УДК 517.9

НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С.А. Загребина

Неклассическими называют те модели математической физики, чьи представления в виде уравнений или систем уравнений в частных производных не укладываются в рамках одного из классических типов – эллиптического, параболического или гиперболического. Статья содержит обзор результатов автора в области неклассических моделей математической физики, для которых рассмотрены начально-конечные задачи, обобщающие условия Коши и Шоуолтера – Сидорова. Абстрактные результаты проиллюстрированы конкретными начально-конечными задачами для уравнений и систем уравнений в частных производных, возникающих в последнее время в приложениях, а именно, в теории фильтрации, гидродинамике и мезоскопической теории, и рассмотренных на множествах различной геометрической структуры.

Ключевые слова: неклассические модели математической физики, модель Плотникова, система Навье – Стокса, уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной, (многоточечные) начально-конечные задачи, относительный спектр.

Введение

В настоящее время развитие современных высоких технологий приводит к необходимости исследования физических процессов, возникающих в инжиниринге. В связи с этим возникает необходимость построения адекватных математических моделей и их дальнейшее изучение. В данной статье предполагается рассмотреть следующие модели.

I. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$ рассмотрим модель Плотникова [1, 2]

$$\begin{gathered}\theta_t(x,t) + \varphi_t(x,t) = \Delta\theta(x,t) + f(x,t), \quad \Delta\varphi(x,t) + \alpha\varphi(x,t) + \beta\theta(x,t) + g(x,t) = 0,\\ \frac{\partial\theta}{\partial n}(x,t) + \lambda\theta(x,t) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}(x,t) + \lambda\varphi(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+,\end{gathered} \tag{0.1}$$

которая является линеаризацией в нуле системы уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода. Здесь $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, функции f и g отвечают внешнему воздействию на систему.

II. Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Система уравнений Навье – Стокса

$$v_t = \nu\nabla^2 v - (v \cdot \nabla)v - \nabla p, \quad \nabla \cdot v = 0, \tag{0.2}$$

моделирующая динамику вязкой несжимаемой жидкости, была получена в 1845 году. Здесь вектор-функция $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_m = v_m(x,t)$ соответствует скорости жидкости, функция $p = p(x,t)$ – давлению, параметр $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризует вязкость. За истекшее время уравнения (0.2) изучались в различных аспектах, наиболее глубокие их исследования изложены в [3, 4]. Однако до сих пор не решен вопрос о существовании сильных решений задачи Коши – Дирихле

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega,$$
$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{0.3}$$

для уравнений (0.2) при произвольном $T \in \mathbb{R}_+$ и $n = 3$.

III. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f$$

моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде [5]. Здесь α и λ – вещественные параметры, характеризующие среду; параметр $\alpha \in \mathbb{R}_+$, а параметр λ может принимать и отрицательные значения, которые не противоречат физическому смыслу задачи [6], функция $f = f(x)$ играет роль внешней нагрузки. Кроме того, это уравнение описывает течение жидкостей второго порядка [7], процесс теплопроводности с «двумя температурами» [8], процесс влагопереноса в почве [9]. Необходимо отметить, что одномерное уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной является одномерным аналогом линеаризованной системы Осколкова [10, 11], описывающей динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина – Фойгта.

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество дуг. Мы предполагаем,что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и ширину $d_j > 0$. На графе $\mathbf{G}$ нас будут интересовать задачи с краевыми

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j,\, E_k \in E^{\alpha}(V_i), E_m, E_k \in E^{\omega}(V_i); \end{gathered} \tag{0.4}$$

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0; \tag{0.5}$$

условиями для уравнений

$$\lambda u_{jt} - u_{jxxt} = \alpha u_{jxx}, \tag{0.6}$$

описывающих давление жидкости в случае, когда среда представляет собой связный пласт, имеющий слоистую структуру. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (0.4) требует, чтобы все решения были непрерывными на вершинах графа; а (0.5) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю – аналог условия Кирхгоффа. Если, к примеру, граф состоит из единственной дуги с двумя вершинами, то условия (0.4) отсутствуют, а условия (0.5) превращается в условие Неймана.

В подходящих функциональных пространствах задачи (0.1); (0.2), (0.3); (0.4) – (0.6) редуцируются к линейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{0.7}$$

Впервые уравнения, сводящиеся к виду (0.7), появились в работе А. Пуанкаре [12], однако их систематическое изучение началось с работы С.Л. Соболева [13] (см. обстоятельный обзор в [14]).

Целью нашего исследования является разрешимость для уравнения (0.7) так называемой *начально-конечной задачи*

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \; j = \overline{0,n}, \tag{0.8}$$

$-\infty \le a < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < b \le +\infty$, P_j – *относительно спектральные проекторы* (которые будут определены позднее). Заметим, что если $n = 1$, то (0.8) превратится в более простую задачу

$$P_{in}(u(0) - u_0) = 0, \ P_{fin}(u(\tau) - u_\tau) = 0. \tag{0.9}$$

История задачи (0.7), (0.9) начинается с одной стороны в [15], где она названа задачей Веригина, а с другой стороны и независимо – в [16], где она названа задачей сопряжения. Однако в обоих случаях вместо относительно спектральных проекторов P_{in} и P_{fin} рассматриваются спектральные проекторы оператора L, причем L вдобавок предполагается самосопряженным. Наш подход основан на концепции относительного спектра, предложенной Г.А. Свиридюком [17], и развитой его учениками [18–20], в частности, В.Е. Федоровым. Кроме того, методы, предложенные Г.А. Свиридюком, стали фундаментом алгоритмов численного решения уравнений леонтьевского типа (т.е. конечномерных уравнений соболевского типа), которые в свою очередь сыграли важную роль в численных исследованиях экономических [21–23] и технических моделей [24, 25].

Первые результаты в этом направлении изложены в [26], где рассмотрен частный случай задачи (0.9) причем с более жесткими чем здесь условиями на L-спектр оператора M. В [27] рассмотрена задача (0.9), но для тех же условий на L-спектр оператора M, что и в [26], однако в этом случае отмечена возможность большего произвола в относительно спектральных условиях.

Необходимо отметить, что в настоящее время начально-конечные задачи для неклассических уравнений математической физики активно изучаются, в том числе и на множествах различной геометрической структуры [28–30]. Заметим еще, что если $\sigma^L_{fin}(M) = \emptyset$, то задача (0.9) превращается в задачу Шоуолтера – Сидорова [31] $P(u(0) - u_0) = 0$ и поэтому считается естественным обобщением последней [32], которая, в свою очередь, обобщает задачу Коши.

