УДК 517.9

МОДЕЛЬ ТЕРМОКОНВЕКЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

О.П. Матвеева

Целью статьи является численное исследование решения начально-краевой задачи для модели термоконвекции ненулевого порядка. Рассматривается система, которая моделирует эволюцию скорости, градиента давления и температуры несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта ненулевого порядка. Используя метод Галеркина, разработан алгоритм численного решения начально-краевой задачи для системы, моделирующей плоскопараллельную термоконвекцию несжимаемой жидкости ненулевого порядка, и реализована программа для персональных компьютеров нахождения численного решения указанной задачи. Получена графическая иллюстрация численного решения системы при заданных параметрах. Проведенное исследование основано на результатах теории полулинейных уравнений соболевского типа, поскольку начально-краевая задача для соответствующей системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к абстрактной задаче Коши для уравнения соболевского типа.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, термоконвекция, несжимаемая вязкоупругая жидкость.

Система уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum\limits_{l=1}^{k}\beta_l\nabla^2 w_l - gq\theta - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla(\nabla\cdot v), \\ \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l,\ \alpha_l\in\mathbb{R}_-, \quad l=\overline{1,\ k}, \\ \theta_t = æ\nabla^2\theta - v\cdot\nabla\theta + v\cdot q \end{cases} \tag{1}$$

моделирует эволюцию скорости $v=(v_1,\ldots,v_n)$, $v_i=v_i(x,t)$, градиента давления $\nabla p = (p_1,\ldots,p_n)$, $p_i=p_i(x,t)$ и температуры $\theta=\theta(x,t)$ несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта порядка $k>0$, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3,4$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ [1]. Параметры $\lambda\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{R}_+$ и $æ\in\mathbb{R}_+$ характеризуют упругость, вязкость и теплопроводность жидкости соответственно; $g\in\mathbb{R}_+$ — ускорение свободного падения; вектор $q=(0,\ldots,0,1)$ — орт в $\mathbb{R}^n$. Параметры $\beta_l\in\mathbb{R}_+$, $l=\overline{1,\ k}$ определяют время ретардации (запаздывания) давления. Свободный член $f=(f_1,\ldots,f_n)$, $f_i = f_i(x)$ отвечает внешнему воздействию на жидкость. Начально-краевые задачи для моделей термоконвекции были изучены в [2-4].

В области $\Omega=[0,\pi]\times[0,\pi]$ рассмотрим систему (1) в виде ($k=1$)

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v - \beta\nabla^2 w - gq\theta - \nabla p, \\ 0 = \nabla\cdot v, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = v + \alpha w,\ \alpha\in\mathbb{R}_-, \\ \theta_t = æ\nabla^2\theta - v\cdot\nabla\theta + v\cdot q. \end{cases} \tag{2}$$

Введем функцию тока, определенную уравнениями $v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$, где $\psi = \psi(x, y, t)$. Тогда система (2) преобразуется к виду

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)\nabla^2\psi_t = \nu\nabla^4\psi - \dfrac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x,y)} - \beta\nabla^2(\dfrac{\partial w_1}{\partial y} - \dfrac{\partial w_2}{\partial x}) + g\theta_x, \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial t} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \alpha w_1 \ , \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha w_2 \ , \ \alpha \in \mathbb{R}_-, \\ \theta_t = æ\nabla^2\theta + \dfrac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,y)} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}. \end{cases} \tag{3}$$

Для системы (3) поставим задачу Коши – Бенара

$$\begin{cases} \psi(x,0,t) = \psi(x,\pi,t) = \nabla^2\psi(x,0,t) = \nabla^2\psi(x,\pi,t) = 0, \\ \psi(0,y,t) = \psi(\pi,y,t); \quad \nabla^2\psi(0,y,t) = \nabla^2\psi(\pi,y,t), \\ \theta(x,0,t) = \theta(x,\pi,t) = 0; \quad \theta(0,y,t) = \theta(\pi,y,t), \\ \theta(x,y,0) = \theta_0(x,y); \quad \psi(x,y,0) = \psi_0(x,y), \\ w_i(x,0,t) = w_i(x,\pi,t) = 0; \quad w_i(0,y,t) = w_i(\pi,y,t), \\ w_i(x,y,0) = w_{i0}(x,y); \quad i = 1, \quad 2. \end{cases} \tag{4}$$

Целью данной статьи является проведение вычислительного эксперимента по исследованию решения задачи (3), (4).

Вычислительный эксперимент

На основе теоретических результатов [5] для системы (3), моделирующей эволюцию скорости, градиента давления и температуры несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта, в системе компьютерной математики Maple разработана программа [6], которая позволяет:

1. По заданным коэффициентам $\alpha, \beta, \lambda, æ, \nu$ на основе метода Галеркина численно находить решение системы.

2. Получить графическое изображение решения системы.

Для реализации вычислительных алгоритмов программы использовались встроенные функции и стандартные операторы языка программирования Maple. Для получения графического изображения подключен пакет plots.

