УДК 517.952, 517.977

О МОДЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОМЕХУ

Д.А. Серков

Рассматривается задача управления системой, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением. Предполагается, что значения управления и помехи в каждый момент времени содержатся в некоторых компактных множествах. Предполагается также, что помехи удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям функционального характера, отражающим природу рассматриваемой задачи. Качество управления оценивается функционалом, заданым на множестве фазовых траекторий рассматриваемой системы, и непрерывным в метрике равномерной сходимости. Ранее установлено, что стратегия с полной памятью разрешает данную задачу управления при компактных ограничениях на помеху и при других функциональных ограничениях, которые к ним сводятся. Вместе с тем, построенные для этих случаев стратегии не являлись универсальными, то есть они зависели от начальной позиции движения системы. Также оставался открытым вопрос о возможности разрешения задач управления с функциональными ограничениями в более узком (классическом) множестве стратегий — позиционных стратегий. В данной статье приводится конструкция оптимальной стратегии, использующая в цепи обратной связи вспомогательную модель управляемой системы и обладающая свойством универсальности. Даны примеры, мотивирующие расширение класса разрешающих стратегий до стратегий с полной памятью.

Ключевые слова: оптимальная гарантия, стратегии с полной памятью, функциональные ограничения.

Введение

Рассматривается задача оптимизации гарантированного результата в случаях, когда на помеху наложены дополнительные ограничения функционального характера. Рассмотрение основывается на подходах, берущих начало в школе Н. Н. Красовского по теории управления (см. [1, 2]).

Задачи управления с функционально ограниченной помехой имеют содержательные предпосылки и исследовались в качестве самостоятельные проблемы [3, 4, 5]. В работах [3, 4] исследовались множества программного поглощения [6, 7] для случаев, когда помеха формируется на основе непрерывной позиционной стратегии, либо посредством полунепрерывного сверху многозначного отображения, определенного на расширенном фазовом пространстве управляемой системы. В работе [5] рассматривались помехи, ограниченные некоторым неизвестным компактным (в топологии пространства $L_2(T,\mathbb{R}^n)$ — функций из $T \subseteq \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$ суммируемых по Лебегу с квадратом) подмножеством множества допустимых помех (далее в тексте такие ограничения на помехи будут именоваться «L_2-компактными ограничениями на помеху»). Для этого вида ограничений устанавливается, в частности, равенство оптимальных результатов, достигаемых в классе стратегий с полной памятью [1, § 95] и в классе квазистратегий [2, с. 24].

Известно, что стратегия с полной памятью разрешает задачу управления при L_2-компактных ограничениях на помеху и при других функциональных ограничениях, сводящихся к ним [5, 8]. Следует отметить, что построенные в этих работах стратегии не являлись универсальными, то есть они зависели от начальной позиции z_0. Также оставался открытым вопрос о возможности разрешения задач управления с функциональными ограничениями в более узком (классическом) множестве стратегий — позиционных стратегий. Цель этой работы состоит в построении стратегии с полной памятью универсальной и оптимальной при L_2-компактных ограничениях на помеху, а также примеров, показывающих, что при функционале качества терминального типа (общего вида), вообще говоря, не существует универсальной позиционной стратегии (позиционной стратегии) оптимальной при L_2-компактных ограничениях на помеху.

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in T \triangleq [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

и начальным условием $x(t_0) = z_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n$, где «$\triangleq$» означает «равно по определению». Реализации управления $u(\cdot)$ и помехи $v(\cdot)$ предполагаются измеримыми по Борелю функциями, удовлетворяющими геометрическим ограничениям $u(\tau) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$, $v(\tau) \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^q$, $\tau \in T$. Множества всех таких реализаций управления и помехи обозначим соответственно $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Множества G_0, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ суть компакты в соответствующих евклидовых пространствах.

В отношении функции $f(\cdot)$ будем предполагать, что она

— определена и непрерывна по совокупности аргументов в области $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$;

— локально липшицева по второй переменной: $\|f(\tau, x_1, u, v) - f(\tau, x_2, u, v)\| \leqslant L_f \|x_1 - x_2\|$, где $(\tau, x_1), (\tau, x_2) \in S$, $u \in \mathcal{P}$, $v \in \mathcal{Q}$, S — любое ограниченное подмножество из $\mathbb{R}^{n+1}$, $L_f \triangleq L_f(S)$ — константа Липшица, зависящая от множества S;

— удовлетворяет условию подлинейного роста: $\|f(\tau, x, u, v)\| \leqslant K(1 + \|x\|)$, $K \geqslant 0$ для всех $(\tau, x, u, v) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$.

При указанных условиях решение в смысле Каратеодори задачи Коши (1) существует на всем интервале $[t_0, \vartheta]$ и единственно для любых реализаций управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ (см. [9, II.4]). Для $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ обозначим $x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot))$ такое решение задачи (1) с начальным условием $x(t_*) = x_*$.