Статья кроме вводной части и списка литературы содержит семь параграфов. Первый параграф посвящен исследованию задачи (0.7), (0.9), причем оператор M сильно (L, p)-радиален [33]. В качестве конкретной интерпретации во втором параграфе статьи показывается однозначная разрешимость начально-конечной задачи (0.9) для системы уравнений (0.1). Частный случай этих результатов был получен в [34]. В третьем параграфе рассматривается задача (0.7), (0.9) в случае (L, p)-секториальности оператора M [35]. Данные абстрактные результаты проиллюстрированы конкретным примером, приведенным в четвертом параграфе. Здесь приведена теорема об однозначной разрешимости начально-конечной задачи для системы Навье – Стокса (0.2), (0.3) [36]. В пятом параграфе приводится обобщенная теорема о расщеплении, которая используется в шестом параграфе при доказательстве однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи (0.8) для уравнения соболевского типа с (L, p)-ограниченным оператором M (0.7) [37]. В последнем, седьмом, параграфе рассматривается начально-конечная задача для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной на конечном связном ориентированном графе (задача (0.4) – (0.6)), результаты которой опубликованы в [38].

Наконец заметим, что все рассмотрения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако при рассмотрении «спектральных вопросов» вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированны движением против часовой стрелки и ограничивают области, лежащие слева при таком движении.

1. Относительно сильно p-радиальный оператор

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен). Обозначим через

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$$

L-резольвентное множество оператора M, $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ – L-спектр оператора M, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – правую L-резольвенту оператора M, а через $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – левую.

Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален (терминология и результаты см. гл. 3 [17]). Известно, что при условии сильной (L,p)-радиальности существует единица разрешающей полугруппы однородного уравнения (0.2), которая является проектором, расщепляющим пространство $\mathfrak{U}$

$$P = U^0 = s\text{-}\lim_{t\to 0+} U^t, \qquad U^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k(p+1)}{t}R^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\right)^{k(p+1)}.$$

Аналогично можно построить проектор для пространства $\mathfrak{F}$

$$Q = F^0 = s\text{-}\lim_{t\to 0+} F^t, \qquad F^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k(p+1)}{t}L^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\right)^{k(p+1)}.$$

Введем в рассмотрение ядра $\ker U^\cdot = \mathfrak{U}^0$, $\ker F^\cdot = \mathfrak{F}^0$ и образы $\mathrm{im} U^\cdot = \mathfrak{U}^1$, $\mathrm{im} F^\cdot = \mathfrak{F}^1$ этих полугрупп. В силу сильной (L,p)-радиальности оператора M [39]

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \quad (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}). \tag{A1}$$

Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k)$, $k = 0,1$. И если оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$. В случае сильной (L,p)-радиальности оператора M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ выполняется еще одно условие [40] –

$$\text{существует оператор} \quad L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1). \tag{A2}$$

Наконец, введем еще одно важное условие –

$$\begin{array}{l} L-\text{спектр } \sigma^L(M) \text{ оператора } M \text{ представим в виде} \\ \sigma^L(M) = \sigma^L_{fin}(M) \cup \sigma^L_{in}(M), \text{ причем } \sigma^L_{fin}(M) \\ \text{содержится в ограниченной области } D \subset \mathbb{C} \\ \text{с кусочно гладкой границей } \gamma, \text{ где } \gamma \cap \sigma^L(M) = \emptyset. \end{array} \tag{A3}$$

Построим относительно спектральный проектор

$$P_{fin} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu,$$

при этом в случае сильной (L,p)-радиальности оператора M справа выполняется $P_{fin}P = PP_{fin} = P_{fin}$. Значит, в данном случае существует проектор $P_{in} = P - P_{fin}$. Положим $\mathfrak{U}^1_{in(fin)} = \mathrm{im} P_{in(fin)}$, $\mathfrak{F}^1_{in(fin)} = \mathrm{im} Q_{in(fin)}$, и через $L_{in(fin)}$ $(M_{in(fin)})$ обозначим сужение оператора L (M) на подпространства $\mathfrak{U}^1_{in(fin)}$ соответственно.

Итак, пусть выполнены условия (A1) – (A3), фиксируем $\tau \in \mathbb{R}_+$, u_0, $u_\tau \in \mathfrak{U}$.

Определение 1.2. Вектор-функцию $u \in C([0,\tau];\mathfrak{U}) \cap C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (0.7), *назовем решением начально-конечной задачи (0.7), (0.9)*, если она удовлетворяет уравнению (0.7), и $\lim\limits_{t\to 0+} P_{in}(u(t)-u(0)) = 0$, $\lim\limits_{t\to\tau-} P_{fin}(u(t)-u(\tau)) = 0$.

Имеет место следующая

Теорема 1.1. (Теорема о расщеплении) [17]

Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда

(i) операторы $L_{in(fin)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1_{in(fin)};\mathfrak{F}^1_{in(fin)})$, причем существуют операторы $L^{-1}_{in(fin)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1_{in(fin)};\mathfrak{U}^1_{in(fin)})$;

(ii) операторы $M_{in(fin)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1_{in(fin)};\mathfrak{F}^1_{in(fin)})$.

Теорема 1.2. *(i) семейство $\{U^t_{fin} : t \in \mathbb{R}\}$, $U^t_{fin} = U^t\Big|_{\mathfrak{U}^1_{fin}\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1_{fin})}$ является однопараметрической аналитической разрешающей группой однородного уравнения (0.2) аналитически продолжимой во всю комплексную плоскость, причем $P_{fin} = U^0_{fin}$* [17, гл. 3]*;*

(ii) семейство $\{U^t_{in} : t > 0\}$, $U^t_{in} = U^t\Big|_{\mathfrak{U}^1_{in}\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1_{in})}$ является однопараметрической разрешающей сильно непрерывной полугруппой однородного уравнения (0.2), причем $P_{in} = U^0_{in} = s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} U^t_{in}$ [17, гл. 3]*;*

(iii) семейство $\{R^t_{fin} : t \in \mathbb{R}\}$,

$$R^t_{fin} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{fin}} (\mu L_{fin} - M_{fin})^{-1} e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

экспоненциально ограничено и аналитически продолжимо во всю комплексную плоскость [20, гл. 2]*;*

(iv) семейство $\{R^t_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1_{in};\mathfrak{U}^1_{in}) : t \geq 0\}$

$$R^t_{in} = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\left(L_{in} - \frac{t}{k(p+1)}M_{in}\right)^{-1} L_{in}\right)^{k(p+1)}\left(L_{in} - \frac{t}{k(p+1)}M_{in}\right)^{-1}, \quad R^0_{in} = s\text{-}\lim_{t\to 0+} R^t_{in}$$

экспоненциально ограничено и сильно непрерывно [20, гл. 2].

(v) $U^s_{fin(in)} R^t_{fin(in)} = R^{s+t}_{fin(in)}$, $R^0_{in(fin)} = L^{-1}_{in(fin)} Q_{in(fin)}$ [33].

