УДК 517.518

О МОДЕЛИРОВАНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Нгуен Хак Диеп, В.Ф. Чистяков

Рассматриваются эволюционные системы дифференциальных уравнений в частных производных, зависящие от одной пространственной переменной. Предполагается, что матрицы перед производными искомой вектор-функции вырожденные во всей области определения. Такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) в частных производных. Свойства ДАУ существенно отличаются от свойств невырожденных систем. В частности, невозможно судить о типе систем по виду корней характеристических уравнений. В работе вводится понятие расщепляемых систем. Под такими уравнениями понимаются системы, допускающие существование невырожденных преобразований, расщепляющих исходный объект на подсистемы с единственным решением, функциональным произволом от одной из переменных и собственно невырожденную подсистему уравнений в частных производных. Этот прием позволяет исследовать структуру общих решений ДАУ и в ряде случаев установить разрешимость начально краевых задач.

Ключевые слова: частные производные, дифференциально-алгебраические уравнения, гиперболические, вырожденные системы, индекс, каноническая форма, моделирование.

Введение

Рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$\Lambda(D_t, D_x)u := AD_tu + BD_xu + Cu = f(u, x, t),\ (x,t) \in \mathbf{R}^2, \tag{1}$$

где $A \equiv A(u,x,t),\ B \equiv B(u,x,t),\ C \equiv C(u,x,t) - (n \times n)$-матрицы, $(x,t) \in \mathbf{U} = X \times T,\ \mathbf{U} \subset \mathbf{V}$, $X = [x_0, x_1],\ T = [t_0, t_1]$, $\mathbf{V}-$открытая область в $\mathbf{R}^2$, $f(u,x,t),\ u \equiv u(x,t)$ соответственно заданная и искомая n-мерные вектор-функции [1], $D_t = \partial/\partial t,\ D_x = \partial/\partial x$.

Предполагается, что входные данные обладают достаточной гладкостью в $\mathbf{V}$ (по крайней мере дифференцируемы), и допускаются следующие виды вырождения:

$$\det A = 0,\ \det B = 0,\ \det(\lambda A + B) = 0\ \forall (x,t) \in \mathbf{U},\ \forall u \in \mathbf{R}^n,\ \forall \lambda, \tag{2}$$

где λ – скалярный (в общем случае комплексный) параметр.

Под решением системы (1) ниже понимается любая вектор-функция $u_* \equiv u_*(x,t) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$ [2] : $\Lambda(D_t, D_x)u_* \equiv f(u_*, x, t),\ (x,t) \in \mathbf{U}$.

В работе также рассматриваются постановки начально-краевых задач для системы (1) с условиями вида

$$u(x_0, t) = \psi(t),\ u(x, t_0) = \phi(x),\ (x,t) \in \mathbf{U}, \tag{3}$$

[1]Для упрощения записи указание зависимости от x и t может отсутствовать, если это не вызывает путаницы.

[2]Здесь и ниже $\mathbf{C}^l(\mathbf{U})$ – пространства функций (векторно или матрично-значных, смотря по контексту) l раз непрерывно дифференцируемых в $\mathbf{U}$ по x и по t. В работе принято соглашение: $\mathbf{C}^0(\mathbf{U}) = \mathbf{C}(\mathbf{U})$.

где заданные вектор-функции $\psi(t),\ \phi(x)$ обладают достаточной гладкостью.

Системы вида (1), удовлетворяющие условиям (2), называют вырожденными, системами не типа Коши–Ковалевской. В зарубежной математической литературе используется термин: «дифференциально-алгебраические уравнения в частных производных» [1]. Частным случаем систем вида (1) являются системы взаимосвязанных уравнений в частных производных, обыкновенных дифференциальных и алгебраических (конечных) уравнений. Во второй половине XX века, начиная с работ Л.С. Соболева [2], эта тематика занимает важное место в теории дифференциальных уравнений, поэтому такие системы часто называют уравнениями соболевского типа [3]. Вырожденные системы уравнений в частных уравнений встречаются в различных областях приложений: гидродинамике (уравнения Навье–Стокса), теплотехнике, электротехнике и т.д. (см., например, [2–6]).

Популярный подход к изучению систем (1) базируется на сведении их к уравнениям в банаховых или топологических пространствах вида

$$\mathbf{A}\dot{\chi} + \mathbf{B}\chi = \mathbf{f}(t),\ t \in T = [t_0, t_1], \tag{4}$$

где $\mathbf{A},\ \mathbf{B}$−некоторые операторы, отображающие банахово пространство $\mathcal{B}_1$ в банахово пространство $\mathcal{B}_2$, $\dot{} \equiv d/dt$, $\ker\ \mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{f}(t)$, $\chi \equiv \chi(t)-$ соответственно заданная и искомая вектор-функции со значениями в $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$. Здесь следует отметить работы [3, 7, 8]. Посылки, в рамках которых исследуются системы (4), весьма различны, но в конечном случае приводят к выводу, что все решения системы (1) описывается формулой

$$\chi(t, \chi_0) = \mathbf{V}(t)\chi_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{K}(t,s)\mathbf{f}(s)ds + \sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{C}_j (d/dt)^j \mathbf{f}(t),$$

где $\mathbf{V}(t)$ – некоторая однопараметрическая полугруппа и $\mathbf{C}_j,\ \mathbf{K}(t,s)-$операторы, определенные на соответствующих пространствах, χ_0 произвольный элемент из $\mathcal{B}_1$. В конечномерном случае основной посылкой является требование регулярности пучка матриц, задающих систему: $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$, а число l принято называть индексом системы. В ряде работ получены важные результаты, основанные на примении функционального анализа и интегральных преобразований, в частности, преобразований Фурье [4, 9].

В последнее десятилетие стал популярным и получил развитие подход, основанный на применении методов, разработанных в теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при старших производных искомой вектор-функции, называемых дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) [10–13].

1. Расщепляемые дифференциально-алгебраические уравнения в частных производных

Ниже нам потребуются следующие понятия и утверждения. Рассмотрим систему

$$\Lambda_1 x := \mathrm{A}(x,t)D_t u + \mathrm{B}(x,t)u = f(x,t),\ (x,t) \in \mathbf{U}, \tag{5}$$

где $\mathrm{A}(x,t),\ \mathrm{B}(x,t)$ − $(n \times n)$-матрицы, переменная x понимается как параметр.