Выделим следующее подмножество пространства состояний системы (1):

$$G \triangleq \mathbf{cl}_{T \times \mathbb{R}^n} \Big\{ (\tau, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \mid x = x(\tau, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)), z_0 \in G_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V} \Big\}.$$

Пусть $\Delta_T \triangleq \big\{ \Delta \in 2^T \setminus \{\varnothing\} \bigm| |\Delta| < \infty,\ \min_{\tau \in \Delta} \tau = t_0,\ \max_{\tau \in \Delta} \tau = \vartheta \big\}$. Для всякого $\Delta \in \Delta_T$ определим число $\mathbf{d}(\Delta) \triangleq \max\limits_{\tau \in \Delta \setminus \{\vartheta\}} \{ \min\limits_{\substack{\tau' \in \Delta \\ \tau' > \tau}} \tau' - \tau \}$ (далее — *диаметр разбиения* Δ) и единственный кортеж $(\tau_i)_{i \in 0..n_\Delta} \in \Delta^{n_\Delta}$, $n_\Delta \triangleq |\Delta|$, сохраняющий естественный порядок в T: $\tau_i > \tau_{i-1}$, $i \in 1..n_\Delta$. Элементы Δ_T будем называть *разбиениями* отрезка T. Каждое разбиение $\Delta \in \Delta_T$ порождает дизъюнктное покрытие интервала $[t_0, \vartheta)$ системой интервалов $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $\tau_{i-1}, \tau_i \in \Delta$, $i \in 1..n_\Delta$.

Для произвольного $\Delta \in \Delta_T$ обозначим $\mathbf{U}(\Delta) \subset \mathcal{U}$ подмножество реализаций управления непрерывных справа и кусочно постоянных на интервалах, порождаемых разбиением Δ.

Обозначим $\mathbf{S}$ и назовем *стратегиями управления* множество всех функций U вида

$$U : T \times C(T, \mathbb{R}^n) \times \Delta_T \mapsto \mathcal{P}, \tag{2}$$

где $C(T, \mathbb{R}^n)$ пространство функций из T в $\mathbb{R}^n$ непрерывных в равномерной норме. Поясним содержательный смысл аргументов в (2):

— первый отвечает текущему моменту времени в процессе управления;

— второй аргумент – истории движения; он представляется функциями, определенными на T, но в силу приведенной ниже пошаговой процедуры формирования движений на управление влияют лишь значения этих функций в моменты, предшествующие текущему моменту (первый аргумент);

— последний аргумент доставляет информацию о выбранном разбиении интервала управления.

Для произвольных $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $\Delta \in \Delta_T$ обозначим

$$x^{\Delta}(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_0, z_0, U, \Delta, v(\cdot)), \quad u(\cdot) \triangleq u^{\Delta}(\cdot, t_0, z_0, U, \Delta, v(\cdot)) \in \mathbf{U}(\Delta)$$

пошаговое движение и соответствующую реализацию управления [1], порождаемые стратегией $U \in \mathbf{S}$ из начальной позиции (t_0, z_0) при разбиении Δ и помехе $v(\cdot)$, определяемые следующим образом:

$$\begin{gathered} u(\tau, t_0, z_0, U, \Delta, v(\cdot)) \triangleq U(\tau_i, x^{\Delta}_{[t_0,\tau_i]}(\cdot), \Delta), \\ \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in 0..(n_{\Delta} - 1), \\ x^{\Delta}(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_0, z_0, u^{\Delta}(\cdot), v(\cdot)), \end{gathered}$$

где для произвольных $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \leqslant t_2$ и функции $h(\cdot) : [t_1, t_2] \mapsto H$ символы $h_{[t_1,t_2]}(\cdot)$ обозначают следующую функцию из T в H:

$$h_{[t_1,t_2]}(\tau) \triangleq \begin{cases} h(t_1), & \tau \in [t_0, t_1], \\ h(t_2), & \tau \in [t_2, \vartheta], \\ h(\tau), & \tau \notin [t_0, t_1] \cup [t_2, \vartheta]. \end{cases} \tag{3}$$

Экстраполяция (3) использована в построении пучка движений для того, чтобы в процессе формирования управления доопределить второй аргумент стратегии $U \in \mathbf{S}$ (не известный к текущему моменту целиком) до элемента из области определения U. При таком определении пошаговых движений не возникает необходимости в свойстве неупреждаемости (физичности) стратегий из $\mathbf{S}$, а требующееся в построениях свойство неупреждаемости пучков конструктивных движений возникает как следствие неупреждаемости пошаговых движений.

Пусть имеются $z_0 \in G_0$, $U \in \mathbf{S}$ и $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{V}$. Определим пучок движений $X(z_0, U, \mathbf{V})$ как множества всех элементов $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$, для которых найдутся последовательности

$$\{(z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k) \in G_0 \times \mathbf{V} \times \Delta_T \mid k \in \mathbb{N}\},$$

удовлетворяющие условиям $\lim_{k\to\infty} z_{0k} = z_0$, $\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \|x(\cdot) - x(\cdot, t_0, z_{0k}, U, \Delta_k, v_k(\cdot))\|_{C(T,\mathbb{R}^n)} = 0,$$

и введем в рассмотрение следующие пучки конструктивных движений, порожденные стратегией $U \in \mathbf{S}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\mathrm{C}}(z_0, U) &\triangleq \mathrm{cl}_{C(T,\mathbb{R}^n)} \left\{ \bigcup_{\mathbf{V} \in \mathbf{comp}_{L_2(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})} X(z_0, U, \mathbf{V}) \right\}, \\ \mathcal{X}_{\mathrm{P}}(z_0, U) &\triangleq \mathrm{cl}_{C(T,\mathbb{R}^n)} \left\{ \bigcup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}} X(z_0, U, \{v(\cdot)\}) \right\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{cl}_{C(T,\mathbb{R}^n)}$ означает замыкание в топологии пространства $C(T;\mathbb{R}^n)$, а $\mathbf{comp}_{L_2(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})$ — семейство всех подмножеств $\mathcal{V}$, компактных в сильной топологии пространства $L_2(T;\mathbb{R}^n)$.

Качество движения системы (1) будем оценивать функционалом

$$\gamma(\cdot): C(T,\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}, \tag{4}$$

непрерывным в пространстве $C(T,\mathbb{R}^n)$. Сторона, формирующая управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, стремится минимизировать показатель качества (4).