Подействуем на уравнение (0.7) последовательно проекторами $\mathbb{I} - Q$ и $Q_{in(fin)}$ и сведем его к эквивалентной системе из трех независимых уравнений

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1} f^0, \tag{1.1}$$

$$\dot{u}^1_{in} = S_{in} u^1_{in} + L^{-1}_{in} f^1_{in}, \tag{1.2}$$

$$\dot{u}^1_{fin} = S_{fin} u^1_{fin} + L^{-1}_{fin} f^1_{fin}, \tag{1.3}$$

где $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, нильпотентен степени $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$; $S_{in(fin)} = L^{-1}_{in(fin)} M_{in(fin)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1_{in(fin)})$, причем спектр $\sigma(S_{in(fin)}) = \sigma^L_{in(fin)}(M)$; $f^0 = (\mathbb{I} - Q)f$, $f^1_{in(fin)} = Q_{in(fin)} f$, $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$, $u^1_{in(fin)} = P_{in(fin)} u$.

Теорема 1.3. [33] *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, и часть спектра $\sigma^L_{fin}(M)$ ограничена. Тогда для любых векторов $u_0, u_\tau \in \mathfrak{U}$ и любой вектор-функции $f : [0,\tau] \to \mathfrak{F}$, такой, что $f^0 \in C^{p+1}((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$, $f^1_{in} \in C([0,\tau];\mathfrak{F}^1_{in})$, $f^1_{fin} \in C([0,\tau];\mathfrak{F}^1_{fin})$, существует* *единственное решение* $u \in C([0,\tau];\mathfrak{U}) \cap C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$ *задачи (0.7), (0.9), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t) + U_{in}^t u_0 + \int_0^t R_{in}^{t-s} f_{in}^1(s)ds + U_{fin}^{t-\tau} u_\tau - \int_t^\tau R_{fin}^{t-s} f_{fin}^1(s)ds. \quad (1.4)$$

2. Линеаризованная система уравнений фазового поля

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$ рассмотрим модель Плотникова

$$\begin{gathered} \theta_t(x,t) + \varphi_t(x,t) = \Delta\theta(x,t) + f(x,t), \\ \Delta\varphi(x,t) + \alpha\varphi(x,t) + \beta\theta(x,t) + g(x,t) = 0, \end{gathered} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}(x,t) + \lambda\theta(x,t) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}(x,t) + \lambda\varphi(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (2.2)$$

Здесь искомыми функциями являются $\theta(x,t)$, $\varphi(x,t)$.

Редуцируем задачу (2.1), (2.2) к уравнению

$$L\dot{u} = Mu + f. \quad (2.3)$$

Для этого, сначала сделаем замены

$$\theta(x,t) + \varphi(x,t) = u(x,t), \quad \varphi(x,t) = v(x,t).$$

Тогда система (2.2) примет вид

$$\begin{gathered} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - \Delta v(x,t) + f(x,t), \\ \Delta v(x,t) + (\alpha-\beta)v(x,t) + \beta u(x,t) + g(x,t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) + \lambda u(x,t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}(x,t) + \lambda v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \end{gathered} \quad (2.4)$$

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U} = (L_2(\Omega))^2$. Построим операторы

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}), \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ \beta I & (\alpha-\beta)I + \Delta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F}),$$

причем $\ker L = \{0\} \times L_2(\Omega)$, а

$$\mathrm{dom} M = \{(u,v) \in (H^2(\Omega))^2 : \left(\frac{\partial}{\partial n} + \lambda\right) u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial n} + \lambda\right) v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

Пусть $Aw = \Delta w$, $\mathrm{dom} A = \{w \in H^2(\Omega) : \frac{\partial w}{\partial n}(x) + \lambda w(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$, тогда $A \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. Тогда L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{\mu_k = \frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}, k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = \beta - \alpha\}\right\}.$$

Понятно, что для такого множества можно подобрать контур $\gamma \in \mathbb{C}$, который бы удовлетворял условию (A3).

Лемма 2.1. [20] *Пусть $\beta - \alpha \notin \sigma(A)$. Тогда оператор M сильно $(L,0)$-радиален.*

Построим проекторы

$$P_{in} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{in}^L(M)} \langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{in}^L(M)} \frac{\beta\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\beta-\alpha-\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \qquad P_{fin} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{fin}^L(M)} \langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{fin}^L(M)} \frac{\beta\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\beta-\alpha-\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

и будем искать решение начально-конечной задачи

$$P_{in}(u(0)-u_0) = 0, \quad P_{fin}(u(\tau)-u_\tau) = 0 \tag{2.5}$$

для системы (2.4). Простоты ради ограничимся случаем $f \equiv \mathrm{const}$ и $g \equiv \mathrm{const}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\beta-\alpha$, $-\alpha$, $0 \notin \sigma(A)$, и существуют такие λ_k, что $\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{fin}^L(M)$. Тогда при любых $u_0 \in \mathrm{dom}A$, $u_\tau, f, g \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $u \in C^1([0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи (2.5) для системы (2.4), которое к тому же имеет вид*

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\langle g,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\beta-\alpha-\lambda_k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{in}^L(M)} \exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\, t\right)\langle u_0,\varphi_k\rangle\varphi_k \\ \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{in}^L(M)} \frac{\beta\exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\, t\right)}{\beta-\alpha-\lambda_k}\langle u_0,\varphi_k\rangle\varphi_k \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{fin}^L(M)} \exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\,(t-\tau)\right)\langle u_\tau,\varphi_k\rangle\varphi_k \\ \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{fin}^L(M)} \frac{\beta\exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\,(t-\tau)\right)}{\beta-\alpha-\lambda_k}\langle u_\tau,\varphi_k\rangle\varphi_k \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{in}^L(M)} \left[1-\exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\, t\right)\right] \frac{(\beta-\alpha-\lambda_k)\langle f,\varphi_k\rangle - \lambda_k\langle g,\varphi_k\rangle}{\lambda_k(\alpha+\lambda_k)}\varphi_k \\ \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{in}^L(M)} \left[1-\exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\, t\right)\right] \frac{\beta(\beta-\alpha-\lambda_k)\langle f,\varphi_k\rangle + \langle g,\varphi_k\rangle}{\lambda_k(\alpha+\lambda_k)(\beta-\alpha-\lambda_k)}\varphi_k \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{fin}^L(M)} \left[1-\exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\,(t-\tau)\right)\right] \frac{(\beta-\alpha-\lambda_k)\langle f,\varphi_k\rangle - \lambda_k\langle g,\varphi_k\rangle}{\lambda_k(\alpha+\lambda_k)}\varphi_k \\ \sum\limits_{\mathrm{Re}\mu_k \in \sigma_{fin}^L(M)} \left[1-\exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\,(t-\tau)\right)\right] \frac{\beta(\beta-\alpha-\lambda_k)\langle f,\varphi_k\rangle + \langle g,\varphi_k\rangle}{\lambda_k(\alpha+\lambda_k)(\beta-\alpha-\lambda_k)}\varphi_k \end{pmatrix}.$$

3. Относительно p-секториальный оператор

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), причем оператор M (L,p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (терминология и результаты см. гл. 3 [17]). Рассмотрим линейное однородное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{3.1}$$

Тогда существуют вырожденные аналитические полугруппы операторов

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu \quad \text{и} \quad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu,$$