Определение 1. *Оператор* $\Lambda_k := \sum\limits_{j=0}^{k} L_j(x,t)D_t^j$ *со свойством*

$$\Lambda_k \circ [\mathrm{A}(x,t)D_t + \mathrm{B}(x,t)]\, u = D_t u + \Lambda_k[\mathrm{B}(x,t)]u\ \forall u \in \mathbf{C}^{k+1}(\mathbf{U}),$$

где $L_j(x,t)$ – $(n\times n)$-матрицы из $\mathbf{C}(\mathbf{U})$, называется левым регуляризирующим оператором (ЛРО) для системы (5). Минимально возможное число k называется индексом системы (5).

Лемма 1. *Если для системы (5) определен индекс k, то справедлива альтернатива:* $\det\ \mathrm{A}(x,t)\neq 0\ \forall (x,t)\in\mathbf{U}$ *при* $k=0$ *и* $\det\ \mathrm{A}(x,t)\equiv 0,\ (x,t)\in\mathbf{U}$ *при* $k>0$.

Доказательство. Действительно, если $k=0$, то $L_0\mathrm{A}=E_n\ \forall (x,t)\in\mathbf{U}$, где E_n – единичная матрица размерности n. Если же $k>0$, то из определения индекса следует, что $L_k\mathrm{A}=0\ \forall (x,t)\in\mathbf{U}$. Для непрерывных матриц L_k и A это возможно тогда и только тогда, когда $\det\ L_k=\det\ \mathrm{A}=0\ \forall (x,t)\in\mathbf{U}$. $\square$

Теорема 1. *Пусть: 1) в системе (5)* $\mathrm{A}(x,t),\ \mathrm{B}(x,t)\in\mathbf{C}^{2n+1}(\mathbf{U}),\ f\in\mathbf{C}^k(\mathbf{U})$; *2) для системы (5) существует ЛРО.*

Тогда система разрешима при любой $f(x,t)$, и ее общее решение можно записать в виде соотношения

$$u=V(x,t)c(x)+Wf(x,t),\ Wf(x,t)=\int\limits_{t_0}^{t}K(x,t,s)f(x,s)ds+\sum_{j=0}^{k-1}C_j(x,t)D_t^jf, \tag{6}$$

где $V(x,t)-(n\times d(x))$-матрица, $K(x,t,s),\ C_j(x,t)-(n\times n)$ – матрицы, $j=\overline{0,k-1}$, гладкие по t, $\operatorname{rank} V(x,t)=d(x)\ \forall t\in T$, $c(x)$ – произвольная вектор-функция.

Теорема является следствием утверждения, доказанного в [14] для случая, когда $\mathrm{A}(x,t)=\mathrm{A}(t),\mathrm{B}(x,t)=\mathrm{B}(t),f(x,t)=f(t)$.

Введем класс $(n\times n)$ – матриц $Z(x,t,D_t,D_x)\in\mathcal{Z}$, элементы которых являются дифференциальными операторами вида $\sum\limits_{\nu+\rho\le m_{ij}} z_{ij}(x,t)D_t^\nu D_x^\rho,\ i,j=\overline{1,n}$. Будем предполагать, что для каждой матрицы из $\mathcal{Z}$ существует единственная операторная матрица $\tilde{Z}(x,t,D_t,D_x)\in\mathcal{Z}$, связанная с исходной матрицей соотношениями

$$Z(x,t,D_t,D_x)\zeta(x,t)=\xi(x,t),\ \tilde{Z}(x,t,D_t,D_x)\xi(x,t)=\zeta(x,t)\ \forall\zeta(x,t)\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{U}).$$

Если коэффициенты операторов w_{ij} постоянны, то класс $\mathcal{Z}$ образуют унимодулярные матрицы $Z(D_t,D_x)$, определяющим свойством которых является условие $\det Z(D_t,D_x)=w_0=\mathrm{const}$. Здесь $\tilde{Z}(D_t,D_x)=Z^{-1}(D_t,D_x)$.

Опишем класс систем, называемых авторами *расщепляемыми*. Пусть система (1) является линейной: $A(u,x,t)\equiv A(x,t),\ B(u,x,t)\equiv B(x,t),\ C(u,x,t)\equiv C(x,t),\ f(u,x,t)\equiv f(x,t)$. Предположим, что существуют матрицы $P(x,t,D_t,D_x),Q(x,t,D_t,D_x)\in\mathcal{Z}$ со свойством

$$P(AD_t[Qz]+BD_t[Qz]+CQz)=$$

$$=\begin{pmatrix}\Lambda_{11}(D_t,D_x) & \Lambda_{12}(D_t,D_x) & \Lambda_{13}(D_t,D_x) & \Lambda_{14}(D_t,D_x)\\ 0 & \Lambda_{22}(D_t,D_x) & \Lambda_{23}(D_t,D_x) & \Lambda_{24}(D_t,D_x)\\ 0 & 0 & \Lambda_{33}(D_t,D_x) & \Lambda_{34}(D_t,D_x)\\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{44}(D_t,D_x)\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $u=Qz,\ P\equiv P(x,t,D_t,D_x),Q\equiv Q(x,t,D_t,D_x),\ \begin{pmatrix}f_1^\top & f_2^\top & f_3^\top & f_4^\top\end{pmatrix}^\top=Pf(x,t)$, $\Lambda_{ij}(D_t,D_x)\equiv\Lambda_{ij}(x,t,D_t,D_x)=A_{ij}D_t+B_{ij}D_x+C_{ij},\ i,j=\overline{1,4},\ A_{ij}\equiv A_{ij}(x,t),\ B_{ij}\equiv B_{ij}(x,t),\ C_{ij}\equiv C_{ij}(x,t)$, причем диагональные блоки квадратные, размерности n_1,n_2,n_3,n_4 соответственно, $n_1+n_2+n_3+n_4=n$.