Гарантированным результатом стратегий $U \in \mathbf{S}$ для начальной позиции $z_0 \in G_0$ *при программных ограничениях на помеху* (*при L_2-компактных ограничениях на помеху*) назовем величину

$$\Gamma_{\text{P}}(z_0,U) \triangleq \sup_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_{\text{P}}(z_0,U)} \gamma(x(\cdot)) \qquad (\Gamma_{\text{C}}(z_0,U) \triangleq \sup_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_{\text{C}}(z_0,U)} \gamma(x(\cdot))).$$

Определим величину оптимального гарантированного результата $\Gamma_{\text{P}}(z_0)$ ($\Gamma_{\text{C}}(z_0)$) в классе стратегий $\mathbf{S}$ для начальной позиции $z_0 \in G_0$ *при программных ограничениях на помеху* (*при L_2-компактных ограничениях на помеху*):

$$\Gamma_{\text{P}}(z_0) \triangleq \inf_{U\in\mathbf{S}} \Gamma_{\text{P}}(z_0,U) \qquad (\Gamma_{\text{C}}(z_0) \triangleq \inf_{U\in\mathbf{S}} \Gamma_{\text{C}}(z_0,U)).$$

Следуя [2, с. 24], назовем *квазистратегией* (управления) всякое отображение $\alpha(\cdot): \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U}$ такое, что для всяких $\tau \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ таких, что $v(\cdot)|_{[t_0,\tau]} = v'(\cdot)|_{[t_0,\tau]}$, выполняется $\alpha(v(\cdot))|_{[t_0,\tau]} = \alpha(v'(\cdot))|_{[t_0,\tau]}$. Здесь операция $\cdot|_{[a,b]}$ означает сужение операнда, определенного на интервале, содержащем отрезок $[a,b]$, на отрезок $[a,b]$. Пусть $\mathbf{Q}$ — множество всех таких квазистратегий. Для каждых $z_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ элементы множества

$$\mathcal{X}(z_0,\alpha(\cdot)) \triangleq \{x(\cdot,z_0,\alpha(v(\cdot)),v(\cdot)) \mid v(\cdot) \in \mathcal{V}\}$$

представляют собой *движения* из начальной позиции $z_0 \in G_0$, порожденные квазистратегией $\alpha(\cdot)$. Значение

$$\Gamma_{\text{Q}}(z_0) \triangleq \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathbf{Q}} \sup_{x(\cdot)\in\mathcal{X}(z_0,\alpha(\cdot))} \gamma(x(\cdot))$$

есть *оптимальный гарантированный результат* в начальном состоянии $z_0 \in G_0$ *в классе квазистратегий* (при отсутствии функциональных ограничений на помехи).

Замечание 1. Подобно тому, как это сделано выше, можно также определить оптимальный гарантированный результат в классе квазистратегий при L_2-компактных ограничениях на помехи или при программных ограничениях; однако, эти определения приведут к одинаковым величинам: квазистратегии с точки зрения оптимального гарантированного результата нечувствительны к функциональным ограничениям на помехи.

Назовем стратегию $U_* \in \mathbf{S}$ оптимальной в начальной позиции $z_0 \in G_0$ *при L_2-компактных ограничениях* на помеху (*при программных ограничениях* на помеху), если выполнено равенство $\Gamma_{\text{C}}(z_0,U_*) = \Gamma_{\text{C}}(z_0)$ ($\Gamma_{\text{P}}(z_0,U_*) = \Gamma_{\text{P}}(z_0)$).

Из определений следуют неравенства $\Gamma_{\text{Q}}(z_0) \leqslant \Gamma_{\text{P}}(z_0) \leqslant \Gamma_{\text{C}}(z_0)$, справедливые при всех $z_0 \in G_0$. В работе [5] в предположении инъективности правой части уравнения (1) по последней переменной $v \in \mathcal{Q}$ установлено равенство $\Gamma_{\text{Q}}(z_0) = \Gamma_{\text{C}}(z_0)$ и вид разрешающей стратегии. В [8] предложено более общее условие (11) на систему (1), достаточное для выполнения равенств $\Gamma_{\text{Q}}(z_0) = \Gamma_{\text{P}}(z_0) = \Gamma_{\text{C}}(z_0)$, и конструкция стратегии с полной памятью, оптимальной при L_2-компактных ограничениях (понятно, что в силу последних равенств эта стратегия будет также оптимальной при программных ограничениях на помеху). Однако, стратегии, предложенные в этих работах, не являлись универсальными, то есть они зависели от начальной позиции z_0. В следующей части приводится вариант стратегии из множества $\mathbf{S}$ универсальной и оптимальной при L_2-компактных ограничениях на помеху и строятся примеры, показывающие отсутствие в общем случае такой стратегии во множестве позиционных стратегий (то есть функций из G в $\mathcal{P}$).

2. Универсальная стратегия с полной памятью

Дадим краткое содержательное описание предлагаемой стратегии (обозначим ее U_{L}).

Стратегия U_{L} в процессе синтеза управляющего воздействия симулирует движение вспомогательной управляемой системы (именуемой ниже y-моделью), описываемой теми же уравнениями и теми же начальными условиями, что и рассматриваемая управляемая система (1). При формировании движения y-модели на очередном интервале разбиения строится помеха, аппроксимирующая (в подходящем смысле) неизвестную помеху в исходной системе (1). Построение аппроксимирующей помехи, по-сути, сводится к решению обратной задачи динамики [10, 11]. Управление в y-модели формируется контрстратегией [1], оптимальной по отношению к выбранной аппроксимирующей помехе. Заданное таким образом в y-модели управление используется в «реальной» управляемой системе (1) на следующем отрезке разбиения. При измельчении шага разбиения, движения y-модели сходятся к «оптимальным» конструктивным движениям, а движения исходной системы (1) приближаются к соответствующим движениям y-модели. Эти два факта в совокупности обеспечивают оптимальное значение показателя качества на движениях исходной системы и, как следствие, — оптимальность стратегии U_{L}. Модель лидирует в реакциях на помеху, что и послужило поводом отметить эту стратегию индексом «L».