определенные на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Введем в рассмотрение ядра $\ker U^\cdot = \mathfrak{U}^0$, $\ker F^\cdot = \mathfrak{F}^0$ и образы $\mathrm{im} U^\cdot = \mathfrak{U}^1$, $\mathrm{im} F^\cdot = \mathfrak{F}^1$ этих полугрупп. Нетрудно показать, что $\overline{\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1} = \overline{\mathfrak{U}^0} \oplus \overline{\mathfrak{U}^1} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\overline{\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1} = \overline{\mathfrak{F}^0} \oplus \overline{\mathfrak{F}^1} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$. Нам потребуется более сильное утверждение

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \quad (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}), \tag{B1}$$

которое имеет место либо в случае сильной (L,p)-секториальности оператора M справа (слева), $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, либо рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) [40]. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$. И если оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$, а также проектор $P = s - \lim\limits_{t \to 0+} U^t$ $(Q = s - \lim\limits_{t \to 0+} F^t)$, расщепляющий пространство $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) согласно (B1), причем $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$ ($\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im} Q$). Введем еще одно условие –

$$\text{существует оператор} \quad L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1), \tag{B2}$$

которое имеет место в случае сильной (L,p)-секториальности оператора M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. (Кстати, в [39] показано, что (B1) вместе с условием (L,p)-секториальности оператора M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, дает сильную (L,p)-секториальность оператора M справа (слева), $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, а если к ним добавить условие (B2), то получим сильную (L,p)-секториальность оператора M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$).

Наконец, введем еще одно важное условие –

$$\begin{array}{l} L-\text{спектр } \sigma^L(M) \text{ оператора } M \text{ представим в виде} \\ \sigma^L(M) = \sigma^L_{fin}(M) \cup \sigma^L_{in}(M), \text{ причем } \sigma^L_{fin}(M) \\ \text{содержится в ограниченной области } D \subset \mathbb{C} \\ \text{с кусочно гладкой границей } \gamma, \text{ причем } \gamma \cap \sigma^L(M) = \emptyset. \end{array} \tag{B3}$$

Построим относительно спектральный проектор [35]

$$P_{fin} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R^L_\mu(M) d\mu,$$

причем оказывается, что при условии сильной (L,p)-секториальности оператора M справа $P_{fin} P = P P_{fin} = P_{fin}$. Значит, в данном случае существует проектор $P_{in} = P - P_{fin}$. Итак, пусть выполнены условия (B1) – (B3), фиксируем $\tau \in \mathbb{R}_+$, u_0, $u_\tau \in \mathfrak{U}$, и для уравнения (3.1) рассмотрим начально-конечную задачу: найти вектор-функцию $v \in {}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (3.1) и условиям

$$P_{in}(u(0) - u_0) = 0, \ P_{fin}(u(\tau) - u_\tau) = 0. \tag{3.2}$$

Тогда существует аналитическая группа $\{U^t_{fin} : t \in \mathbb{R}\}$, где

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \quad U^t_{fin} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu$$

такие, что $s - \lim\limits_{t \to 0+} U^t = P$ и $U^0_{fin} = P_{fin}$. Построим аналитическую полугруппу $\{U^t_{in} : t \in \mathbb{R}_+\}$, где $U^t_{in} = U^t - U^t_{fin}$. Очевидно, $s - \lim\limits_{t \to 0+} U^t_{in} = P_{in}$. Положим $\mathrm{im}\, P_{in(fin)} = \mathfrak{U}^1_{in(fin)}$; очевидно, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^1_{in} \oplus \mathfrak{U}^1_{fin}$. Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнены условия (B1) – (B3). Тогда при любых $\tau \in \mathbb{R}_+$, u_0, $u_\tau \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (3.1), (3.2), которое к тому же имеет вид $u(t) = U^t_{in} u_0 + U^{t-\tau}_{fin} u_\tau$.*

Тот факт, что вектор-функция $u(t) = U^t_{in}u_0 + U^{t-\tau}_{fin}u_\tau$ удовлетворяет уравнению (3.1), проверяется непосредственно. Выполнение условия (3.2) следует из соотношений $P_{in}U^t_{fin} = \mathbb{O}$ и $P_{fin}U^t_{in} = \mathbb{O}$, а также $U^t_{in} = P_{in}U^t_{in} = U^t_{in}P_{in}$ и $U^t_{fin} = P_{fin}U^t_{fin} = U^t_{fin}P_{fin}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ в случае U^t_{in} и при всех $t \in \mathbb{R}$ в случае U^t_{fin}. Единственность решения вытекает из эквивалентности уравнения (3.1) системе уравнений

$$u^0 = 0, \quad \dot{u}^1_{in} = S_{in}u^1_{in}, \quad \dot{u}^1_{fin} = S_{fin}u^1_{fin},$$

где $S_{in} = L^{-1}_{in}M_{in} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1_{in}; \mathfrak{F}^1_{in})$ – секториальный оператор, $S_{fin} = L^{-1}_{fin}M_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1_{fin}; \mathfrak{F}^1_{fin})$; подпространства $\mathfrak{F}^1_{in}$ и $\mathfrak{F}^1_{fin}$ строятся аналогично пространствам $\mathfrak{U}^1_{in}$ и $\mathfrak{U}^1_{fin}$, только вместо полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и группы $\{U^t_{fin} : t \in \mathbb{R}\}$ надо взять полугруппу $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и группу $\{F^t_{fin} : t \in \mathbb{R}\}$, где, соответственно,

$$F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad F^t_{fin} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu;$$

операторы $L_{in(fin)}$ ($M_{in(fin)}$) есть сужение операторов L_1 (M_1) на $\mathfrak{U}^1_{in(fin)}$ ($\mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^1_{in(fin)}$).

4. Уравнение Навье – Стокса

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = \mathbb{N}\backslash\{1\}$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим задачу Дирихле

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+$$

для системы уравнений Навье – Стокса

$$v_t = \nu\nabla^2 v - \nabla p, \quad \nabla \cdot v = 0. \tag{4.1}$$

Прежде чем редуцировать систему (4.1) к уравнению (3.1), представим ее в виде

$$v_t = \nu\nabla^2 v - p, \quad \nabla(\nabla \cdot v) = 0. \tag{4.2}$$

Система (4.2) получена из (4.1) после замены $\nabla p \to p$ [41].

Для редукции уравнений (4.2) к уравнению (3.1) нам потребуются функциональные пространства из [42]. Пусть $\mathbb{H}^2_\sigma$ и $\mathbb{H}^2_\pi$ ($\mathbb{H}_\sigma$ и $\mathbb{H}_\pi$) – подпространства соленоидальных и потенциальных вектор-функций пространства $\mathbb{H}^2 = (W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n$ ($\mathbb{L}^2 = (L^2(\Omega))^n$). Формулой $A = \mathrm{diag}\,\{\nabla^2, \ldots, \nabla^2\}$ задается линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным отрицательным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Обозначим через $A_{\sigma(\pi)}$ сужение оператора A на $\mathbb{H}^2_{\sigma(\pi)}$.

