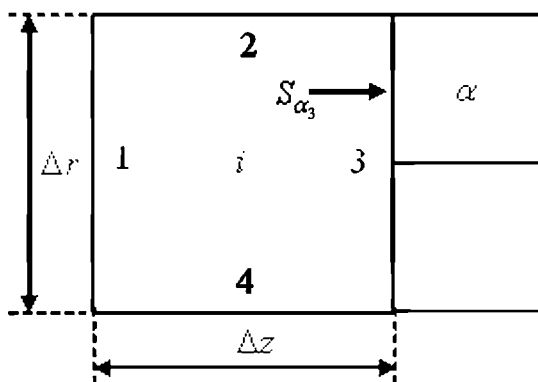


Рис. 1. Нумерация в ячейке расчетной области на примере ячейки, имеющей два соседа по третьей стороне

Искомую функцию φ определим в центрах ячеек. Для получения разностных соотношений интегро-интерполяционным методом [7] умножим (1) на элемент объема $dV = 2\pi r dr dz$, и проинтегрируем по объему ячейки V

$$\int \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] 2\pi r dr dz. \quad (2)$$

Применив теорему Остроградского–Гаусса, запишем (2) в виде

$$\oint \frac{\partial \varphi}{\partial r} 2\pi r dz + \oint \frac{\partial \varphi}{\partial z} 2\pi r dr. \quad (3)$$

Заменяя с помощью теоремы о среднем значении поверхностный интеграл на каждой грани сеточной ячейки средним значением подынтегральной функции, получим на адаптивно-встраиваемой сетке разностный оператор Лапласа

$$\Delta \varphi = \sum_{k=1,3} \sum_{\alpha_k} \frac{\varphi_{\alpha_k}^* - \varphi_i}{\Delta z_i / 2} S_{\alpha_k} + \sum_{k=2,4} \sum_{\alpha_k} \frac{\varphi_{\alpha_k}^* - \varphi_i}{\Delta r_i / 2} S_{\alpha_k}, \quad (4)$$

где i – номер ячейки, k – номер стороны ячейки, α_k – номер соседней ячейки по k -й стороне, $\varphi_{\alpha_k}^*$ – значения потенциала на границах ячейки, а S_{α_k} – площадь границы двух ячеек (по

сторонам 1 и 3: $S_{\alpha_k} = 2\pi r_{\alpha_k} \Delta r_{\alpha_k}$, по стороне 2: $S_{\alpha_k} = 2\pi (r_i + \Delta r_i/2) \Delta r_{\alpha_k}$, по стороне 4: $S_{\alpha_k} = 2\pi (r_i - \Delta r_i/2) \Delta r_{\alpha_k}$. Вспомогательные величины φ^* определяются линейной интерполяцией по значениям функции-потенциала в двух соответствующих ячейках (i и α_k) соответственно для соседей по вертикали ($k = 1, 3$)

$$\varphi_{\alpha_k}^* = \frac{\varphi_{\alpha_k} \Delta z_i + \varphi_i \Delta z_{\alpha_k}}{\Delta z_i + \Delta z_{\alpha_k}} \quad (5)$$

или по горизонтали ($k = 2, 4$)

$$\varphi_{\alpha_k}^* = \frac{\varphi_{\alpha_k} \Delta r_i + \varphi_i \Delta r_{\alpha_k}}{\Delta r_i + \Delta r_{\alpha_k}}. \quad (6)$$

Площадь границы между соседними ячейками по сторонам 1 и 3 $S_{\alpha_{1,3}}$ (см. рис. 1) и по сторонам 2 и 4 $S_{\alpha_{2,4}}$ определяются выражениями

$$S_{\alpha_{1,3}} = 2\pi r_{\alpha_{1,3}} \Delta r_{\alpha_{1,3}}, \quad S_{\alpha_{2,4}} = 2\pi (r_i + \frac{1}{2} \Delta r_i) \Delta r_{\alpha_{2,4}}. \quad (7)$$