Приведем формальное определение стратегии U_{L}. Пусть имеются произвольные $t \in T$, $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$, $\Delta \in \Delta_T$ и некоторые непустые компактные множества $W(z) \subset C(T, \mathbb{R}^n)$, заданные для всех $z \in G_0$. В дальнейшем построении используются множества

$$\nu(u, x(\cdot), \tau, \tau') \triangleq \operatorname*{argmin}_{v \in \mathcal{Q}} \left\| x(\tau') - x(\tau) - (\tau' - \tau) f(\tau, x(\tau), u, v) \right\|,$$

определенные для произвольных $u \in \mathcal{P}$, $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$, $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$.

Из разбиения Δ сделаем «почти равномерное» разбиение $\Delta' \triangleq \{\tau_i^{\Delta'} \mid i \in 1..n_{\Delta'}\} \in \Delta_T$ интервала управления T:

$$\tau_i^{\Delta'} \triangleq \min\{\tau \in \Delta \mid \tau \geqslant i(\vartheta - t_0)/n_{\Delta'}\}, \quad i \in 0..n_{\Delta'},$$
$$n_{\Delta'} \triangleq \min\{n \in \mathbb{N} \mid n^2\, \mathbf{d}(\Delta) \geqslant 1\},$$

и положим $i_t \triangleq \max\{i \in 0..n_{\Delta'} \mid \tau_i^{\Delta'} \leqslant t\}$. Нетрудно видеть, что при этом определении $t \in [\tau_{i_t}^{\Delta'}, \tau_{i_t+1}^{\Delta'})$. Построим значение стратегии $U_{\text{L}}(t, x(\cdot), \Delta)$ индуктивно, исходя из соотношений

$$U_{\text{L}}(\tau_0^{\Delta'}, x(\cdot), \Delta) \triangleq u_0 \in \mathcal{P}, \quad y(\tau_0^{\Delta'}) = x(\tau_0^{\Delta'}), \quad \bar{v}_0 \triangleq v_0 \in \mathcal{Q}, \quad \bar{u}_0 \triangleq u_0, \tag{5}$$

$$U_{\text{L}}(\tau_i^{\Delta'}, x(\cdot), \Delta) \triangleq u_i \triangleq \bar{u}_{i-1}, \tag{6}$$

$$y(\tau_i^{\Delta'}) \triangleq x(\tau_i^{\Delta'}, \tau_{i-1}^{\Delta'}, y(\tau_{i-1}^{\Delta'}), \bar{u}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}), \quad \bar{v}_i \triangleq \nu(u_i, x(\cdot), \tau_i^{\Delta'}, \tau_{i+1}^{\Delta'}), \tag{7}$$

$$\bar{u}_i \triangleq \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} \left\langle y(\tau_i^{\Delta'}) - w_i(\tau_i^{\Delta'}), f(\tau_i^{\Delta'}, y(\tau_i^{\Delta'}), u, \bar{v}_i) \right\rangle, \tag{8}$$

$$w_i(\cdot) \in \operatorname*{argmin}_{w(\cdot) \in W(x(t_0))|_{[t_0, \tau_i^{\Delta'}]}} \|w(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([t_0, \tau_i^{\Delta'}]; \mathbb{R}^n)}, \tag{9}$$

где $i \in 1..i_t$; u_0, v_0 — некоторые произвольно выбранные и фиксированные значения; $W(x(t_0))|_{[t_0,\tau_i^{\Delta'}]}$ означает множество сужений на интервал $[t_0, \tau_i^{\Delta'}]$ элементов из множества $W(x(t_0)) \subset C(T, \mathbb{R}^n)$. И, наконец, положим

$$U_{\text{L}}(t, x(\cdot), \Delta) \triangleq U_{\text{L}}(\tau_{i_t}^{\Delta'}, x(\cdot), \Delta). \tag{10}$$

Замечание 2. До настоящего момента стратегия U_{L} определена с точностью до множества $W(\cdot)$ (зависящего от начальной позиции движения) и не связана с показателем качества $\gamma(\cdot)$. В следующей теореме множества специального вида (зависящие от $\gamma(\cdot)$) завершат определение стратегии U_{L}.

В определении значения $U_{\text{L}}(t, x(\cdot), \Delta)$ при всех $t \in T$, по–существу, участвует лишь отрезок $x(\cdot)|_{[t_0,\tau_{i_t}^{\Delta'}]}$ траектории $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$.