Допустим, что для системы (7) выполнены условия:

$$\Lambda_{44}(D_t, D_x) \in \mathcal{Z}; \tag{8}$$

– для операторов

$$\bar{\Lambda}_{33} := A_{33}D_t + C_{33},\ \bar{\Lambda}_{22} := B_{22}D_x + C_{22}, \tag{9}$$

определены ЛРО в смысле определения 1 соответственно по D_t и D_x;
– существует гладкая в области $\mathbf{U}$ неособенная матрица $R \equiv R(x,t)$ со свойством

$$R(A_{11}^{-1}B_{11})R^{-1} = \mathrm{diag}\{\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t), \cdots, \lambda_{n_{11}}(x,t)\},\ \lambda_j(x,t) \in \mathbf{R}, \tag{10}$$

Согласно (8) имеем $z_4 = \tilde{\Lambda}_{44}(D_t, D_x)f_4$. Далее, рассмотрим подсистему

$$\Lambda_{33}(D_t, D_x)z_3 = \tilde{f}_3, \tag{11}$$

где $\tilde{f}_3 = f_3 - \Lambda_{34}(D_t, D_x)z_4$. Преобразуем систему (11) к виду

$$(A_{33}D_t + C_{33})z_3 = \varphi_3 = \tilde{f}_3 - B_{33}D_x z_3, \tag{12}$$

и в силу существования ЛРО для операторов (9) решение системы (11) согласно (6) удовлетворяет соотношению

$$z_3 = V(x,t)c_3(x) + W_3\varphi_3, W_3\varphi_3 = \int\limits_{t_0}^{t} K_3(x,t,s)\varphi_3(t,s)ds + \sum_{j=o}^{k_3-1} C_{3,j}D_t^j\varphi_3(x,t), \tag{13}$$

где $V(x,t) - (n_3 \times d_3)$-матрица, $c_3(x)$ – произвольная вектор-функция, $K_3(x,t,s), C_{3,j}-$ некоторые $(n_3 \times n_3)$-матрицы из теоремы 1. Используя (13), выпишем итерационный процесс

$$z_{3,j+1} = \Omega_3 z_{3,j} + \Psi_3, z_{3,0} = \Psi_3, \Omega_3 z_3 = -W_3B_{33}D_x z_3, \Psi_3 = \tilde{f}_3 + V(x,t)c_3(x), \tag{14}$$

и будем предполагать, что оператор Ω_3 нильпотентный: начиная с некоторого $\nu_3 \le n_3$ выполняется соотношение $\Omega_3^{\nu_3} = 0$.

$$z_3 = V(x,t)c_3(x) + \Omega_3[V(x,t)c_3(x)] + ... + \Omega_3^{\nu_3-1}[V(x,t)c_3(x)] + \tilde{f}_3 + \Omega_3\tilde{f}_3 + ... + \Omega_3^{\nu_3-1}\tilde{f}_3. \tag{15}$$

Для подсистемы

$$\Lambda_{22}(D_t, D_x)z_2 = \tilde{f}_2, \tag{16}$$

где $\tilde{f}_2 = f_2 - \Lambda_{23}(D_t, D_x)z_3 - \Lambda_{24}(D_t, D_x)z_4$, можно провести аналогичные рассуждения. А именно, запишем (15) в виде

$$(B_{22}D_x + C_{22})z_2 = \varphi_2 = \tilde{f}_2 - A_{22}D_t z_2,$$

и построим соответствующий оператор Ω_2. Затем организуем итерационный процесс, который оборвется на конечном шаге.

Общее решение будет иметь вид суммы

$$z_2 = \bar{V}(x,t)c_2(t) + \Omega_2[\bar{V}(x,t)c_2(t)] + ... + \Omega_2^{\nu_2-1}[\bar{V}(x,t)c_2(t)] + \tilde{f}_2 + \Omega_2\tilde{f}_2 + ... + \Omega_2^{\nu_2-1}\tilde{f}_2, \tag{17}$$

где $\nu_2 \le n_2$. Подсистема

$$\Lambda_{11}(D_t, D_x)z_1 = \tilde{f}_1, \tag{18}$$

где $\tilde{f}_1 = f_1 - \Lambda_{12}(D_t, D_x)z_2 - \Lambda_{13}(D_t, D_x)z_3 - \Lambda_{14}(D_t, D_x)\Lambda_{44}^{-1}(D_t, D_x)f_4$, по условию (10) является гиперболической и имеет в области $\mathbf{U}$ семейство решений [15].

Итак, при сделанных нами предположениях в области $\mathbf{U}$ *определено семейство решений системы (1), зависящее от* n_{11} *произвольных функций от* (x,t), *от* n_{22} *произвольных функций от* t *и от* n_{33} *произвольных функций от* x.

В частности, условие (8) выполнено, и операторы $\Omega_2,\ \Omega_3$ нильпотентны, если подматрицы матрицы (7) имеют вид

$$\Lambda_{44}(D_t,D_x)=N_1D_t+N_2D_x+N_3,$$

$$\Lambda_{33}(D_t,D_x)=N_4D_t+N_5D_x+N_6,\ \Lambda_{22}(D_t,D_x)=N_7D_t+N_8D_x+N_9, \tag{19}$$

где $N_j,\ j=1,2,...,9-$верхнетреугольные матрицы, причем N_1,N_2,N_5,N_7 имеют нулевую диагональ, $\det N_3\neq 0,\ \det N_4\neq 0,\ \det N_6\neq 0,\ \det N_8\neq 0,\ \det N_9\neq 0\ \forall(x,t)\in\mathbf{U}$.

В упрощенном варианте (19) хорошо видно, что оператор

$$\Omega_3z_3=-\int\limits_{t_0}^{t}\Theta(x,t)\Theta^{-1}(x,s)\tilde{N}_5D_xz_3(x,s)ds,\ \tilde{N}_5=N_4^{-1}N_5 \tag{20}$$

является нильпотентным. Здесь $\Theta(x,t)-$матрицант системы $D_tv=-[N_4^{-1}N_6]v$, который является верхнетреугольной матрицей. Матрица $\Theta(x,t)\Theta^{-1}(x,s)\tilde{N}_5$ верхнетреугольная с нулевой диагональю, так как произведение верхнетреугольных матриц, одна из которых имеет нулевую диагональ, является верхнетреугольной матрицей с нулевой диагональю. Произведение верхнетреугольных матриц, начиная с некоторого их количества (не превышающего их размерности) является нулевой матрицей.

Аналогичная ситуация имеет место для оператора Ω_3. Справедливо также соотношение

$$z_4=f_4+\Omega_4f_4+...+\Omega_4^{\nu_4-1}f_4,\ \nu_4\leq n_4,\ \Omega_4=-N_3^{-1}[N_1D_t+N_2D_x].$$

2. Системы с постоянными матрицами коэффициентов

Пусть в системе (1) матрицы $A,\ B,\ C$ – постоянные.

Определение 2. *Выражение* $\lambda\bar{A}+\mu\bar{B}+\bar{C}$, *где* $\lambda,\ \mu$ *- скалярные параметры (в общем случае комплексные),* $\bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C}$ *– квадратные матрицы, будем называть пучком матриц. Пучок матриц регулярен, если существуют комплексные числа* λ_0,μ_0 *со свойством:* $\det(\lambda_0\bar{A}+\mu_0\bar{B}+\bar{C})\neq 0$.