Подставляя значение выражений вспомогательных величин (5), (6) и значения площадей граней ячеек сетки (7) в (4), а также, учитывая квадратность ячеек ($\Delta r_i = \Delta z_i = h_i$), получаем следующий вид разностного оператора Лапласа:

$$\Delta \varphi = \sum_{k=1,3} \sum_{\alpha_k} \frac{2h_{\alpha_k} (\varphi_{\alpha_k} - \varphi_i)}{h_i + h_{\alpha_k}} \frac{1}{h_i^2} \frac{r_{\alpha_k}}{r_i} + \sum_{k=2,4} \sum_{\alpha_k} \frac{2h_{\alpha_k} (\varphi_{\alpha_k} - \varphi_i)}{h_i + h_{\alpha_k}} \frac{1}{h_i^2} \left(1 + (3-k) \frac{h_i}{2r_i}\right). \quad (8)$$

Разлагая входящие в (8) сеточные значения функции φ в ряды Тэйлора в центре сеточной ячейки, получим уравнение

$$\Delta \varphi = L\varphi + R\varphi, \quad (9)$$

где R зависит от количества соседних ячеек и имеет вид

$$R(n, m) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)_i (A_n + A_m) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)_i (B_n + B_m) + \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_i (C_n + C_m) + \omega(h). \quad (10)$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n зависят от n (число соседей слева и справа), коэффициенты A_m, B_m, C_m зависят от m (число соседей сверху и снизу). Значения этих коэффициентов приведены в таблице.

Таблица

n	2	3	4	n	2	3	4
A_n	0	1/4	1/2	A_m	0	1/24	1/12
B_n	0	1/24	1/12	B_m	0	-1/8	-1/4
C_n	0	1/12	1/6	C_m	0	0	0

Так, если по каждой стороне ячейки имеется только по одному соседу (того же размера $n = 2, m = 2$), выражение (10) переходит к виду для равномерной сетки, имеющему второй порядок аппроксимации по h (на оси – первый порядок). Однако, как только хотя бы по одной стороне появляется более одного соседа, в выражении (10) появляются члены, не зависящие от h . Например, для случая, когда ячейка справа граничит с двумя соседями (см. рис. 1) со стороны, вдвое меньшей, чем у самой этой ячейки ($n = 2, m = 2$), в выражении (10) появляются члены, не зависящие от h

$$R(n, m) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)_i + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)_i + \frac{1}{12} \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_i + \omega(h). \quad (11)$$

Из (9) – (11) следует, что при $n = 3$, $m = 2$ уравнение (9) принимает вид

$$\Delta\varphi = L_1\varphi + \omega(h), \tag{12}$$

где

$$L_1\varphi = \frac{5}{4} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{25}{24} \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{13}{12} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r}. \tag{13}$$

Иными словами, аппроксимация оператора $\Delta\varphi$ оператором $L\varphi$ не является сходящейся, а вот аппроксимация оператора $\Delta\varphi$ оператором $L_1\varphi$ является сходящейся.

Таким образом, для оценки точности численного решения разностного уравнения $\Delta\varphi = 0$ нужно исследовать различия между решениями φ и φ_1 дифференциальных уравнений $L\varphi = 0$ и $L_1\varphi_1 = 0$. Эта разница отлична от нуля на неравномерной сетке и обращается в ноль на равномерной сетке.

2. Различие предельного и точного решений модельной задачи

Пусть внутри осесимметричной конструкции в 2D цилиндрической геометрии в вакуумной области между двумя проводящими телами (катодом и анодом) (рис. 2) необходимо отыскать распределение потенциала электрического поля.

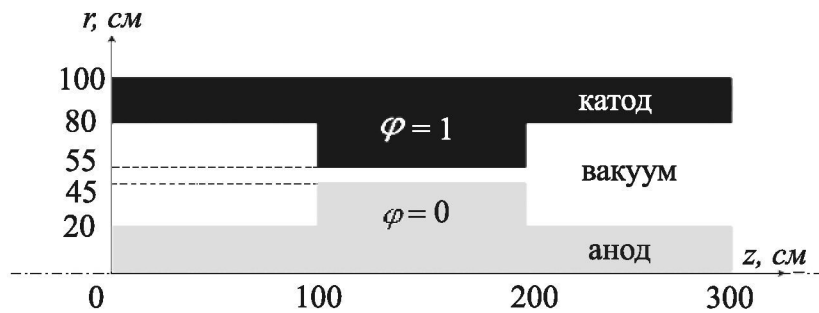


Рис. 2. Геометрия модельной задачи

Для этого требуется решить уравнение Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = 0, \tag{14}$$