Введем в рассмотрение множества $\mathcal{W}(z) \subseteq C(T, \mathbb{R}^n)$, полученные из траекторий «почти оптимальных» квазистратегий:

$$\mathcal{W}(z) \triangleq \bigcap_{\varepsilon>0} \mathrm{cl}_{C(T,\mathbb{R}^n)} \Big\{ \bigcup_{\substack{\Gamma_{\text{Q}}(z,\alpha(\cdot))\leqslant \\ \Gamma_{\text{Q}}(z)+\varepsilon}} \mathcal{X}(z, \alpha(\cdot)) \Big\}, \quad z \in G_0,$$

а также фактор–множество $\mathcal{Q}/\underset{txu}{\sim}$ множества $\mathcal{Q}$, порожденное отношением эквивалентности $\underset{txu}{\sim}$:

$$(v_1 \underset{txu}{\sim} v_2) \Leftrightarrow (f(t, x, u, v_1) = f(t, x, u, v_2)), \qquad v_1, v_2 \in \mathcal{Q},$$

определенное для любых $(t, x) \in G$, $u \in \mathcal{P}$.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *фактор–множества* $\mathcal{Q}/\underset{txu}{\sim}$ *не зависят от* $u \in \mathcal{P}$*:*

$$\mathcal{Q}/\underset{txu}{\sim} = \mathcal{Q}/\underset{txu'}{\sim} \qquad \text{для всех } u, u' \in \mathcal{P},\ (t, x) \in G. \tag{11}$$

Тогда для любой начальной позиции $z_0 \in G_0$ *справедливы равенства*

$$\Gamma_{\text{P}}(z_0) = \Gamma_{\text{C}}(z_0) = \Gamma_{\text{Q}}(z_0), \quad z_0 \in G_0. \tag{12}$$

Стратегия U_{L}*, заданная формулами* (5)–(10)*, в которых*

$$W(z) \triangleq \mathcal{W}(z), \quad z \in G_0,$$

является стратегией, оптимальной при L_2*-компактных ограничениях на помехи для любой начальной позиции* $z_0 \in G_0$*.*

Замечание 3. Ввиду равенства (12), определенная в теореме 1 стратегия U_{L} будет также оптимальной при программных ограничениях на помеху.

Замечание 4. Из определений видно, что стратегия U_{L} является универсальной, то есть не зависит от начальной позиции z_0 управляемой системы (1). В отличие от приведенного варианта определения стратегии, в работе [8] элементы $w_i(\cdot)$ (см. (9)), по-сути, были заданы соотношением

$$w_i(\cdot) \in \underset{w(\cdot)\in\mathcal{W}(z_0)|_{[t_0,\tau_i^{\Delta'}]}}{\operatorname{argmin}} \|w(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([t_0,\tau_i^{\Delta'}];\mathbb{R}^n)},$$

явно указывающим на отсутствие универсального характера стратегии.

Замечание 5. В качестве примера семейства управляемых систем, удовлетворяющих условию (11), можно привести системы вида:

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), u(t)) + f_2(t, x(t), v(t)) + g(t, x(t), u(t)) \cdot h(t, x(t), v(t)), \tag{13}$$

где $g(\cdot)$ — матрица–функция размерности $n \times q$, $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ — вектор–функции (столбцы) размерности n, и $h(\cdot)$ — вектор–функция размерности q таковы, что правая часть (13) удовлетворяет условиям существования и продолжимости решений, и при всех $(t, x) \in G$ ядро линейного оператора $g(t, x, u) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^n$ не зависит от $u \in \mathcal{P}$.

В частности, управляемая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau) \cdot v_1(\tau), & \tau \in T \triangleq [0, 1], \mathcal{P} = \mathcal{Q} \triangleq \{-1, 1\} \\ \dot{x}_2(\tau) = g(x_1(\tau)) \cdot u_2(\tau) \cdot v_2(\tau), & g(x) \triangleq \max\{0, x\}, x \in \mathbb{R}, \\ (x_1(0), x_2(0)) = (0, 0), & u_1(\tau), u_2(\tau) \in \mathcal{P},\ v_1(\tau), v_2(\tau) \in \mathcal{Q}, \end{cases} \tag{14}$$

имеет вид (13):

$$f_1(\cdot), f_2(\cdot) \triangleq 0, \quad g(t, x, u) \triangleq \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & \max\{0, x_1\} u_2 \end{pmatrix}, \quad h(t, x, v) \triangleq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы 1 в основном следует схеме доказательства теоремы 1 из [8] и дополнительно использует свойство полунепрерывности сверху по включению множеств $\mathcal{W}(z) \subset C(T, \mathbb{R}^n)$ при изменении параметра $z \in G_0$.

3. Об отсутствии в общем случае универсальной чисто позиционной стратегии

В данном пункте на известном примере задачи оптимального управления [2, гл.VI, §1] покажем, что в случае терминального показателя качества в классе позиционных стратегий $\mathbf{U}_{pos}$, то есть функций U вида $G \ni (\tau, x) \mapsto U(\tau, x) \in \mathcal{P}$, вообще говоря, не существует универсальной стратегии, оптимальной при L_2-компактных ограничениях на помеху.

Пример 1. Рассмотрим скалярную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = u(\tau) \cdot v(\tau), & x(0) = 0, \\ u(\tau) \in \mathcal{P},\ v(\tau) \in \mathcal{Q}, & \tau \in T \triangleq [0, 1],\ \mathcal{P} \triangleq \mathcal{Q} \triangleq \{-1, 1\}, \end{cases} \tag{15}$$

и показатель качества

$$\gamma(x(\cdot)) \triangleq x(1), \tag{16}$$

очевидно, непрерывный в $C(T, \mathbb{R})$. Множества измеримых по Борелю функций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ на T удовлетворяющих ограничениям (15), как выше, обозначим $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

С помощью теоремы 1 проверяется, что в задаче управления (15)–(16) выполняются равенства

$$\Gamma_{\mathrm{C}}(t_*, z_*) = \Gamma_{\mathrm{P}}(t_*, z_*) = \Gamma_{\mathrm{Q}}(t_*, z_*) = z_* + t_* - 1, \quad (t_*, z_*) \in (-\infty, 1] \times \mathbb{R},$$

где $\Gamma_{\mathrm{C}}(t_*, z_*)$, $\Gamma_{\mathrm{P}}(t_*, z_*)$ — значения оптимального гарантированного результата в классе $\mathbf{S}$ при L_2-компактных и программных ограничениях на помеху, соответственно, а $\Gamma_{\mathrm{Q}}(t_*, z_*)$ — значения оптимального гарантированного результата в классе квазистратегий $\mathbf{Q}$ в начальной позиции $(t_*, z_*) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

Положим
$$G \triangleq \{(\tau, x) \mid |x| \leqslant \tau + 1, \tau \in [0,1]\}.$$

Более точно доказываемое далее утверждение формулируется следующим образом: в задаче управления (15)–(16) не существует стратегии $U_u \in \mathbf{U}_{pos}$, оптимальной при L_2-компактных ограничениях на помеху для всех начальных позиций из множества G.

