УДК 517.9

АППРОКСИМАЦИИ ВЫРОЖДЕННЫХ C_0-ПОЛУГРУПП

М.А. Сагадеева, А.Н. Шулепов

В последнее время результаты теории уравнений соболевского типа активно применяются для измерения динамически искаженных сигналов. При численном решении таких задач используются формулы, полученные для относительно p-радиального случая уравнений соболевского типа. В статье рассматриваются аппроксимации Хилле-Уиддера-Поста для операторов разрешающей сильно непрерывной полугруппы для однородных уравнений. Показывается, что в качестве таких аппроксимаций операторов разрешающей полугруппы можно применять более простую формулу.

Статья состоит из введения и двух частей. В первой части приводятся сведения, касающиеся относительных резольвент и теории относительно p-радиальных операторов, а во второй рассматриваются формулы аппроксимации.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, разрешающие полугруппы операторов, аппроксимации Хилле–Уиддера–Поста.

Введение

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства. Рассмотрим уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) \tag{1}$$

при некоторых условиях на пару операторов L и M, гарантирующих существование семейства разрешающих операторов. Здесь $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), причем ядро оператора L нетривиально.

Уравнения соболевского типа, т.е. вида (1) с вырожденным оператором при старшей производной, являются абстрактной формой представления для многих уравнений, лежащих в основе неклассических моделей математической физики (см. например [1–4]). В последнее время уравнения такого вида нашли свое применение в теории измерения динамически искаженных сигналов [5, 6]. Среди уравнений соболевского типа можно выделить 3 основных класса в зависимости от расположения относительного спектра на комплексной плоскости, а именно:

1) случай относительной p-ограниченности, при котором разрешающее семейство операторов для уравнения (1) является аналитической группой;

2) случай относительной p-секториальности, при котором разрешающее семейство операторов для уравнения (1) является аналитической полугруппой;

3) случай относительной p-радиальности, при котором разрешающее семейство операторов для уравнения (1) является сильно непрерывной полугруппой.

Построение численных экспериментов для уравнений соболевского типа базируется на формулах, полученных для относительно p-радиального случая [6]. В пункте 2.4 работы [3] в качестве аппроксимаций Хилле-Уиддера-Поста для операторов разрешающей полугруппы была предложена формула вида:

$$U_k^t = \Big(\frac{k(p+1)}{t}\,R^L_{k(p+1)/t}(M)\Big)^{k(p+1)},$$

которая оказалась не слишком удобной при численных расчетах [6]. В работе показано, что при $p > 0$ можно использовать формулу для операторов вырожденной сильно непрерывной полугруппы (вырожденной C_0-полугруппы), предложенную для случая $p = 0$ в работе [7] .

1. Относительно p-радиальный оператор

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ с нетривиальным ядром $\ker L \neq \{0\}$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ называются соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* оператора M.

Видно, что если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$, то $\rho^L(M) = \oslash$. В дальнейших рассмотрениях нам понадобятся тождества, справедливые при любых $\mu, \lambda \in \rho^L(M)$:

$$\begin{gathered}(\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M)u = u + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}Lu, \quad u \in \mathrm{dom}\, M,\\ (\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} = I + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1},\\ (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1}L(\lambda L - M)^{-1} = (\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1}.\end{gathered} \tag{2}$$

Для комплексной переменной $\mu \in \mathbb{C}$ определим операторнозначные функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ и будем их называть соответственно *L-резольвентой, правой* и *левой L-резольвентами* оператора M.

Из тождеств (2) вытекает, что правые и левые L-резольвенты коммутируют. Отметим полезные тождества, справедливые при любых $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$:

$$(\mu - \lambda)R^L_\lambda(M)R^L_\mu(M) = R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M), \quad (\mu - \lambda)L^L_\lambda(M)L^L_\mu(M) = L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M). \tag{3}$$

Пусть $\ker L \neq \{0\}$. Вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором* оператора L. Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ называется *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \qquad q = 0, 1, \ldots, \qquad \varphi_l \notin \ker L, \qquad l = 1, 2, \ldots.$$

Линейную оболочку всех собственных и M-присоединенных векторов оператора L назовем *M-корневым линеалом оператора L*. *M-корневым пространством* будем называть замкнутый M-корневой линеал оператора L.

Правой (*левой*) *(L,p)-резольвентой* оператора M называется операторнозначная функция $p+1$ комплексного переменного $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ с областью определения $(\rho^L(M))^{p+1}$ вида

$$R^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\lambda_k}(M) \qquad \left(L^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\lambda_k}(M)\right).$$

Определение 1. Оператор M называется *p-радиальным относительно* оператора L (или, коротко, *(L,p)-радиальным*), если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \mu > a\ \mu \in \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu_k > a,\ k = \overline{0,p},\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)^n}.$$

Замечание 1. Без потери общности можно в определении 1 положить $a = 0$.