Ниже нам потребуются такие утверждения.

Лемма 2. *[16] Если в системе (5) матрицы не зависят от* t: $\mathrm{A}(x,t)\equiv\mathrm{A}(x),\ \mathrm{B}(x,t)\equiv\mathrm{B}(x)$, *то для существования ЛРО при фиксированном* $x\in X$ *необходимо и достаточно выполнения соотношения* $\det[\lambda_0\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x)]\neq 0\ \forall x\in X$ *для некоторого* λ_0.

Более того, в формуле (6) $d(x)=\deg\ \det[\lambda\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x)]$, *где* $\deg-$*символ степени многочлена,*

$$k(x)=\min\{j:\ \mathrm{rank}C^j(x)=\mathrm{rank}C^{j+1}(x),\ j=1,2,\cdots,n\},\ C(x)=[\lambda_0\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x)]^{-1}\mathrm{A}(x).$$

Лемма 3. *Пусть пучок матриц* $\lambda A+\mu B+C$, *задающий систему (1), регулярен и* $f(x,t)=e^{\lambda_0t+\mu_0x}\Psi(x,t)$, *где* $\Psi(x,t)$*является произвольным векторным многочленом от* x,t. *Тогда система (1) имеет в области* $\mathbf{U}$ *решение в виде* $u(x,t)=e^{\lambda_0t+\mu_0x}\Psi_1(x,t)$ *где* $\Psi_1(x,t)$, *векторный многочлен той же степени.*

Доказательство. Предположим, что матрица C обратима и

$$f(x,t)=a_{0,0}+\sum_{j=0}^{1}a_{1,j}t^jx^{1-j}+...+\sum_{j=0}^{m}a_{m,j}t^jx^{m-j},\ a_{i,j}\in\mathbf{R}^n,\ i=0,1,\cdots,m.$$

Здесь $\lambda_0=0,\mu_0=0$. Будем искать решение уравнения (1) также в виде многочлена с неопределенными коэффициентами $u(x,t)=c_{0,0}+\sum\limits_{j=0}^{1}c_{1,j}t^jx^{1-j}+...+\sum\limits_{j=0}^{m}c_{m,j}t^jx^{m-j}$. Подставляя выражения для $f(x,t)$ и $u(x,t)$в уравнение (1), и сравнивая члены с одинаковыми степенями, получим равенство $C\sum\limits_{j=0}^{m}c_{m,j}t^jx^{m-j}=\sum\limits_{j=0}^{m}a_{m,j}t^jx^{m-j},c_{m,j}=C^{-1}a_{m,j}$. Далее, в выражении для $f(x,t)$ пересчитываем коэффициенты

$$\sum_{j=0}^{m-1}\tilde{a}_{m-1,j}t^jx^{m-1-j}=\sum_{j=0}^{m-1}a_{m-1,j}t^jx^{m-1-j}-(AD_t+BD_x)[\sum_{j=0}^{m}C^{-1}a_{m,j}t^jx^{m-j}]$$

и вычисляем $c_{m-1,j}=C^{-1}\tilde{a}_{m-1,j},\ j=\overline{0,m-1}$. Действуя аналогично, мы вычислим все коэффициенты $c_{m-\nu,j},\ j=\overline{0,m-\nu},\ \nu=\overline{2,m}$.

Если $\det C=0$, то произведем замену $u(x,t)=e^{\lambda_0t+\mu_0x}z(x,t)$. Получим

$$e^{\lambda_0t+\mu_0x}AD_tz+e^{\lambda_0t+\mu_0x}BD_xz+e^{\lambda_0t+\mu_0x}[\lambda_0A+\mu_0B+C]z=f(x,t)e^{\lambda_0t+\mu_0x}. \tag{21}$$

Сокращая на множитель $e^{\lambda_0t+\mu_0x}$ в равенстве (21), мы получаем случай с неособенной матрицей C. □

Вычислим определитель операторной матрицы $\det\Lambda(D_t,D_x)=\det(AD_t+BD_x+C)$ и матрицу ее алгебраических дополнений: $M(D_t,D_x)=\|q_{ij}(D_x,D_t)\|_{i,j=1}^n$, где $q_{ij}(D_x,D_t)$ – некоторые многочлены от операторов D_x,D_t. Предположим, что в системе (1) $f(x,t)=e^{\lambda_0t+\mu_0x}\Psi(x,t)$. Тогда система разрешима, и справедливо равенство

$$M(D_t,D_x)(AD_t+BD_x+C)u=\det\Lambda(D_t,D_x)E_nu=M(D_t,D_x)f. \tag{22}$$

Система (22) является набором n скалярных уравнений $\det\Lambda(D_t,D_x)u_i=\sum\limits_{j=1}^{n}q_{ij}(D_x,D_t)f_i$, $i=1,2,...,n$, где $(u_1,u_2,...,u_n)^\top=u,\ (f_1,f_2,...,f_n)^\top=f$, $\top$ – символ транспонирования.

Разберем случаи:

а) пусть $\det\Lambda(D_t,D_x)=\tilde{a}_0=const\neq0$. Тогда решение системы (22) единственно:

$$u_i=\frac{1}{\tilde{a}_0}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}(D_x,D_t)f_i,\ i=1,2,...,n;$$

б) пусть $\det\Lambda(D_t,D_x)=a_lD_t^l+a_{l-1}D_t^{l-1}+...+a_0,\ 1\leq l\leq n$. Тогда решение системы (22) запишется в виде:

$$u_i=c_{1,i}(x)q_1(t)+c_{2,i}(x)q_2(t)+...+c_{l,i}(x)q_l(t)+\int\limits_{t_0}^{t}K(t,s)\left[\sum_{j=1}^{n}q_{ij}(D_x,D_t)f_i\right](x,s)ds, \tag{23}$$

где $c_{1,i}(x),c_{2,i}(x),...,c_{l,i}(x)$ – произвольные гладкие в области определения функции $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_l(t)$ – некоторые квазиполиномы с показателями экспонент, равными корням полинома $a_l\lambda^l+a_{l-1}\lambda^{l-1}+...+a_0,\ K(t,s)$ -ядро интегрального оператора Вольтерра с нулевыми на диагонали $t=s$ производными по t, включительно до порядка $l-1$ [18];