Лемма 4.1. (теорема Солонникова – Воровича – Юдовича). *Оператор* $A_{\sigma(\pi)} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2_{\sigma(\pi)}, \mathbb{H}_{\sigma(\pi)})$, *причем* $\sigma(A_{\sigma(\pi)}) = \sigma(A)$ *и* $A = A_\sigma\Sigma + A_\pi\Pi$.

Здесь через $\Pi \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^2_\pi)$ обозначен проектор вдоль $\mathbb{H}^2_\sigma$, $\Sigma = \mathbb{I} - \Pi$.

Лемма 4.2 (теорема Капитанского – Пилецкаса). *Формулой* $B : u \to \nabla(\nabla \cdot u)$ *задается оператор* $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2, \mathbb{H}_\pi)$, *причем* $\ker B = \mathbb{H}^2_\sigma$.

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} \equiv \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p$, $\mathbb{H}_p = \mathbb{H}_\pi$. Вектор $u \in \mathfrak{U}$ имеет вид $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p)$. Формулами

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A_\sigma & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \nu A_\pi & -\mathbb{I} \\ \mathbb{O} & B & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

задаются операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\mathrm{im} L = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$, $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_p$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\mathrm{dom}\ M = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}^2_\pi \times \mathbb{H}_p$. Итак, редукция уравнений (4.2) к уравнению (3.1) закончена.

Лемма 4.3. [43]. *При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$ оператор M сильно $(L,1)$-секториален.*

Построим подпространства $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{F}^1 = \mathbb{H}_\sigma \times \{0\} \times \{0\}$. Выполнение условий (B1) и (B2) очевидно, причем

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

где B_π – сужение оператора B на $\mathbb{H}^2_\pi$ (из леммы 2 вытекает, что $B_\pi : \mathbb{H}^2_\pi \to \mathbb{H}_\pi$ – топлинейный изоморфизм). Нетрудно также проверить, что

$$M_0^{-1}L_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} -$$

нильпотентный оператор степени 1.

Спектр $\sigma(A) = \{\lambda_k\}$, где $\lambda_k \in \mathbb{R}_-$ – собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, тогда $\sigma^L(M) = \{\nu^{-1}\lambda_k\}$. Понятно, что для такого множества можно подобрать контур $\gamma \in \mathbb{C}$, который бы удовлетворял условию (B3).

Теперь построим

$$U^t_{in(fin)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu^{-1}\lambda_k \in \sigma^L_{in(fin)}(M)} e^{\nu\lambda_k t}\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу теоремы 3.1 и леммы 4.3 справедлива следующая

Теорема 4.1. [36] *При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$, $u_0, u_\tau \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (3.2) для системы уравнений (4.2), причем это решение $u = u(t)$ имеет вид*

$$u_\sigma(t) = U_1^{t-\tau}u_{\tau\sigma} + U_2^t u_{0\sigma},\ u_\pi \equiv 0,\ u_p \equiv 0.$$

5. Обобщенная теорема о расщеплении

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен). Пусть относительный спектр оператора M $\sigma^L(M) = \sigma^L_0(M) \cup \sigma^L_1(M)$, причем

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^L_1(M) \neq \emptyset, \ \ \text{существует замкнутый контур} \\ \Gamma \subset \mathbb{C}, \ \text{ограничивающий область } D \supset \sigma^L_1(M), \\ \text{такой, что } \overline{D} \cap \sigma^L_0(M) = \emptyset. \end{array}\right\} \tag{5.1}$$

Построим интегралы *типа Ф. Рисса* (понимаемые в смысле Римана)

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\mu(M)d\mu, \tag{5.2}$$

где $R^L_\mu(M)$ $(L^L_\mu(M))$ – правая (левая) L-резольвенты оператора M.

Лемма 5.1. *Пусть $\sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M)$, причем выполнено (5.1). Тогда операторы $P : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ и $Q : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ – проекторы.*

Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0) = \ker P(\ker Q)$, $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1) = \mathrm{im}P(\mathrm{im}Q)$ и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия леммы 5.1. Тогда*

(i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) $M_0 \in Cl(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$;

(iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Как известно, оба этих утверждения первым сформулировал и доказал Г.А. Свиридюк, правда, при более ограничительном условии, а именно:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma^L(M) \neq \emptyset, \text{ существует замкнутый контур} \\ \Gamma \subset \mathbb{C}, \text{ ограничивающий область } D \supset \sigma^L(M).\end{array}\right\} \tag{5.3}$$

Однако внимательный анализ его доказательств (см. [17], лемма 4.1.1 и теорема 4.1.1) показывает, что они годятся и в нашем случае.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Пусть } \sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{n} \sigma_j^L(M), \, n \in \mathbb{N}, \text{ причем } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset, \\ \text{существует замкнутый контур } \Gamma_j \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } D_j \supset \sigma_j^L(M), \text{ такой, что} \\ \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset \text{ и } \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset \text{ при всех } j, k, l = \overline{1,n}, k \neq l.\end{array}\right\} \tag{5.4}$$

Аналогично (5.2) построим интегралы

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} L_\mu^L(M) d\mu, \quad j = \overline{1,n}. \tag{5.5}$$

Лемма 5.3. [37] *Пусть выполнены условия (5.3), (5.4). Тогда операторы*

(i) $P_j : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ и $Q_j : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ – проекторы, $j = \overline{1,n}$;

(ii) $P_k P_l = \mathbb{O}$, $Q_k Q_l = \mathbb{O}$, $k, l = \overline{1,n}$, $k \neq l$.

(iii) $P_0 = P - \sum\limits_{j=1}^{n} P_j$ и $Q_0 = Q - \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j$ – проекторы.

(Заметим, что здесь ради экономии места проекторы P_j и Q_j, $j = \overline{1,n}$, из (5.5), а проекторы P и Q из (5.2), но с заменой условия (5.1) на условие (5.3)).

Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0) = \ker P(\ker Q)$, $\mathfrak{U}_j^1(\mathfrak{F}_j^1) = \mathrm{im}P_j(\mathrm{im}Q_j)$, $j = \overline{0,n}$, и через L_0 (M_0) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^0$ ($\mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^0$), а через L_{1j} (M_{1j}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}_j^1$ ($\mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}_j^1$), $j = \overline{0,n}$.

Теорема 5.1. (Обобщенная теорема о расщеплении) [37] *Пусть выполнены условия (1.3), (1.4). Тогда*

(i) $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $L_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_j^1; \mathfrak{F}_j^1)$, $j = \overline{0,n}$;

(ii) $M_0 \in Cl(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_j^1; \mathfrak{F}_j^1)$, $j = \overline{0,n}$;

(iii) существуют операторы $L_{1j}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_j^1; \mathfrak{U}_j^1)$, $j = \overline{0,n}$, и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

6. Относительно p-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен) и $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), причем оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (терминология и результаты см. гл. 5 [17]). Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{6.1}$$

Решением $u = u(t)$ уравнения (6.1) назовем вектор-функцию $u \in {}^{\infty}(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению.