Найдем галеркинское приближение к задаче (4) для системы уравнений (3). С этой целью выберем в качестве базисных функций метода Галеркина собственные функции следующей задачи

$$\begin{cases} -\nabla^2\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(x,0) = \varphi(x,\pi) = 0, \quad \varphi(0,y) = \varphi(\pi,y). \end{cases}$$

Нетрудно получить $\alpha_{kl} = \frac{2}{\pi}\sin(2kx)\sin(ly)$, $\beta_{kl} = \frac{2}{\pi}\cos(2kx)\sin(ly)$, $\gamma_l = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(ly)$ – ортонормированное в смысле L_2 множество собственных функций. Галеркинское приближение к решению задачи (4) для системы (3) возьмем в виде $\psi = a(t)\alpha_{11}$, $\theta = b(t)\beta_{11} + c(t)\gamma_2$, $w_1 = d(t)\beta_{11} + f(t)\gamma_2$, $w_2 = g(t)\beta_{11} + h(t)\gamma_2$.

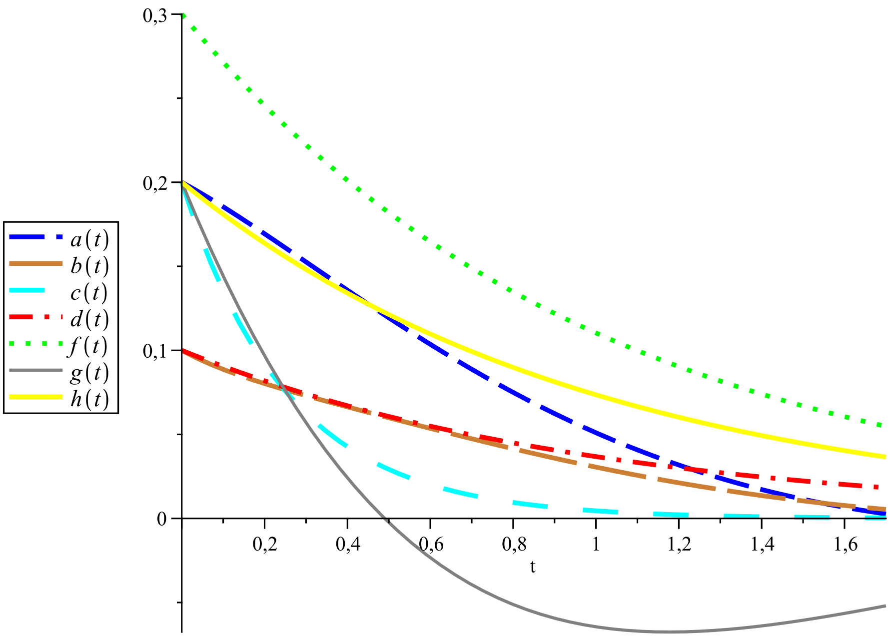
На следующем этапе, умножив скалярно уравнения системы (3) на функции α_{11}, β_{11}, γ_2, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Зададим начальные условия из окрестности точки нуль. Затем численно решим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.

Пример 1. Требуется найти численное решение задачи (3), (4) при заданных коэффициентах $\nu = 2$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\lambda = 1$, $æ = 1$, а также получить графическое изображение этого решения.

Умножим скалярно уравнения системы (3) на собственные функции $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_2$. Получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -5\dot{a}(t)(1+5\lambda) - 25\nu a(t) + 10\beta g(t) + 19.6b(t) = 0 \\ \dot{d}(t) - \alpha d(t) = 0, \quad \dot{g}(t) + 2a(t) - \alpha g(t) = 0 \\ \dot{b}(t) + 5æb(t) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}a(t)c(t) - 2a(t) = 0 \\ \dot{f}(t) - \alpha f(t) = 0, \quad \dot{h}(t) - \alpha h(t) = 0 \\ \dot{c}(t) + 4æc(t) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}a(t)b(t) = 0. \end{cases}$$

Зададим начальные условия из окрестности точки нуль. Пусть $a(0) = 0,2, b(0) = 0,1, c(0) = 0,2, d(0) = 0,1, f(0) = 0,3, g(0) = 0,2, h(0) = 0,2$. Решим задачу Коши для данной системы уравнений. Графическая иллюстрация решения системы представлена на рисунке. Результаты численного решения частично приведены в таблице.



Решение системы при $\alpha = -1, \beta = 2, \lambda = 1, \nu = 2, æ = 1$

Автор выражает признательность профессорам Т.Г. Сукачевой и Г.А. Свиридюку за внимание к данным исследованиям и обсуждение результатов.

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Тр. мат. ин-та АН СССР. – 1988. – № 179. – С. 126–164.

2. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 12. – С. 65–70.