Пусть, вопреки утверждению, стратегия $U_u \in \mathbf{U}_{pos}$ удовлетворяет равенствам:

$$\Gamma_{\mathrm{C}}(t_*, z_*, U_u) = \Gamma_{\mathrm{C}}(t_*, z_*) = t_* + z_* - 1, \quad (t_*, z_*) \in G. \tag{17}$$

Тогда, следуя рассуждениям [12], можно установить, что каждое из множеств

$$U_- \triangleq \{(\tau, x) \in G \mid U_u(\tau, x) = -1\}, \quad U_+ \triangleq \{(\tau, x) \in G \mid U_u(\tau, x) = 1\}$$

является всюду плотным во множестве G.

Опираясь на этот факт, мы построим последовательность

$$\{(z_{*k}, \Delta_k, v_k(\cdot)) \in \mathbb{R} \times \Delta_T \times \mathcal{V} \mid k \in \mathbb{N}\},$$

удовлетворяющую соотношениям:

$$\begin{gathered} \lim_{k\to\infty} z_{*k} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0, \\ \lim_{k\to\infty} \|v_k(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L_2([0,1];\mathbb{R})} = 0, \quad v_0(\tau) \triangleq 1,\ \tau \in [0,1], \\ U_u(\tau_{ki}, x_k(\tau_{ki})) = 1, \quad \tau_{ki} \in \Delta_k, \quad i \in 1..n_{\Delta_k}, \\ x_k(\cdot) \triangleq x(\cdot, 0, z_{*k}, \{U_u, \Delta_k\}, v_k(\cdot)), \quad k \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{18}$$

Из этих соотношений сразу следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k(\cdot) - x_0(\cdot)\|_{C([0,1];\mathbb{R})} = 0, \quad x_0(\tau) \triangleq \tau,\ \tau \in [0,1].$$

Как известно, последовательность, сходящаяся в сильной топологии пространства $L_2(T, \mathbb{R})$, образует множество, компактное в этой топологии. Следовательно, в силу сходимости (18) имеем $\{v_k(\cdot) \mid k \in \mathbb{N}\} \in \mathbf{comp}_{L_2(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})$ и

$$x_0(\cdot) \in X(0, U_u, \{v_k(\cdot) \mid k \in \mathbb{N}\}) \subset \mathcal{X}_{\mathrm{C}}(0, U_u).$$

Последнее соотношение влечет равенство

$$\Gamma_{\mathrm{C}}(0, 0, U_u) = 1,$$

противоречащее (17) при $(t_*, z_*) = (0, 0)$.

Обратимся к построению указанных последовательностей. Всегда выполнено по крайней мере одно из утверждений:

(а) существует последовательность $(z_k^+)_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что $\lim_{k\to\infty} z_k^+ = 0$, $U_u(0, z_k^+) = 1$, $k \in \mathbb{N}$;

(б) существует последовательность $(z_k^-)_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что $\lim_{k\to\infty} z_k^- = 0$, $U_u(0, z_k^-) = -1$, $k \in \mathbb{N}$.

Если выполнено (а), то положим $(z_{*k})_{k\in\mathbb{N}} \triangleq (z_k^+)_{k\in\mathbb{N}}$ и $v_k(\tau) \triangleq 1$ для всех моментов $\tau \in [\tau_{k0}, \tau_{k1})$, то есть на первом интервале разбиения Δ_k. Если же (а) не выполнено, то непременно выполняется (б), и мы положим $(z_{*k})_{k\in\mathbb{N}} \triangleq (z_k^-)_{k\in\mathbb{N}}$ для всех моментов $\tau \in [\tau_{k0}, \tau_{k1})$ (момент $\tau_{k1} \in \Delta_k$ будет определен ниже). Затем значения помехи $v_k(\cdot)$ будут инвертированы (поменяют знак на противоположный) на малом завершающем интервале $[\tau'_{k1}, \tau_{k1}) \subset [\tau_{k0}, \tau_{k1})$. Момент $\tau'_{k1} \in [\tau_{k0}, \tau_{k1}]$ также определяется ниже. На всех последующих интервалах $\tau \in [\tau_{k(i-1)}, \tau_{ki})$, $i \in 1..n_\Delta$ значение помехи $v_k(\cdot)$ сначала будут устанавливаться равными 1 на всем интервале разбиения, а затем изменяться на -1 на небольшом завершающем подинтервале $\tau \in [\tau'_{k(i-1)}, \tau_{ki}) \subset [\tau_{k(i-1)}, \tau_{ki})$.