Определение 6.1. [17] Отображение $U^{\cdot} \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ назовем *группой разрешающих операторов уравнения (2.1)*, если

(i) $U^t U^s = U^{t+s}$ при всех $s,\ t \in \mathbb{R}$;

(ii) при всех $v \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u = U^t v$ есть решение уравнения (2.1).

В дальнейшем, следуя традиции, будем отождествлять группу разрешающих операторов уравнения (6.1) с ее графиком $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$, и в дальнейшем называть просто *группой уравнения (6.1)*. Группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ уравнения (6.1) будем называть *аналитической*, если она аналитически продолжима во всю комплексную плоскость с сохранением свойства (i).

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия (5.3), (5.4). Тогда существуют аналитические группы уравнения (6.1)*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_{\mu}(M)e^{\mu t}d\mu, \quad U^t_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_j} R^L_{\mu}(M)e^{\mu t}d\mu, j = \overline{1,n},$$

причем

(i) $U^t U^s_j = U^s_j U^t = U^{t+s}_j$ *при всех* $s,\ t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$;

(ii) $U^t_k U^s_l = U^s_l U^t_k = \mathbb{O}$ *при всех* $s,\ t \in \mathbb{R}$, $k,\ l = \overline{1,n}$, $k \neq l$.

(iii) $U^t_0 = U^t - \sum\limits_{j=1}^{n} U^t_j$ *– аналитическая группа уравнения (6.1).*

Далее возьмем вектор-функцию $f \in C^{\infty}((a,b); \mathfrak{F})$ и рассмотрим линейное неоднородое уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{6.2}$$

Вектор-функцию $u \in C^{\infty}((a,b); \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (6.2), назовем *решением уравнения* (6.2). Решение $u = u(t)$, $t \in (a,b)$ уравнения (6.2), удовлетворяющее условиям

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{0,n}, \tag{6.3}$$

назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи для уравнения* (6.2).

Теорема 6.1. [37] *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен, причем выполнено условие (5.4). Тогда для любых* $f \in C^{\infty}((a,b); \mathfrak{F}))$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$ *существует единственное решение задачи (6.2), (6.3), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p}(M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f^{(q)}(t) + \sum_{j=0}^{n} U_j^{t-\tau_j}u_j + \sum_{j=0}^{n}\int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s}L_{1j}^{-1}Q_j f(s)ds.$$

7. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество дуг. Мы предполагаем,что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и ширину $d_j > 0$. На графе $\mathbf{G}$ нас будут интересовать задачи с краевыми

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j,\ E_k \in E^{\alpha}(V_i), E_m, E_k \in E^{\omega}(V_i); \end{gathered} \tag{7.1}$$

$$\sum_{E_j\in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k\in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0; \tag{7.2}$$

условиями для уравнений

$$\lambda u_{jt} - u_{jxxt} = \alpha u_{jxx}. \tag{7.3}$$

Введем множество

$$\mathbf{L_2(G)} = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\},$$

которое становится гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g, h\rangle = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j(x) h_j(x)\, dx.$$

Через $\mathfrak{U}$ обозначим множество

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j),\ \text{и выполнено (7.2)}\}.$$

Множество $\mathfrak{U}$ является гильбертовым пространством со скалярным призведением и нормой

$$[u,v] = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx}(x) + u_j v_{jx}(x))\, dx, \quad \|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2(x) + u_j^2(x))\, dx.$$

В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(0, l_j)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а, значит, пространство $\mathfrak{U}$ корректно определено, плотно и компактно вложено в $\mathbf{L_2(G)}$. Отождествим $\mathbf{L_2(G)}$ со своим сопряженным и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ пространство к $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ – банахово пространство, причем вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно.

Формулой

$$\langle Au, v\rangle = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x) v_{jx}(x) + a u_j(x) v_j(x))\, dx,$$

где $a \in \mathbb{R}_+$, $u, v \in \mathfrak{U}$, зададим оператор, определенный на пространстве $\mathfrak{U}$. Поскольку

$$|\langle Au, v\rangle| \le C_1 \|u\|_{\mathfrak{U}} \|v\|_{\mathfrak{U}}$$

в силу неравенства Коши – Буняковского и

$$C_2 \|u\|_{\mathfrak{U}}^2 \le \langle Au, u\rangle \le C_3 \|u\|_{\mathfrak{U}}^2 \tag{7.4}$$

при всех $u, v \in \mathfrak{U}$ и некоторых $C_k \in \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, 3$, то линейный оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ непрерывен и инъективен. Кроме того, из первой оценки (7.4) вытекает сюръективность сопряженного оператора $A^* : \mathfrak{F}^* \to \mathfrak{U}^*$. В силу рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ и самосопряженности оператора A получаем, что оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ биективен. Отсюда по теореме Банаха следует существование оператора $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. Поскольку вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно, то оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ является компактным. Значит, спектр оператора A вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.

Теперь фиксируем $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ и построим операторы

$$L = (\lambda - a)\mathbb{I} + A,\ M = \alpha(a\mathbb{I} - A).$$

Из сказанного следует

Теорема 7.1. (см. напр. [44]). *Операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$*, причем спектр* $\sigma(L)$ *оператора* L *вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к* $-\infty$.

Из теоремы 7.1 вытекает, что оператор L–фредгольмов, причем $\ker L = \{0\}$, если $0 \notin \sigma(L)$.

Лемма 7.1. (см. напр. [44]). *Пусть параметры* $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$*, тогда оператор* $M(L,0)$*-ограничен.*

Пусть $\{\lambda_k\}$ – собственные значения оператора A, занумерованные по неубыванию с учетом их кратности; а $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $L_2(\mathbf{G})$ функции. По формулам (5.2) построим проекторы

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если } 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda_k = \lambda - a} \langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k, \text{ если } 0 \in \sigma(L); \end{cases} \quad Q = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если } 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda_k = \lambda - a} \langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k, \text{ если } 0 \in \sigma(L); \end{cases}$$

(заметим, что несмотря на "похожесть" проекторы определены на разных пространствах) и разрешающую группу

$$U^t = {\sum_{k=1}^{\infty}}' e^{\mu_k t}\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие членов ряда с номерами k такими, что $\lambda_k = \lambda - a$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$–скалярное произведение в $\mathbf{L_2(G)}$. L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \{\mu_k = \frac{\alpha(a - \lambda_k)}{\lambda - (a + \lambda_k)}, \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Выполнение условия (5.3) очевидно, выберем $\sigma_j^L(M)$, $j = \overline{0,n}$, так, чтобы выполнялось условие (5.4) (понятно, что это можно сделать не одним способом). Построим проекторы

$$P_j = \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k, \ j = \overline{0,n}. \tag{7.5}$$

Возьмем $-\infty \le a < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < b \le +\infty$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$, $f \in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ и рассмотрим задачу (6.2), (6.3), где $\mathfrak{U}$ – функциональное банахово пространство с краевым условием (7.1), операторы L и M из (6.2), а проекторы P_j, $j = \overline{0,n}$, из (6.3).