дополненное граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=0, z=300, 20 \leq r \leq 80} &= 0, \\ \varphi|_{0 \leq z \leq 100, r=20} &= \varphi|_{100 \leq z \leq 200, r=45} = \varphi|_{200 \leq z \leq 300, r=20} = \varphi|_{z=100, 20 \leq r \leq 45} = \varphi|_{z=200, 20 \leq r \leq 45} = 0, \\ \varphi|_{0 \leq z \leq 100, r=80} &= \varphi|_{100 \leq z \leq 200, r=55} = \varphi|_{200 \leq z \leq 300, r=80} = \varphi|_{z=100, 55 \leq r \leq 80} = \varphi|_{z=200, 55 \leq r \leq 80} = 1. \end{aligned}$$

Если ширина центрального катод-анодного зазора $45 < r < 55$ существенно меньше его длины $100 < r < 200$, а сам зазор расположен достаточно далеко от боковых границ счетной области, то реализуемое решение в сечении $z = 150$ см близко к одномерному, имеющему аналитическое выражение

$$\varphi(r) = \ln(r/r_{\text{анод}}) / \ln(r_{\text{катод}}/r_{\text{анод}}). \tag{15}$$

Перейдем к безразмерной переменной $R = r/45$. На поверхности анода $R = 1$, на поверхности катода $R = 1,2222$. Таким образом, решение одномерного уравнения в области $1 \leq R \leq 1,22225$ имеет вид

$$\varphi(R) = 4,9833 \ln R. \quad (16)$$

Если в рассматриваемой одномерной задаче выбрать сетку с длиной интервалов, определяемой по геометрической прогрессии со знаменателем $q = 2$, то при $h \rightarrow 0$ численное решение сходится к точному решению $\varphi_1 = 44,3515 (R^{1/9} - 1)$ дифференциального уравнения

$$L_1 \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{9}{8} r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0. \quad (17)$$

В области $1 \leq R \leq 1,2222$ модуль разности решений $|\varphi - \varphi_1|$ имеет вид

$$\Delta \varphi = \left| 4,9833 \ln R - 44,3555 (R^{1/9} - 1) \right|. \quad (18)$$

Определим максимальное значение $\Delta \varphi$. Функция $\Delta \varphi(R)$ достигает максимума в точке $R = 1,10486$, где $\frac{d\Delta \varphi}{dR} = 0$. В этой точке $\frac{\Delta \varphi}{\varphi} = 0,0054$. Такое различие между предельным при $h \rightarrow 0$ и точным решением вполне приемлемо, если параметры рассчитываемой установки задаются с точностью не выше 5 %.

3. Экспериментальное определение скорости сходимости приближенного решения

Сходимость решений разностных задач в теории связывается с аппроксимацией и устойчивостью этих задач. Известно несколько вариантов соответствующих теорем «эквивалентности» [7] – теорема Филиппова, [5, 9 – 11] – теорема Лакса, и во всех вариантах наличие аппроксимации является достаточным условием, но не необходимым. При этом порядок и вид нормы, в которой доказывается сходимость, определяются порядком и видом нормы имеющейся аппроксимации.

Рассмотрим, на примере модельной задачи, как сходится численное решение уравнения (17) к предельному решению. В качестве интегральной характеристики решения будем рассматривать по аналогии с [8] величину ψ , определяемую выражением

$$\psi = \sum_i |\varphi(r_i)| r_i \Delta r_i. \quad (19)$$

Сначала определяется значение ψ_0 на базисной нерегулярной (адаптивной) сетке с числом ячеек сетки N_0 . Затем все сеточные ячейки делятся на две, то есть получаем удвоенное число ячеек сетки N_1 . Новое значение ψ обозначим ψ_1 . Далее, поступая аналогично, получим N_2 и ψ_2 . Введем безразмерный параметр $\xi = N_0/N_k$ и рассмотрим зависимость функции $|\psi_k - \psi_{k+1}|$ от ξ

$$\psi_k = \psi_0 \xi^\beta. \quad (20)$$

При каждом последовательном удвоении числа точек эта зависимость приводит к выражению для β

$$\beta = \left(\ln \frac{\psi_k}{\psi_{k+1}} \right) / \ln 2. \quad (21)$$

Результаты расчетов приведены на рис. 3. Из рис. 3 б видно, что при $k > 2$ значение β близко к 1. Иными словами, численное решение уравнения $L_1 \varphi = 0$ сходится к предельному решению, и скорость сходимости есть величина первого порядка. Разница между предельным решением, полученным на конкретной сетке, и точным решением уравнения $L \varphi = 0$ оценена в предыдущем параграфе.