в) пусть $\det\Lambda(D_t,D_x)=b_kD_x^k+b_{k-1}D_x^{k-1}+...+b_0, 1\le k\le n$. Тогда решение системы запишется в виде:

$$u_i=c_{1,i}(t)q_1(x)+c_{2,i}(t)q_2(x)+...+c_{k,i}(t)q_k(x)+\int\limits_{x_0}^{x}\tilde K(x,s)\left[\sum_{j=1}^{n}q_{ij}(D_x,D_t)f_i\right](s,t)ds, \quad (24)$$

где $c_{1,i}(t),c_{2,i}(t),...,c_{k,i}(t)$ – произвольные гладкие в области определения функции $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_k(x)$ – некоторые квазиполиномы с показателями экспонент, равными корням полинома $b_k\lambda^k+b_{k-1}\lambda^{k-1}+...+b_0, \tilde K(t,s)$ – ядро интегрального оператора Вольтерра с нулевыми на диагонали $x=s$ производными по x, включительно до порядка $k-1$;

г) пусть $\det\Lambda(D_t,D_x)=\sigma_0+\sum\limits_{j=0}^{1}\sigma_{1,j}D_x^jD_t^{1-j}+...+\sum\limits_{j=0}^{n}\sigma_{n,j}D_x^jD_t^{n-j}, \sigma_{n,0}\ne0, \sigma_{n,n}\ne0$ и корни многочлена $\det(\lambda A+B)$ вещественны и различны. Тогда система является гиперболической [15]. Действительно, в нашем случае $\det A=\sigma_{0,n}, \det B=\sigma_{n,n}$ и все корни многочлена отличны от нуля.

К сожалению, множества решений систем (1) с постоянными матрицами коэффициентов и (22) не совпадают.

Пример 1. Пусть задана система $\mathrm{diag}\{1,0\}D_tu+u=0$. Множество решений системы (1) имеет вид $u=(c(x)e^{-t}\ 0)^\top$, а множество решений системы (22) описывается формулой $u=(c(x)e^{-t}\ c_1(x)e^{-t})^\top$, где $c(x),\ c_1(x)$ – произвольные гладкие функции.

Ввиду этого обстоятельства для полного описания множества решений системы (1) с постоянными матрицами коэффициентов нам потребуется наложить дополнительные условия на входные данные. Для этого нам потребуется такое понятие.

Предположим, что пучок матриц $\lambda A+\mu B+C$ регулярен, и существуют унимодулярные матрицы $P(D_t,D_x),Q(D_t,D_x)$, приводящие систему (1) с постоянными матрицами коэффициентов к виду (7), где

$$\det\Lambda_{44}(D_t,D_x)=\tilde a_0=\mathrm{const}, \quad (25)$$

$$\det\Lambda_{33}(D_t,D_x)=a_lD_t^l+a_{l-1}D_t^{l-1}+...+a_0, 1\le l\le n_3, \quad (26)$$

$$\det\Lambda_{22}(D_t,D_x)=b_kD_x^k+b_{k-1}D_x^{k-1}+...+b_0, 1\le k\le n_2, \quad (27)$$

$$\det\Lambda_{11}(D_t,D_x)=\sigma_0+\sum_{j=0}^{1}\sigma_{1,j}D_x^jD_t^{1-j}+...+\sum_{j=0}^{n_1}\sigma_{n_1,j}D_x^jD_t^{n_1-j}, \sigma_{n_1,0}\ne0, \sigma_{n_1,n_1}\ne0, \quad (28)$$

и корни многочлена $\det(\lambda A_{11}+B_{11})$ вещественны и различны.

При наших предположениях пучки матриц $\lambda A_{ii}+\mu B_{ii}+C_{ii}, i=1,2,3,4,$ регулярны. Поэтому без ограничения общности можно считать матрицы C_{ii} неособенными (см. доказательство леммы 3).

Решение подсистемы $\Lambda_{44}(D_t,D_x)z_4=f_4$ системы (7) при выполнении условия (25) единственно и имеет вид

$$z_4=\Lambda_{44}^{-1}(D_t,D_x)f_4=f_4+\Omega_4f_4+...+\Omega_4^{\nu_4-1}f_4,\ \nu_4\le n_4, \quad (29)$$

где $\Omega_4=C_{44}^{-1}[A_{44}D_t+B_{44}D_x]$.

Рассмотрим подсистему $\Lambda_{33}(D_t,D_x)z_3=f_3$ из (7). Преобразуем ее к виду (12) и, в силу регулярности пучка $\lambda A_{33}+C_{33}$, согласно лемме 2, ее решение удовлетворяет соотношению (13). Итерационный процесс (14) оборвется, так как согласно формулам (23), (26) порядок частных производных по x от $f(x,t)$, входящих в формулу решения не превосходит n. Следовательно, мы получим представление решения подсистемы в виде выражения (15).

Для подсистемы $\Lambda_{22}(D_t, D_x)z_2 = \tilde{f}_2$, с использованием формул (24), (27) можно провести аналогичные рассуждения.

Если существует преобразование подобия Z, приводящее одновременно матрицы $\tilde{B} = A_{11}^{-1}B_{11}$, $\tilde{C} = A_{11}^{-1}C_{11}$ к верхнетреугольной форме, то семейство решений подсистемы $\Lambda_{11}(D_t, D_x)z_1 = \tilde{f}_1$ можно выписать явно при достаточно гладкой $\tilde{f}_1$.

Действительно, после преобразования подобия последнее уравнение системы

$$D_t v + (Z\tilde{B}Z^{-1})D_x v + (Z\tilde{C}Z^{-1})v = Z\tilde{f}_1(x,t),\ z_1 = Z^{-1}v \tag{30}$$

имеет вид $D_t w + bD_x w + cw = g(x,t)$, где b, c—элементы матриц системы, w, $g(x,t)$— последние компоненты вектор-функций v, $Z\tilde{f}_1(x,t)$. Справедлива формула

$$w(x,t) = e^{-ct}\varphi(x - bt, 0) + \int\limits_0^t e^{-c(t-s)}g(x - b(t-s), s)ds, \tag{31}$$

где $\varphi(x,t)$—произвольная функция. Подставляя (26) в (25), мы понизим размерность системы на единицу. Действуя аналогично, мы за $j \le n_1$ шагов построим общее решение системы (30), а следовательно, и системы $\Lambda_{11}(D_t, D_x)z_1 = \tilde{f}_1$.