Перейдем к определению разбиений Δ_k и моментов τ'_{ki}. Положим

$$\bar{\tau}_{ki} \triangleq \frac{i}{2^k}, \quad \varepsilon_k \triangleq \frac{1}{k2^{k+1}}, \quad i \in 0..2^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Для определения моментов τ'_{k1}, τ_{k1} зададим круг радиуса ε_k с центром в точке $(\bar{\tau}_{k1}, z_{*k} + \bar{\tau}_{k1} - \sqrt{2}\varepsilon_k)$, то есть круг, касающийся снизу прямой $y(\tau) \triangleq z_{*k} + \tau$, которая в свою очередь совпадает с началом движения $x_k(\cdot)$. Этот круг будет целиком лежать во множестве G. В силу плотности в G множества U^+ данный круг непременно содержит точку $(\tau^+_{k1}, x^+_{k1}) \in U^+$. Положим $\tau_{k1} \triangleq \tau^+_{k1}$, а момент τ'_{k1} выберем из интервала $[\bar{\tau}_{k1} - \sqrt{2}\varepsilon_k, \bar{\tau}_{k1}]$ так, чтобы инвертированием значений $v_k(\cdot)$ на интервале $[\tau'_{k1}, \tau_{k1}]$ было удовлетворено равенство $x_k(\tau_{k1}) = x^+_{k1}$. Существование такого момента проверяется посредством теоремы Ролля. На всех последующих интервалах разбиения Δ_k процедура повторяется с тем отличием, что значения помехи $v_k(\cdot)$ полагаются равными 1 вначале и -1 на малом завершающем интервале.

В результате этих построений реализация управления в пошаговых движениях на всех интервалах разбиения кроме, может быть, первого будет равняться 1. Помеха также будет принимать значение 1 всюду за исключением малых «завершающих» интервалов и, быть может, первого интервала. При этом знаки управления и помехи на первом интервале согласованы так, что правая часть системы равняется 1. Таким образом, правая часть системы (15) вдоль движения $x_k(\cdot)$ равняется 1 всюду за исключением множества «завершающих» интервалов, мера которых в сумме не превосходит величины

$$\sum_{i \in 1..2^k} \tau_{ki} - \tau'_{ki} \leqslant \sum_{i \in 1..2^k} \sqrt{2}\varepsilon_k = \sqrt{2}\frac{1}{k2^{k+1}}2^k = \frac{1}{k\sqrt{2}}.$$

И, следовательно, мера множества, на котором помеха $v_k(\cdot)$ отлична от 1 не превосходит величины

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{k\sqrt{2}}.$$

Из этой оценки сразу следуют сходимость (18). Остальные заявленные свойства последовательностей $(z_{*k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(v_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ следуют непосредственно из построения.

Для показателей качества более сложного вида отсутствие решения в классе $\mathbf{U}_{pos}$ может быть установлено без апелляции к свойству универсальности.

Пример 2. Рассмотрим пример (см. [13]) скалярной управляемой системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = u(\tau)f_1(\tau) + v(\tau)f_2(\tau), & x(0) = 0, \\ u(\tau) \in \mathcal{P},\ v(\tau) \in \mathcal{Q}, & \tau \in T \triangleq [0, 4\pi],\ \mathcal{P} \triangleq \mathcal{Q} \triangleq [-1, 1], \end{cases}$$

$$f_1(\tau) \triangleq \begin{cases} 0, & \tau \in [0, 2\pi], \\ \sin(\tau), & \tau \in [2\pi, 4\pi], \end{cases} \qquad f_2(\tau) \triangleq \begin{cases} \sin(\tau), & \tau \in [0, 2\pi], \\ 0, & \tau \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

с показателем качества вида

$$\gamma(x(\cdot)) \triangleq |\max_{\tau \in [0, 2\pi]} x(\tau) - \max_{\tau \in [2\pi, 4\pi]} x(\tau)|, \quad (x(\cdot)) \in C(T, \mathbb{R}),$$

очевидно, непрерывным в $C(T,\mathbb{R})$.

Неравенство $\inf_{U\in\mathbf{U}_{pos}}\sup_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_{\text{c}}(0,U)}\gamma(x(\cdot))\geqslant 1$ следует из рассмотрения двух помех

$$v_1(\tau)\triangleq 0,\ \tau\in[0,4\pi],\qquad v_2(\tau)\triangleq\begin{cases}1, & \tau\in[0,2\pi],\\ 0, & \tau\in(2\pi,4\pi].\end{cases}$$

Соотношение $\Gamma_{\text{C}}(0)=0$ также легко проверяется при рассмотрении квазистратегии

$$\bar{\alpha}(v(\cdot))(\tau)\triangleq\begin{cases}0, & \tau\in[0,2\pi],\\ v(\tau-2\pi), & \tau\in(2\pi,4\pi].\end{cases}$$

В самом деле, так как выполнены условия теоремы 1, мы можем записать следующие соотношения $0\leqslant\Gamma_{\text{C}}(0)=\Gamma_{\text{Q}}(0)\leqslant\sup_{x(\cdot)\in\mathcal{X}(0,\bar{\alpha}(\cdot))}\gamma(x(\cdot))=0$. И, значит, в данном примере выполняется неравенство $\Gamma_{\text{C}}(0)<\inf_{U\in\mathbf{U}_{pos}}\sup_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_{\text{c}}(0,U)}\gamma(x(\cdot))$.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12–П–1–1002), а также при поддержке гранта РФФИ (проект 12–01–00290).