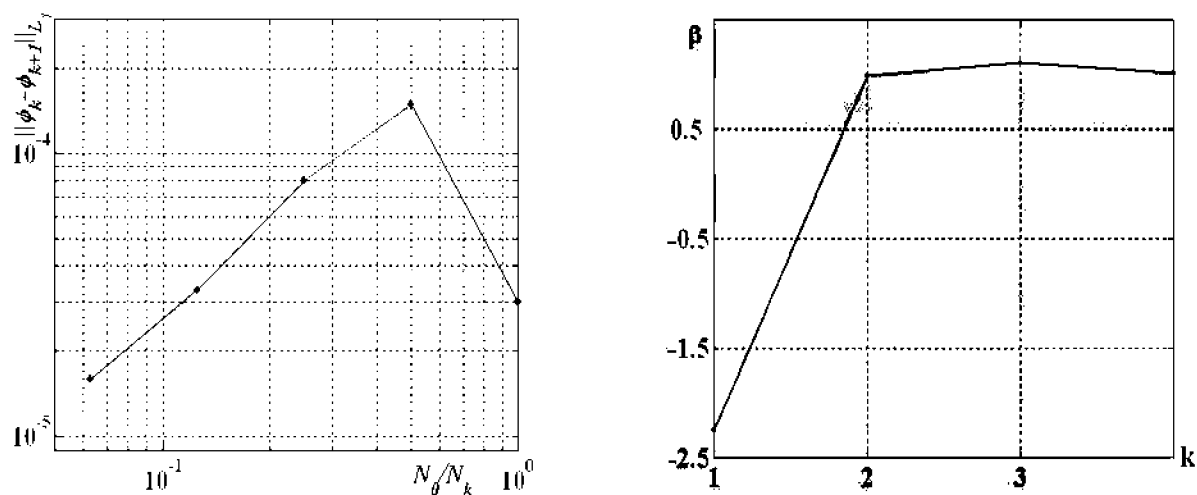


Рис. 3. Сходимость (слева) и порядок сходимости (справа) в норме L_1 . N_0 – число ячеек базовой сетки, N_k – число ячеек k -й сетки, $\xi_k = N_0/N_k$

4. Заключение

Проведено исследование одной разностной схемы для решения уравнения Лапласа на неравномерных сетках специального вида – адаптивно-встраиваемых с ячейками квадратной формы. Особенностью реализации было определение рассчитываемой функции – электрического потенциала – в центрах ячеек. Выстраиваемая из принципов интегроинтерполяционного подхода разностная схема на неравномерных сетках аппроксимирует дифференциальный оператор, отличный от исходного. Проведенные расчеты и оценки свидетельствуют о том, что порядок скорости сходимости приближенных решений, получаемых на неравномерных сетках, к предельному решению близок к единице: $\beta \approx 1$, и отличие предельного решения от точного не превосходит погрешностей задания параметров установки.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ Грант № 13-01-00072.

Литература

1. Экспериментальная база установок РФЯЦ-ВНИИТФ для радиационных исследований и испытаний изделий электронной техники / В.Ю. Кононенко, А.И. Кормилицын, Н.П. Кураков и др. // ВАНТ, серия: Физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру. – 2008. – Вып. 2. – С. 121–125.
2. Лисейкин, В.Д. О построении регулярных сеток на n -мерных поверхностях / В.Д. Лисейкин // Журн вычисл. математики и мат. физики. – 1991. – Т. 31, № 12. – С. 1670–1689.
3. Лисейкин, В.Д. О вариационном методе построения адаптивных сеток на n -мерных поверхностях / В.Д. Лисейкин // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 139, № 3. – С. 546–549.
4. Методы римановой геометрии в задачах построения разностных сеток / Ю.И. Шокин, В.Д. Лисейкин, А.С. Лебедев и др. – Новосибирск: Наука, 2005.
5. Berger, M.J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations / M.J. Berger, J. Olinger // J. of Comput. Phys. – 1984. – № 53. – С. 484–512.
6. Вайнштейн, Л.А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988.

7. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977.
8. Байдин, Г.В. О численной сходимости на неравномерных сетках одной разностной схемы для задачи теплопроводности / Г.В. Байдин, И.А. Литвиненко, И.В. Лупанов // Вестник НИЯУ МИФИ. – 2013. – Т. 2, № 1. – С. 52–58.
9. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельников. – М.: Наука, 1987.
10. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р.Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972.
11. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1989.

Григорий Васильевич Байдин, Российский федеральный ядерный центр – ВНИИ технической физики им. академ. Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Челябинской обл., Российская Федерация), g.v.baidin@vniitf.ru.

Валентин Федорович Куропатенко, доктор физико-математических наук, профессор, Российский Федеральный Ядерный Центр – ВНИИ технической физики им. академ. Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Челябинской обл., Российская Федерация), v.f.kuropatenko@rambler.ru.

Илья Викторович Лупанов, Российский федеральный ядерный центр – ВНИИ технической физики им. академ. Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Челябинской обл., Российская Федерация), bkmz_2010@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 3, pp. 18–25.

MSC 81T80

Mathematical Modelling of the Electric Fields at Electrophysic Devices

G. V. Baydin, Russian Research Institute of Technical Physics, Academician E.I. Zababakhin, Snezhinsk, Russian Federation, g.v.baidin@vniitf.ru,

V. F. Kuropatenko, Russian Research Institute of Technical Physics, Academician E.I. Zababakhin, Snezhinsk, Russian Federation, v.f.kuropatenko@rambler.ru,

I. V. Lupanov, Russian Research Institute of Technical Physics, Academician E.I. Zababakhin, Snezhinsk, Russian Federation, bkmz_2010@mail.ru

In mathematical modelling the continuous functions are substituted by tabular ones and the differential equations are approximated by finite differences. The need of similar restriction for approximation accuracy in the whole process of finding a solution demands the cell size refining in the place of high derivatives. In addition the different scaled important details may need using the non-uniform meshes with strongly different size of cells. This paper is devoted to solution of electrostatic tasks by means of original difference scheme at adaptive meshes. The specific attention is pointed to the approximation accuracy behavior at mesh transition from steady to non-uniform.

Keywords: electrophysic facility, Laplas equation, adaptive mesh refinement, approximation, convergency.

References

1. Kononenko V.Yu., Kormilycin A.I., Kurakov N.P. et al. The Experimental Base of RFNC-VNIITF Devices for Radiative Investigations and Electronic Equipment Testing. *VANT, Physics of Radiative Impact on a Radioelectronic Devices*, 2008, vol. 2, pp. 121–125. (in Russian)
2. Liseykin V.D. On a Regular Mesh Construction at n-dim Surfaces. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1991, vol. 31, no. 12, pp. 1670–1689. (in Russian)
3. Liseykin V.D. On a Variational Method of Adaptive Mesh Construction at n-dim Surfaces. *Doklady AN SSSR*, 1991, vol. 139, no. 3, pp. 546–549. (in Russian)
4. Shokin Yu.I., Liseykin V.D., Lebedev A.S. et al. *Methods of Riemann Geometry in Examples of Difference Meshes Construction*. Novosibirsk, Nauka, 2005. (in Russian)
5. Berger M.J., Olinger J. Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations. *J. of Comput. Phys.*, 1984, vol. 53, pp. 484–512.
6. Vainstain L.A. *Electromagnetic Waves*. Moscow, Radio i Svyaz', 1988. (in Russian)
7. Samarski A.A. *Difference Scheme Theory*. Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)
8. Baydin G.V., Litvinenko I.A., Lupanov I.V. On a Numerical Convergency at a Non-Uniform Meshes of Some Difference Scheme for Thermoconduction Task. *Vestnik NIYAU MIFI*, 2013, vol. 2, no. 1, pp. 52–58. (in Russian)
9. Bachvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Numerical Method*. Moscow, Nauka, 1987. (in Russian)
10. Richtmyer R.D., Morton K.W. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Wiley-Interscience, 1967.
11. Marchuk G.I. *Methods of Computational Mathematics*. Moscow, Nauka, 1989. (in Russian)

Поступила в редакцию 29 мая 2013 г.