Другой подход к вопросу о разрешимости подсистемы $A_{11}D_t z_1 + B_{11}D_x z_1 + C_{11}z_1 = \tilde{f}_1$ основан на предположении, что корни многочлена $\det(\lambda A_{11} + B_{11})$ вещественные и простые [15]. Тогда система преобразованием подобия приводима к виду

$$D_t v + \mathcal{D}D_x v + \mathcal{C}v = Z\tilde{f}_1(x,t),\ \mathcal{D} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n_1}\}.$$

Возникает вопрос об условиях приводимости системы (1) к виду (7).

Лемма 4. *Для приводимости системы (1) с постоянными матрицами коэффициентов к виду (7) необходимо, чтобы характеристический многочлен системы (1) допускал представление*

$$\det(\lambda A + \mu B + C) = \tilde{a}_0(a_l\lambda^l + a_{l-1}\lambda^{l-1} + a_1\lambda^l ... + a_0)(b_k\mu^k + b_{k-1}\mu^{k-1} + ... + b_0)\times$$

$$\times(\sigma_0 + \sum_{j=0}^{1}\sigma_{1,j}\lambda^j\mu^{1-j} + ... + \sum_{j=0}^{n_1}\sigma_{n_1,j}\lambda^j\mu^{n_1-j}),\ \sigma_{n_1,0} \neq 0, \sigma_{n_1,n_1} \neq 0.$$

Простейшим достаточным условием является равенство $C = 0$. В этом случае существуют постоянные матрицы P, Q со свойством

$$P(\lambda A + \mu B)Q = \lambda\mathrm{diag}\{E_{n_1},\ N_5,\ E_{n_3}\} + \mu\mathrm{diag}\{J,\ E_{n_2},\ N_7\},\ N_5^{n_2} = 0,\ N_7^{n_3} = 0,$$

где $n = n_1 + n_2 + n_3$. Этот случай рассмотрен в работе [12].

Покажем на примере, что матрицы P, Q не всегда можно выбрать постоянными.

Пример 2. Пусть задана система и замена

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D_t u + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} D_x u + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u = f,\ u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -[D_t + 3D_x] & 1 \end{pmatrix} z.$$

Имеем $\mathrm{diag}\{D_t + 2D_x + 1,\ 1\}z = f$. Постоянных матриц P и Q здесь не существует.

Существует гипотеза: для любого регулярного пучка матриц $\lambda A+\mu B+C$ со свойством $\det(\lambda A+\mu B)\equiv 0\ \forall\lambda,\mu$ найдутся унимодулярные матрицы $P(\lambda,\mu)$, $Q(\lambda,\mu)$ такие, что

$$P(\lambda,\mu)(\lambda A+\mu B+C)Q(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}\lambda A_{11}+\mu B_{11}+C_{11} & \lambda A_{12}+\mu B_{12}+C_{12}\\ 0 & \lambda A_{22}+\mu B_{22}+C_{22}\end{pmatrix},$$

где $\det(\lambda A_{22}+\mu B_{22}+C_{22})=\mathrm{const}\ \forall\lambda,\mu$, $\det(\lambda A_{11}+\mu B_{11})\not\equiv 0$. Но в целом вопрос остается открытым.

3. Условия разрешимости начально-краевых задач

Вопрос о разрешимости задачи (1), (3) рассмотрим для систем с постоянными матрицами коэффициентов при предположении о постоянной преобразующей матрице Q. Пока не удалось понять, как преобразуются начальные и краевые условия при замене $u=Q(D_t,D_x)z$ в общем случае. Если предположение о постоянстве выполнено, то можно записать

$$z(x_0,t)=Q^{-1}\psi(t)=\begin{pmatrix}\psi_1^\top & \psi_2^\top & \psi_3^\top & \psi_4^\top\end{pmatrix}^\top,$$
$$z(x,t_0)=Q^{-1}\phi(x)=\begin{pmatrix}\phi_1^\top & \phi_2^\top & \phi_3^\top & \phi_4^\top\end{pmatrix}^\top. \qquad (32).$$

С учетом формул (29), (15), (17) сформулируем условия разрешимости.

Теорема 2. *Пусть:*
1) пучок матриц с постоянными матрицами коэффициентов $\lambda A+\mu B+C$ регулярен, и существуют унимодулярная матрица $P(D_t,D_x)$ и неособенная постоянная матрица Q, приводящие систему (1) к виду (7);
2) $f(x,t)\in\mathbf{C}^{2n+\varrho+1}(U)$, $\psi(t)\in\mathbf{C}^{2n+1}(T)$, $\phi(x)\in\mathbf{C}^{2n+1}(X)$, где $\varrho-$максимальная степень оператора дифференцирования в матрице $P(D_t,D_x)$;
3) найдутся вектор-функции $c_2(t)$, $c_3(x)$ такие, что для начальных и краевых условий из формулы (32) выполнены условия:

$$\phi_3(x)=\{V(t)c_3(x)+\Omega_3[V(t)c_3(x)]+...+\Omega_3^{\nu_3-1}[V(t)c_3(x)]+\tilde f_3+\Omega_3\tilde f_3+...+\Omega_3^{\nu_3-1}\tilde f_3\}_{|t=t_0},$$
$$\psi_2(t)=\{\bar V(x)c_2(t)+\Omega_2[\bar V(t)c_2(t)]+...+\Omega_2^{\nu_3-1}[\bar V(t)c_2(t)]+\tilde f_2+\Omega_2\tilde f_3+...+\Omega_2^{\nu_2-1}\tilde f_3\}_{|x=x_0};$$

4) выполнены соотношения

$$\psi_3(t)=\{V(t)c_3(x)+\Omega_3[V(t)c_3(x)]+...+\Omega_3^{\nu_3-1}[V(t)c_3(x)]+\tilde f_3+\Omega_3\tilde f_3+...+\Omega_3^{\nu_3-1}\tilde f_3\}_{|x=x_0},$$
$$\phi_2(x)=\{\bar V(x)c_2(t)+\Omega_2[\bar V(t)c_2(t)]+...+\Omega_2^{\nu_3-1}[\bar V(t)c_2(t)]+\tilde f_2+\Omega_2\tilde f_3+...+\Omega_2^{\nu_2-1}\tilde f_3\}_{|t=t_0};$$
$$\psi_4(t)=\{f_4+\Omega_4 f_4+...+\Omega_4^{\nu_4-1}f_4,\ \nu_4\le n_4\}_{|t=t_0},$$
$$\phi_4(x)=\{f_4+\Omega_4 f_4+...+\Omega_4^{\nu_4-1}f_4,\ \nu_4\le n_4\}_{|x=x_0},$$

5) вектор-функции $\psi_1(t)$, $\phi_1(x)$ согласованы в точке (x_0,t_0) [17], в частности, $\psi_1(t_0)=\phi_1(x_0)$ и все корни многочлена $\det(\lambda A_{11}+B_{11})$ простые и действительные, причем в формуле (9) все $\lambda_j<0$.