Литература

1. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. — М.: Наука, 1974.
2. Субботин, А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления / А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. — М.: Наука, 1981.
3. Барабанова, Н.Н. О непрерывных стратегиях уклонения в игровых задачах о встрече движений / Н.Н. Барабанова, А.И. Субботин // Прикладная математика и механика. — 1970. — Т. 34, вып. 5. – С. 796–803.
4. Барабанова Н.Н. О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи / Н.Н. Барабанова, А.И. Субботин // Прикладная математика и механика. — 1971. — Т. 35, вып. 3. – С. 385–392.
5. Kryazhimskii, A.V. The Problem of Optimization of the Ensured Result: Unimprovability of Full-Memory Strategies / A.V. Kryazhimskii // Constantin Caratheodory: An International Tribute, T.M. Rassias Ed., World Scientific. 1991.
6. Красовский, Н.Н. Программное поглощение в дифференциальных играх / / Н.Н. Красовский // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 201, № 2. – С. 270–272.
7. Красовский, Н.Н. Альтернатива для игровой задачи сближения / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34, вып. 6. – С. 1005–1022.
8. Серков, Д.А. Гарантированное управление при функциональных ограничениях на помеху / Д.А. Серков // Математическая теория игр и ее приложения. – 2012. – Т. 4, вып. 2. – С. 71–95.
9. Варга, Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга. – М.: Наука, 1977. – 624 с.
10. Кряжимский, А.В. О моделировании управления в динамической системе / А.В. Кряжимский, Ю.С. Осипов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1983. – № 2. – С. 51–60.
11. Osipov, Yu.S. Inverse Problem of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions / Yu.S. Osipov, A.V. Kryazhimskii. – London: Gordon and Breach, 1995.

12. Субботина Н. Н. Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх / Н.Н. Субботина // Дифференциальные уравнения. – 1983. –Т. 19, № 11. – С. 1890–1896.

13. Ченцов, А.Г. Программные конструкции в дифференциальных играх с информационной памятью / А.Г. Ченцов // Оптимальное управление системами с неопределенной информацией. – Свердловск, 1980. – С. 141–144.

Дмитрий Александрович Серков, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и механики Уральского отделения РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация), доцент, кафедра «Вычислительные методы и уравнения математической физики», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (г. Екатеринбург, Российская Федерация), serkov@imm.uran.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫,
2013, vol. 6, no. 2, pp. 62–73.

MSC 93C15, 49N30, 49N35

On the Model Motions in Control Problem with Functional Constraints on Disturbances

D.A. Serkov, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, serkov@imm.uran.ru

A control problem for a system described by an ordinary differential equation is considered. It is suggested that the values of the control and of disturbance belong compact sets at every instant. It is also assumed that the disturbance meets some additional functional constraints showing the nature of the problem under consideration. The control quality is assessed by the functional continuous in the metrics of uniform convergence over the set of phase paths of the system. As it is previously stated, a strategy with full memory solves the control problem under compact constraints to the disturbance as well as under other functional constraints which are reduced to them. At the same time, the strategies constructed for the cases above are not universal, i.e. they depend on the starting position of the system motion. The question of possibility to solve the control problem with functional constraints in a narrower (classic) set of strategies (positional strategies) remains open. This paper gives the construction of the universal optimal strategy using a model of the control system in the feedback path. The examples that lead to the expansion of the class of solution strategies up to strategies with full memory are also given.

Keywords: optimal guarantee, strategies with full memory, functional constraints.

References

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game–Theoretical Control Problems.* N.Y., Springer–Verlag, 1988. 517 p.

2. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimization of Guarantee in Control Problems* [Optimizatsiya garantii v zadachah upravleniya]. Moscow, Nauka, 1981. 288 p.

3. Barabanova N.N., Subbotin A.I. On Continuous Evasion Strategies in Game Problems on the Encounter of Motions: PMM. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 34, issue 5, pp. 796–803.

4. Barabanova N.N., Subbotin A.I. On Classes of Strategies in Differential Games of Evasion of Contact: PMM. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 1971, vol. 35, issue 3, pp. 385–395.
5. Kryazhimskii A.V. The Problem of Optimization of the Ensured Result: Unimprovability of Full-Memory Strategies. *Constantin Caratheodory: An International Tribute, T.M. Rassias Ed.*, World Scientific. 1991.
6. Krasovskii N.N. Programm Absorption in Differential Games [Programmnoye pogloshcheniye v differentsialnykh igrakh]. *Dokl. Acad. Nauk SSSR.* [Reports to Academy of Science of USSR], 1971, vol. 201, no. 3, pp. 270–272.
7. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An Alternative for the Game Problem of Convergence: PMM. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 1970, vol. 34, issue 6, pp. 1005–1022.
8. Serkov D.A. Guaranteed Control under the Functional Restrictions on Disturbance [Garantirovannoye upravleniye pri funktsionalnykh ogranicheniyakh na pomekhu]. *Matematicheskaya teoriya igr i yeye prilozheniya* [Mathematical Game Theory and Its Applications], 2012, vol. 4, issue 2, pp. 71–95.
9. Warga J. *Optimal Control of Differential and Functional Equations.* N.Y., Academic Press, 1972. 544 p.
10. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu. S. On the Control Modeling in Dynamic System [O modelirovanii upravleniya v dinamicheskoy sisteme]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tehn. Kibernet.* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Tech. Cybernetics], 1983, vol. 2, pp. 51–60.
11. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse Problem of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions.* London, Gordon and Breach. 1995.
12. Subbotina N. N. Universal Optimal Strategies in Positional Differential Games [Universalnyye optimalnyye strategii v pozitsionnykh differentsialnykh igrakh]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 1983, vol. 19, no. 11, pp. 1890–1896.
13. Chentsov A.G. Programming Constructs in Differential Games with Information Memory [Programmnyye konstruktsii v differentsialnykh igrakh s informatsionnoy pamyatyu]. *Optimal Control of Systems with Uncertain Information* [Optimalnoye upravleniye sistemami s neopredelennoy informatsiyey], Sverdlovsk, 1980, pp. 141–144.

Поступила в редакцию 5 сентября 2012 г.