В силу леммы 7.1 и теоремы 6.1 вытекает

Теорема 7.2. *При любых* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$*, многоточечная начально-конечная задача (6.3), (7.1), (7.2) для уравнений (7.3) имеет единственное решение* $u \in C^\infty((a,b);\mathfrak{U})$*, которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} e^{\mu_k(t-\tau_j)}\langle u_j, \varphi_k\rangle\varphi_k.$$

Автор выражает свою искреннюю признательность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе, а так же М.А. Сагадеевой за плодотворные дискуссии.

Литература

1. Плотников, П.И. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля / П.И. Плотников, В.Н. Старовойтов // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 3. – С. 395–405.

2. Плотников, П.И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П.И. Плотников, А.В. Клепачева // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 651–669.

3. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Физматгиз, 1961.

4. Темам, Р. Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981.

5. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58–73.

6. Руткас, А.Г. Задача Коши для уравнения $A(x) + Bx(t) = f(t)$ / А.Г. Руткас // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 11. – С. 1996–2010.

7. Ting, T.W. Certain Non-Steady Flows of Second-Order Fluids / T.W. Ting // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1963. – V. 14, no. 1. – P. 28–57.

8. Chen, P.J. On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Z. Angew. Math. Phys. – 1968. – V. 19. – P. 614–627.

9. Hallaire, M. On a Theory of Moisture-Transfer / M. Hallaire // Inst. Rech. Agronom. – 1964. – No. 3. – P. 60–72.

10. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / Осколков А.П. // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.

11. Свиридюк, Г. А. Фазовое пространство задачи Коши – Дирихле для одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.В. Анкудинов // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1556–1561.

12. Poincaré, H. Sur l'equilibre d'une mass fluide animée d'un mouvement de rotation / H. Poincaré // Acta Math. – 1885. – V. 7. – P. 259–380.

13. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР, серия «Математика». – 1954. – Т. 18, вып. 1. – С. 3–50.

14. Demidenko, G.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest – Order Deriative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.-Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.

15. Панков, А.А. Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной / А.А. Панков, Т.Е. Панкова // Докл. Акад. наук Украины. – 1993. – № 9. – С. 18–20.

16. Pyatkov, S.G. Operator Theory. Nonclassical Problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.

17. Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

18. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка: моногр. / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

19. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа: моногр. / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

20. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа: моногр. / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

21. Келлер, А.В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 4 (241), вып. 7. – С. 40–46.
22. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.
23. Свиридюк, Г.А. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Г.А. Свиридюк, И.В. Бурлачко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2003. – Т. 43, № 11. – С. 1677–1683.
24. Shestakov, A.L. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – No. 17 (234), issue. 8. – P. 70–75.
25. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
26. Свиридюк, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 12. – С. 1646–1652.
27. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22–28.
28. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск, 2008. – № 15 (115), вып. 1. – С. 23–26.
29. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления с функционалом качества общего вида / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – Самара, 2011. – № 4 (25). – С. 18–24.
30. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 37 (254), вып. 10. – С. 22–29.
31. Сидоров, Н.А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н.А. Сидоров // Мат. заметки. – 1984. – Т. 35, № 4. – С. 569–578.
32. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия «Математика». – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.
33. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L, p)-радиальным оператором / С.А. Загребина // Мат. заметки ЯГУ. – Якутск, 2012. – Т. 19, вып. 2. – С. 39–48.
34. Загребина, С.А. Обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа с сильно (L, p)-радиальным оператором / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева // Вестн. МаГУ. Серия «Математика». – Магнитогорск, 2006. – Вып. 9. – С. 17–27.
35. Загребина, С.А. Задача Шоуолтера – Сидорова – Веригина для линейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина // Неклассические уравнения математической физики: тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа / отв. ред. А. И. Кожанов; Рос. Акад. наук, Сиб. отд., ин-т математики им. С. Л. Соболева. – Новосибирск, 2007. – С. 150–157.

36. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для линейной системы Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 4 (221), вып. 7. – С. 35–39.

37. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск, 2012. – № 5 (264), вып. 11. – С. 4–12.

38. Загребина, С.А. Об одной новой задаче для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной / С.А. Загребина, А.С. Конкина // Вестн. МаГУ. Серия «Математика». – Магнитогорск, 2012. – Вып. 14. – С. 67–77.

39. Федоров, В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В.Е. Федоров // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, вып. 3. – С. 173–200.

40. Федоров, В.Е. О некоторых соотношениях в теории вырожденных полугрупп операторов / В.Е. Федоров // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск, 2008. – № 15 (115), вып. 1. – С. 89–99.

41. Загребина, С.А. О существовании и устойчивости решений уравнений Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестн. МаГУ. Серия «Математика». – Магнитогорск, 2005. – Вып. 8. – С. 74–86.

42. Свиридюк, Г.А. Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 62–70.

43. Свиридюк, Г.А. Об относительно сильной p-секториальности линейных операторов / Г.А. Свиридюк, Г.А. Кузнецов // Докл. Акад. наук. – 1999. – Т. 365, № 6. – С. 736–738.

44. Свиридюк, Г.А. Уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Вестник МаГУ. Серия «Математика». – Магнитогорск, 2003. – Вып. 4. – С. 129–139.

Софья Александровна Загребина, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), zagrebina_sophiya@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 2, pp. 5–24.

MSC 35K70, 60H30

The Initial-Finite Problems for Nonclassical Models of Mathematical Physics

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, zagrebina_sophiya@mail.ru

The models of Mathematical Physics, whose representation in the form of equations or systems of partial differential equations do not fit one of the classical types such as elliptic, parabolic or hyperbolic, are called nonclassical. The article provides an overview of the author's results in the field of nonclassical models of Mathematical Physics for which the initial-finite problems, generalizing the Cauchy and Showalter, Sidorov conditions, are considered. Basic method for the research is the Sviridyuk relative spectrum theory. Abstract results are illustrated by the specific initial-finite problems for the equations and systems of equations in partial derivatives occurring in applications, namely, the theory of filtration, fluid dynamics and mesoscopic theory, considered on the sets of different geometrical structure.

Keywords: nonclassical models of Mathematical Physics, Plotnikov model, the Navier – Stokes system, the Barenblatt – Zheltov – Kochina equation, the (multipoint) initial-finite problems, the relative spectrum.