Теорема 1. [3] *Пусть $\lambda_k, \mu_k \in \rho^L(M)$, $k = \overline{0,p}$. Тогда*

(i) $\ker R^L_{(\lambda,p)}(M)$ *состоит из M-присоединенных высоты, не большей p, векторов оператора L,* $\qquad \mathrm{im} R^L_{(\lambda,p)}(M) = \mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$;

(ii) $\ker L^L_{(\lambda,p)}(M) = \{M\varphi : \varphi \in \ker R^L_{(\lambda,p)}(M) \cap \mathrm{dom} M\}$, $\qquad \mathrm{im} L^L_{(\lambda,p)}(M) = \mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$.

Обозначим через $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\ker L^L_{(\mu,p)}(M)$), которое, понятно, является линейным подпространством.

Лемма 1. [3] *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда*

(i) *множество* $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ *совпадает с M-корневым пространством оператора L;*

(ii) $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) \cap \mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$, $\qquad \ker L^L_{(\mu,p)}(M) \cap \mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$.

Лемма 2. [3] *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда выполнены равенства*
$\overline{\mathrm{im}\,(R_\mu^L(M))^{p+2}} = \overline{\mathrm{im}\,(R_\mu^L(M))^{p+1}}, \qquad \overline{\mathrm{im}\,(L_\mu^L(M))^{p+2}} = \overline{\mathrm{im}\,(L_\mu^L(M))^{p+1}}.$

Через $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1)$ обозначим замыкание линеала $\mathrm{im}R_{(\mu,p)}^L(M)$ $(\mathrm{im}L_{(\mu,p)}^L(M))$, через $\tilde{\mathfrak{U}}$ $(\tilde{\mathfrak{F}})$ – замыкание линеала $\mathfrak{U}^0\dot{+}\mathrm{im}R_{(\mu,p)}^L(M)$ $(\mathfrak{F}^0\dot{+}\mathrm{im}L_{(\mu,p)}^L(M))$ в норме пространства $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$.

Лемма 3. [3] *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда*
(i) $\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu R_\mu^L(M))^{p+1}u=u \ \forall u\in\mathfrak{U}^1, \qquad \lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu L_\mu^L(M))^{p+1}f=f \ \forall f\in\mathfrak{F}^1;$
(ii) $\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1, \qquad \tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1.$

2. Аппроксимации Хилле–Уиддера–Поста

Пусть $\rho^L(M) \neq \oslash$, тогда уравнение (1): $L\dot{u} = Mu$ будем рассматривать вместе с эквивалентными ему при $\alpha \in \rho^L(M)$ уравнениями

$$R_\alpha^L(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{4}$$

$$L_\alpha^L(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f \tag{5}$$

как конкретные интерпретации уравнения $\quad A\dot{v} = Bv, \qquad (6)$

с операторами $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ (в силу первых двух равенств из (2) при $\lambda = 0$) в некотором банаховом пространстве $\mathcal{V}$.

Под *решением* уравнения (6) будем понимать вектор-функцию $v \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{V})$, удовлетворяющую (6) при $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Определение 2. Сильно непрерывное отображение $V^\bullet : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется *сильно непрерывной полугруппой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей C_0-полугруппой*) уравнения (6), если
(i) $V^sV^t = V^{s+t}\ \forall s,t > 0$;
(ii) $v(t) = V^tv_0$ есть решение этого уравнения для любого v_0 из плотного в $\mathcal{V}$ линеала.

Теорема 2. *Пусть M (L,p)-радиален, тогда существует равномерно ограниченная разрешающая C_0-полугруппа уравнения* (4) ((5)), *определенная на подпространстве* $\tilde{\mathfrak{U}}$ $(\tilde{\mathfrak{F}})$.

Доказательство. Рассмотрим аппроксимации Хилле–Уиддера–Поста в виде:

$$U_k^t = \left(\left(L - \frac{t}{k}M\right)^{-1}L\right)^k = \left(\frac{k}{t}R_{\frac{k}{t}}^L(M)\right)^k.$$

Заметим, что для всех $\quad u \in \mathfrak{U}^0 \qquad U_k^tu = 0.$

Так как оператор M (L,p)-радиален, то аппроксимации Хилле–Уиддера–Поста равномерно ограничены константой K из определения 1: $\qquad \|U_k^t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq K \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Возьмем элемент $u \in \mathrm{dom}\ M$ и найдем производную

$$\frac{d}{dt}U_k^tu = U_k^t\Big(L - \frac{t}{k}M\Big)^{-1}Mu \qquad \forall u \in \mathrm{dom}\ M.$$

Теперь, пусть $u \in \mathrm{im}R_{(\mu,p)}^L(M)$, т.е. $u = (R_\beta^L(M))^{p+1}v$ для некоторых $\beta \in \mathbb{R}_+$ и $v \in \mathfrak{U}$. Докажем при $k > p+1$ равенство $\quad \lim\limits_{t\to0+}U_k^tu = u.$

Заменим $\mu = k/t$ и рассмотрим $\quad \lim\limits_{t\to0+}U_k^tu = \lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu R_\mu^L(M))^ku =$

$$= \lim_{\mu\to+\infty}\sum_{m=p+1}^{k-1}\big((\mu R_\mu^L(M))^{m+1} - (\mu R_\mu^L(M))^m\big)u + (\mu R_\mu^L(M))^{p+1}u. \tag{7}$$

В силу (L,p)-радиальности оператора M и леммы 2 первое слагаемое в (7) стремится к нулю, а второе — стремится к $u \in \mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ в силу леммы 3 (i).