Тогда в области $\mathbf{U}$ *определено по крайней мере одно решение задачи (1), (3).*

Для того, чтобы сформулировать условия единственности решения, нам потребуется определенным образом усилить требования на входные данные.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1, и подматрицы в правой части равенства (7) имеют вид (19).*

Тогда задача (1), (3) имеет в области $\mathbf{U}$ *единственное решение.*

Доказательство. Умножением на матрицу P и заменой $u = Qz$ преобразуем систему (1) к виду (7). Находим решение уравнения $\Lambda_{44}(D_t, D)x = f_4$ по формуле (29) и подставляем его в первые три уравнения системы. Далее, покажем, что вектор-функции $c_2(t),\ c_3(x)$ в условиях леммы по заданным начальным функциям (32) находятся единственным образом. С учетом того, что в формуле (20) матрицант является матричной экспонентой и имеет верхнетреугольный вид, а матрица $\tilde{N}_5$ верхнетреугольная с нулевой диагональю, то из формулы (15) получаем систему для нахождения $c_3(x) = (c_{3,1}(x), c_{3,2}(x), ..., c_{3,n_3}(x))^\top$. А именно

$$\phi_3(x) = \begin{pmatrix} c_{3,1}(x) \\ ... \\ c_{3,n_3-2}(x) \\ c_{3,n_3-1}(x) \\ c_{3,n_3}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta[c_{3,2}(x), c_{3,3}(x), \cdots, c_{3,n_3}(x)] \\ \cdots \\ \theta[c_{3,n_3-1}(x), c_{3,n_3}(x)] \\ \theta[c_{3,n_3}(x)] \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta(x), \tag{33}$$

где $\theta[\cdots]$ – линейные комбинации производных компонент вектор-функции $c_3(x)$, $\zeta(x)-$ известная функция (см. условие 4 теоремы 2). Итак, находим $c_{3,n_3}(x)$, подставляем во второе (снизу) уравнение системы (33) и вычисляем $c_{3,n_3-1}(x)$ и так далее. Аналогичные рассуждения проводим и для $c_2(t)$. Таким образом, вычисляем компоненты $z_2,\ z_3$.

Подставляем $z_2,\ z_3$ в первое уравнение системы (7) и попадаем в условия теоремы существования начально-краевой задачи системы гиперболических уравнений [17]. $\square$

Свойства систем с постоянными и переменными матрицами коэффициентов сильно различаются.

Пример 3. Пусть задана система

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11}(D_t, D_x) & \Lambda_{12}(D_t, D_x) \\ 0 & \Lambda_{22}(D_t, D_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D_t u + \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{xt} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D_x u + \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & \gamma(x,t) & 0 \\ 0 & e^{xt} & \delta \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

где $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^\top,\ v = \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \end{pmatrix}^\top,\ \delta,\ \alpha_i,\ i = \overline{1,4},$ – числовые параметры, $\gamma(x,t)-$ некоторая функция. Выпишем характеристический многочлен

$$\Theta(\lambda, \mu) = \det[\lambda A(x,t) + \mu B(x,t) + C(x,t)] = (\lambda + \mu\alpha_1 + \alpha_2)[\mu e^{xt}(\delta - 1) + \delta\gamma(x,t)].$$

В классической теории, когда матрицы $A(x,t),\ B(x,t)$ невырожденные, корни многочлена $\Theta(\lambda, \mu)$ несут информацию о типе системы и структуре множества решений (см. например, [17]).

Здесь это не так. Пусть $\gamma(x,t) \equiv 0,\ \delta = 1$. Тогда $\Theta(\lambda, \mu) \equiv 0\ \forall (x,t) \in \mathbf{U}\ \forall \lambda, \mu$. Пусть $\gamma - te^{xt} \neq 0\ \forall (x,t) \in \mathbf{U}$. Методом исключения неизвестных из второго и третьего уравнения находим:

$$u_2 = (f_2 - D_x f_3)/(\gamma - te^{xt}),\ u_3 = -e^{xt} u_2 + f_3.$$

Иначе говоря, здесь $\Lambda_{22}(D_t, D_x) \in \mathcal{Z}$. Подставим эти компоненты в первое уравнение системы (34). Получим

$$D_t u_1 + \alpha_1 D_x u_1 + \alpha_2 u_1 = \Psi(x,t),\ u_1 = \phi(x - \alpha_1 t) + \int_0^t \exp(\alpha_2 s)\Psi(x - \alpha_1(t-s), s) ds,$$

где $\Psi(x,t) = f_1 - \alpha_3 u_2 - \alpha_4 u_3$, ϕ – произвольная гладкая функция. Таким образом, система (5) разрешима при любой $f \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$.

Если $\gamma = te^{xt}$, $\delta = 1$, то $\Theta(\lambda, \mu) \not\equiv 0$. В отличие от систем с постоянными коэффициентами система (34) разрешима не при любой f из леммы 3. Для совместности необходимо, чтобы $f_2 = D_x f_3$. В качестве u_3 можно взять произвольную функцию, и однородная ($f \equiv 0$, $\phi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$) начально-краевая задача (34), (3) имеет бесконечное число ненулевых решений.

4. Математическая модель конвективного теплообменника

В работе [19] описана модель комплекса энергетических установок. Теплообменные процессы описываются в этой модели обыкновенными дифференциальными уравнениями. Расчеты показали, что ряд режимов функционирования комплекса такая модель описывает неудовлетворительно, и эти недостатки порождает принятый способ моделирования теплообмена. Но требование функционирования модели в режиме реального времени и возможности тогдашней вычислительной техники заставляли делать такой выбор. В настоящее время стало возможным использовать при моделировании системы уравнений в частных производных вида (1).