References

1. Plotnikov P.I., Starovoitov V.N. The Stefan Problem with Surface Tension as a Limit of the Phase Field Model. *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 3, pp. 395–405.
2. Plotnikov P.I., Klepacheva A.V. The Phase Field Equations and Gradient Flows of Marginal Functions. *Siberian Mathematical Journal*, 2001, vol. 42, no. 3, pp.551–567.
3. Ladyzhenskaya O.A. *Mathematical Problems in the Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid.* Moscow, Nauka, 1970. (in Russian)
4. Temam R. *Navier—Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis.* Amsterdam, N.-Y., Oxford, North Holland Publ. Co., 1979.
5. Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Kochina I. N. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Fluids in Fissurized Rocks. *J. Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303.
6. Rutkas A.G. The Cauchy Problem for the Equations $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$. *Differential Equations*, 1975, vol. 11, no. 11, pp. 1996–2010. (in Russian).
7. Ting T.W. Certain Non-Steady Flows of Second-Order Fluids. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1963, vol. 14, no. 1, pp. 28–57.
8. Chen P.J., Gurtin M.E. On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1968, vol. 19, pp. 614–627.
9. Hallaire M. On a Theory of Moisture-Transfer. *Inst. Rech. Agronom.*, 1964, no. 3, pp. 60–72.
10. Oskolkov A.P. Nonlocal Problems for Some Class Nonlinear Operator Equations Arising in the Theory Sobolev Type Equations. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI. Problems in the theory of representations of algebras and groups. Part 2*, Nauka, St. Petersburg, 1991, vol. 198, pp. 31–48. (in Russian).
11. Sviridyuk G.A., Ankudinov A.V. The Phase Space of the Cauchy – Dirichlet Problem for a Nonclassical Equation. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 11, pp. 1639–1644.
12. Poincaré H. Sur l'equilibre d'une mass fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Math.*, 1885, vol. 7, pp. 259–380.
13. Sobolev S.L. On a New Problem of Mathematical Physics. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1954, vol. 18, issue 1, pp. 3–50. (in Russian).
14. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest – Order Deriative.* New York, Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003.

15. Pankov A.A., Pankova T.E. Nonlinear Evolution Equations with Irreversible Operator Coefficient for the Derivative. *Dokl. Akad. Nauk Ukraine*, 1993, no. 9, pp. 18–20.(in Russian)
16. Pyatkov S.G. *Operator Theory. Nonclassical Problems.* Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2002.
17. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003.
18. Zamyshlyaeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of High Order.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. (in Russian)
19. Manakova N.A. *Optimal Control Problem for the Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. (in Russian)
20. Sagadeeva M.A. *Dichotomy of Solutions of Linear Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. (in Russian)
21. Keller A.V. The Algorithm for Solution of the Showalter – Sidorov Problem for Leontief Type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2011, no. 4 (241), issue 7, pp. 40–46. (in Russian)
22. Sviridyuk G.A., Brychev S.V. Numerical Solution of Systems of Equations of Leontief Type. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2003, vol. 47, no. 8, pp. 44–50.
23. Sviridyuk G.A., Burlachko I.V. An Algorithm for Solving the Cauchy Problem for Degenerate Linear Systems of Ordinary Differential Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 11, pp. 1613–1619.
24. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 70–75.
25. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 1, pp. 97–104.
26. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Verigin's Problem for Linear Equations of the Sobolev Type with Relatively p-Sectorial Operators. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 12, pp. 1745–1752.
27. Zagrebina S.A. On the Showalter – Sidorov Problem. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2007, vol. 51, no. 3, pp. 19–24.
28. Zagrebina S.A., Solovyeva N.P. The Initial-Finish Problem for the Evolution of Sobolev-Type Equations on a Graph. *Bulletin of the South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2008, no. 15 (115), issue 1, pp. 23–26. (in Russian)
29. Manakova N.A., Dylkov A.G. On One Optimal Control Problem with a Penalty Functional in General Form. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya ≪Fiziko-Matematicheskie Nauki≫*, 2011, no. 4 (25), pp. 18–24.(in Russian)
30. Zamyshlyaeva A.A. The Initial-Finish Value Problem for Nonhomogenious Boussinesque – Löve Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2011, no. 37 (254), issue 10, pp. 22–29. (in Russian)
31. Sidorov N.N. A Class of Degenerate Differential Equations with Convergence. *Mathematical Notes*, 1984, vol. 35, no. 4, pp. 300–305.
32. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter – Sidorov Problem as Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *News of Irkutsk State University. Series ≪Mathematics≫*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 51–72. (in Russian)

33. Zagrebina S.A. The Initial-Finish Problem for Sobolev Type Equations with Strongly (L,p)-Radial Operator. *Math. Notes of YSU*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 39–48. (in Russian)
34. Zagrebina S.A., Sagadeeva M.A. The Generalized Showalter – Sidorov Problem for the Sobolev type Equations with strongly (L,p)-radial operator. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo universiteta. Seria ≪Matematika≫* [Bulletin of Magnitogorsk State University. Series ≪Mathematics≫], 2006, issue 9, pp. 17–27. (in Russian)
35. Zagrebina S.A. The Showalter – Sidorov – Verigin Problem for the Linear Sobolev Type Equations. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki* [Nonclassical Mathematical Physics Equations], Novosibirsk, 2007, pp. 150–157. (in Russian)
36. Zagrebina S.A. The Initial-Finish Problem for the Navier – Stokes Linear System. *Bulletin of the South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2010, no. 4 (221), issue 7, pp. 35–39. (in Russian)
37. Zagrebina S.A. The Multipoint Initial-Finish Problem for Hoff Linear Model. *Bulletin of South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2012, no. 5 (264), issue 11, pp. 4–12. (in Russian)
38. Zagrebina S.A., Konkina A.S. On a New Problem for the Barenblatt – Zheltov – Kochina Equation. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo universiteta. Seria ≪Matematika≫* [Bulletin of Magnitogorsk State University. Series ≪Mathematics≫], 2012, issue 14, pp. 67–77. (in Russian)
39. Fedorov V.E. Degenerate Strongly Continuous Semigroups of Operators. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2001, vol. 12, issue 3, pp. 471–489.
40. Fedorov V.E About Some Relations in the Theory of Degenerate Operator Semigroups. *Bulletin of te South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2008, no. 15 (115), issue 7, pp. 89–99. (in Russian)
41. Zagrebina S.A. On the Existence and Stability of Solutions Navier – Stokes Equations. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo universiteta. Seria ≪Matematika≫* [Bulletin of Magnitogorsk State University. Series ≪Mathematics≫], 2005, issue 8, pp. 74–86. (in Russian)
42. Sviridyuk G.A. On a Model of the Dynamics of a Weakly Compressible Viscoelastic Fluid. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1994, vol. 38, no. 1, pp. 59–68.
43. Sviridyuk G.A., Kuznetsov G.A. Relatively Strongly p-Sectorial Linear Operators. *Doklady Mathematics*, 1999, vol. 59, issue 2, pp. 298–300.
44. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. The Barenblatt – Zheltov – Kochina Equations on a Graph. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo universiteta. Seria ≪Matematika≫* [Bulletin of Magnitogorsk State University. Series ≪Mathematics≫], 2003, issue 4, pp. 129–139. (in Russian)

Поступила в редакцию 12 марта 2013 г.