Фундаментальность последовательности $\{U^t_k : k \in \mathbb{N}, k > p+1\}$ показывается аналогично п. 2.4 работы [3]. Соответственно, существует предел, равномерный по $t \in (0,T]$

$$U^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty} U^t_k, \quad U^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{U}}), \quad \|U^t\|_{\mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{U}})} \leq K \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Далее, также как в работе [3], можно показать полугрупповое свойство и остальные свойства полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, в частности, для всех $u \in \mathrm{im}\,(R^L_\mu(M))^{p+2} \dotplus \mathfrak{U}^0$

$$R^L_\alpha(M)\frac{d}{dt}\Big(U^t u\Big) = R^L_\alpha(M)U^t(R^L_\beta(M))^{p+1}(\beta L - M)^{-1}Mv = (\alpha L - M)^{-1}MU^t u.$$

И из лемм 2 и 3 (ii) следует, что множество $\mathrm{im}\,(R^L_\mu(M))^{p+2} \dotplus \mathfrak{U}^0$ плотно в $\tilde{\mathfrak{U}}$.

Аналогично показывается существование полугруппы для уравнения (5)

$$F^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty} F^t_k = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{k}{t}\,L^L_{k/t}(M)\Big)^k, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

$\square$

Замечание 2. Ясно, что, если полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ разрешает уравнение $L\dot{u} = \tilde{M}u$ с оператором $\tilde{M} = M - aL$, являющимся (L,p)-радиальным с константой $a = 0$ из определения 1, тогда разрещающей полугруппой исходного уравнения (1) будет семейство $\{W^t = e^{at}U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Соответственно, для этой полугруппы в формулировке теоремы 2 вместо равномерной ограниченности имеет место экспоненциальная ограниченность $\|W^t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq Ke^{at} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

В заключение авторы выражают свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за плодотворные дискуссии и интерес, проявленный к данной работе.

Литература

1. Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc, 1999. – 236 p.
2. Pyatkov, S.G. Operator Theory. Nonclassical Problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002. – 353 p.
3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003. – 216 p.
4. Al'shin, A.B. Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin: de Gruyter, 2011. – 648 p.
5. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16 (192), вып. 5. – С. 88–92.
6. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
7. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк // ДАН. – 1994. – Т. 337, № 5. – С. 581–584.

Минзиля Алмасовна Сагадеева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Информационно-измерительная техника», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), sagadeeva_ma@mail.ru.

Андрей Николаевич Шулепов, студент 4-го курса механико-математического факультета, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), andrewn92@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 2, pp. 133–137.

MSC 34G10, 47D06, 47D60

The Approximations for Degenerate C_0-semigroup

M.A. Sagadeyeva, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, sagadeeva_ma@mail.ru,
A.N. Shulepov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, andrewn92@mail.ru

The results from the theory of Sobolev type equations have been actively used to measure the dynamically distorted signals recently. The formulas obtained for relatively p-radial case of Sobolev type equations are used for the numerical solution of such problems. Hille–Widder–Post approximations for the operators of strongly continuous resolving semigroup for homogeneous equations are considered in the article. The authors show that a simpler formula can be used as approximations of operators of a resolving semigroup.

The article consists of introduction and two parts. The information regarding the relative resolutions and theories of relatively p-radial operators are given in the first part. The approximation formulas are covered in the second part.

Keywords: Sobolev type equation, resolving semigroup of operators, Hille–Widder–Post approximations.

References

1. Favini A., Yagi A. *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces.* N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc, 1999. 236 p.
2. Pyatkov S.G. *Operator Theory. Nonclassical Problems.* Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2002. 353 p.
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, Köln, VSP, 2003. 216 p.
4. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-Up in Nonlinear Sobolev Type Equations.* Berlin, de Gruyter, 2011. 648 p.
5. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. A New Approach to Measurement Dynamically Perturbed Signals [Novyy podkhod k izmereniyu dinamicheski iskazhennykh signalov]. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,* 2010, no. 16 (192), issue 5, pp. 88–92.
6. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control.* 2012, no. 1, pp. 107–115.
7. Sviridyuk G.A. Linear Equations of Sobolev Type and Strongly Continious Semigroups of Resolving Operators with Kernels [Lineiniye uravneniya sobolevskogo tipa i sil'no nepreryvnye polugruppy razreshayushikh operatorov s yadrami]. *Dokl. Akad. Nauk USSR.* 1994, vol. 337, no. 5, pp. 581–584.

Поступила в редакцию 27 февраля 2013 г.