Таблица

Численное решение системы с начальными условиями
$a(o) = 0,2, b(0) = 0,1, c(0) = 0,2, d(0) = 0,1, f(0) = 0,3, g(0) = 0,2, h(0) = 0,2$

t	$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$	$d(t)$
0,1	0,1854240039	0,0886898129	0,1354017426	0,0904837418
0,3	0,1525995343	0,0730387274	0,0624894731	0,0740818220
0,4	0,1357883884	0,0663610716	0,0426287976	0,0670320046
0,6	0,1035998576	0,0535727678	0,0200176562	0,0548811636
0,8	0,0749935012	0,0414719893	0,0095013049	0,0449328964
1,0	0,0509756644	0,0305398288	0,0045377105	0,0367879441
1,2	0,0317854606	0,0211874342	0,0021642916	0,0301194211
1,4	0,0171784838	0,0135878727	0,0010216194	0,0246596925
1,6	0,0066299269	0,0077117905	0,0004733233	0,0201189652

t	$f(t)$	$g(t)$	$h(t)$
0,1	0,2714512254	0,1442806994	0,1809674836
0,3	0,2222454661	0,0569715237	0,1481636441
0,4	0,2010960138	0,0241357331	0,1340640092
0,6	0,1646434907	-0,023355431	0,1097623271
0,8	0,1347986891	-0,051193908	0,0898657927
1,0	0,1103638322	-0,064457824	0,0735758881
1,2	0,0903582633	-0,067515694	0,0602388422
1,4	0,0739790888	-0,063933144	0,0493193925
1,6	0,0605689548	-0,056483131	0,0403793032

3. Свиридюк, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Вестн. МаГУ . – 2005. – № 8. – С. 5–33.

4. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук /Т.Г. Сукачева; Новгород. гос. ун-т. – Великий Новгород, 2004. – 249 с.

5. Сукачева, Т.Г. Задача термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка /Т.Г. Сукачева, О.П. Матвеева // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11 (474). – С. 46–53.

6. Численное решение начально-краевой задачи для модели термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка / Матвеева О.П. (RU); правообладатель: Матвеева О.П. (RU). – №2012612862, зарегистр. 22.03.2012, Реестр программ для ЭВМ.

Ольга Павловна Матвеева, кафедра алгебры и геометрии, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, (г. Великий Новгород, Российская Федерация), oltan.72@mail.ru

**Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 1, pp. 134–138.**

MSC 35R20, 35G25, 35Q35, 35Q72, 76A05

Model of Thermoconvection of Incompressible Viscoelastic Fluid of Nonzero Order. Computational Experiment

O.P. Matveeva, Novgorod State University, Velikiy Novgorod, Russian Federation, oltan.72@mail.ru

The purpose of this paper is the numerical investigation of the solution of the initial-boundary value problem for the model of thermal convection of the nonzero order. We consider the system that models the evolution of the velocity, gradient of the pressure and temperature of the incompressible viscoelastic Kelvin–Voigt fluid of nonzero order. Using the Galerkin method, the algorithm of the numerical solution of the initial-boundary value problem for the system modeling plane-parallel thermal convection of the incompressible fluid of the nonzero order is created, and the program for personal computers to find numerical solutions of this problem is implemented. A graphical illustration of the numerical solution with the given parameters is obtained. The study was based on the results of the theory of semi-linear Sobolev type equations, because the initial boundary value problem for the corresponding system of differential equations in partial derivatives is reduced to the abstract Cauchy problem for the Sobolev type equation.

Keywords: sobolev type equation, thermal convection, incompressible viscoelastic fluid.

References

1. Oskolkov A.P. Initial-Boundary Value Problems for Equations of Motion Kelvin–Voight and Oldroyd Fluids [Nachal'no-kraevye zadachi dlya uravneniy dvizheniya zhidkostey Kel'vina–Foygta i zhidkostey Oldroyta]. *Trudy Mat. In-ta AN SSSR*, 1988, no. 179, pp. 126–164.
2. Sviridyuk G.A. Solubility of the Thermal Convection of Viscoelastic Incompressible Fluid [Razreshimost' zadachi termokonvektsii vyazkouprugoy neszhimaemoy zhidkosti]. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1990, no. 12, pp. 65–70.
3. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Some Mathematical Problems of the Dynamics of Viscoelastic Incompressible Media [Nekotorye matematicheskie zadachi dinamiki vjazkouprugih neszhimaemyh sred]. *Vestnik MaGU*, 2005, no. 8, pp. 5–33.
4. Sukacheva T.G. *Issledovanie matematicheskikh modeley neszhimaemykh vyazkouprugikh zhidkostey: dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk* [The Study of Mathematical Models of Incompressible Viscoelastic Fluids: dis. Dr. Science]. Velikiy Novgorod, 2004. 249 p.
5. Sukacheva T.G., Matveeva O.P. The Problem of Thermal Convection of an Incompressible Viscoelastic Kelvin–Voigt Fluid of Nonzero Order [Zadacha termokonvekcii neszhimaemoj vjazkouprugoj zhidkosti Kel'vina-Fojgta nenulevogo porjadka]. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2001, no. 11, pp. 46–53.

Поступила в редакцию 31 августа 2012 г.