Приведем для примера модель, описывающую конвективный теплообменник (одну из структурных единиц комплекса). Горячие газы нагревают воду, протекающую по трубе. Из законов сохранения получаются следующие уравнения

$$a_1 D_t u_1 + u_4 D_x u_1 + g(u_1, u_2, u_5) = 0,\ a_2 D_t u_2 - g(u_1, u_2, u_5) + h(u_2, u_3) = 0, \tag{35}$$

$$a_3 D_t u_3 + a_4 u_4 D_x u_3 + h(u_2, u_3) = 0,\ \Psi_1(u_1, u_4, u_5) = 0,\ \Psi_2(u_1, u_5) = 0, \tag{36}$$

где $g(u_1, u_2, u_5) = a_5[\tau(u_1, u_5) - u_2]$, $h(u_2, u_3) = a_6[u_2 - u_3/c_g]$, u_1 – энтальпия воды, u_2 – температура стенки, u_3 – –энтальпия газа, u_4 – расход воды, u_5 – давления в узлах гидравлической сети, $a_1 = \rho_b f_b$ – произведение плотности воды на площадь сечения трубы, $a_2 = c_m G_m$ – произведение теплоемкости металла на его массу, $a_3 = \rho_g f_g$ – произведение плотности газа на площадь сечения трубы по газу, a_4 – расход газа, $a_5 = \alpha_b H_b$ – произведение площади теплообмена воды с металлом на коэффициент теплоотдачи, $a_6 = \alpha_g H_g$ – произведение площади теплообмена газа с металлом на коэффициент теплоотдачи, c_g – теплоемкость газа, $\Psi_i(...) = 0$ – уравнения гидравлической сети и состояния, $i = 1, 2$, $\tau(...)$ – температура воды.

Расчеты показали существенное улучшение качества моделирования с применением распределенных систем вида (35), (36).

Заключение

В данной работе получены условия разрешимости линейных начально-краевых задач вида (1), (3). Эти результаты являются первым шагом на пути исследования квазилинейных систем вида (1) и построения эффективных численных методов решения задач (1), (3).

Литература

1. Wade, S.M. A differentiation index for partial differential-algebraic equations / S.M. Wade, I.B. Paul // SIAM J. Sci. Comp. – 2000. – V. 21, № 6. – P. 2295–2316.
2. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – Т. 18. – С. 3–50.
3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln: VSP, 2003.

4. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Науч. кн., 1998.
5. Таиров, Э.А. Интегральная модель нелинейной динамики парогенерирующего канала на основе аналитических решений / Э.А. Таиров, В.В. Запов // ВАНТ. Сер. Физика ядерных реакторов. – 1991. – Вып. 3. – С. 14–20.
6. Gunther, M. PDAE-Netzwerkmodelle in der elektrischen schaltungssimulation / M. Gunther, P. Rentrop. – Preprint 99/3. – Karlsruhe: IWRMMM, 1999.
7. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С.47–74.
8. Сидоров, Н.А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров , М.В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 726–728.
9. Паламодов, В.П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / В.П. Паламодов. – М.: Наука, 1967.
10. Campbell, S.L. The Index of Infinite Dimensional Implicit System / S.L. Campbell , W. Marzalek // Mathematical and Computer Modelling of System. – 1999. – V. 5, № 1. – P. 18–42.
11. Бояринцев, Ю.Е. Применение обобщенных обратных матриц к решению и исследованию систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка / Ю.Е. Бояринцев // Методы оптимизации и исследование операций. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1984. – С. 123–141.
12. Бормотова, О.В. О методах численного решения и исследования систем не типа Коши–Ковалевской / О.В. Бормотова, В.Ф. Чистяков // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44, № 8. – С. 1380–1387.
13. Гайдомак, С.В. О системах не типа Коши-Ковалевской индекса (1,k) / С.В. Гайдомак, В.Ф. Чистяков // Вычисл. технологии. – 2005. – Т. 10, № 2. – С. 45–59.
14. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1998.
15. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. – М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1950.
16. Чистяков, В.Ф. О непрерывной зависимости решений линейных систем дифференциально-алгебраических уравнений от параметра / В.Ф. Чистяков, М. Пешич // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 3. – С. 363–372.
17. Годунов, С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов. – М.: Наука, 1971.
18. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Наука, 1964.
19. Логинов, А.А. Алгебро-дифференциальная система математической модели энергоблока ТЭС / А.А. Логинов, Э.А. Таиров, В.Ф.Чистяков // Труды XI междунар. Байкал. шк.-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, Байкал, 5–12 июля 1998 г.). Т. 4. Численный анализ, обратные и некорректные задачи. – Иркутск, 1998. – С. 119–122.

Нгуен Хак Диеп, аспирант, научный сотрудник, Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет (г. Иркутск, Российская Федерация), diep62@mail.ru.

Виктор Филимонович Чистяков, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), chist@icc.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫,
2013, vol. 6, no. 1, pp. 98–111.

MSC 35L81

Using Partial Differential Algebraic Equations in Modelling

Nguyen Khac Diep, National Research Irkutsk State Technical University, Irkutsk, Russian Federation, diep62@mail.ru
V.F. Chistyakov, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation, chist@icc.ru

We consider evolutionary systems of partial differential equations depending on a single space variable. It is assumed that the matrices multiplying the derivatives of the desired vector-function are singular in the domain. Such systems are commonly called partial differential algebraic equations (PDAEs). Properties of PDEAs are essentially different to the properties of non-singular systems. In particular, it is impossible to define a type of a system judging by roots of characteristic polynomials. In this paper, we introduce a notion of splittable systems by which we mean systems allowing existence of non-singular transformations that lead to splitting of the original system to the subsystem with a unique solution and the non-singular subsystem of partial differential equations. Such an approach makes it possible to investigate the structure of general solutions to differential algebraic equations and, in some cases, to establish solvability of initial-boundary value problems.

Keywords: partial derivative, differential-algebraic equations, hyperbolic, singular systems, index, canonical form, modelling.

References

1. Wade S.M., Paul I.B. A Differentiation Index for Partial Differential-Algebraic Equations. *SIAM J. Sci. Comp.,* 2000, vol. 21, no. 6, pp. 2295–2316.
2. Sobolev S.L. On a New Problem of Mathematical Physics [Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki]. *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Math. USSR. Ser. Math.], 1954, vol. 18, pp. 3–50.
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, Köln, VSP, 2003.
4. Demidenko G.V., Uspenskiy S.V. *Uravneniya i sistemy ne razreshennye otnositel'no starshey proizvodnoy* [Equations and Systems not Solved for the Highest Derivative]. Novosibirsk, Nauchnaya kniga, 1998.
5. Tairov E.A., Zapov V.V. Integrated Model of the Nonlinear Dynamics of the Steam-Generating Channel Based on Analytical Solutions [Integral'naya model' nelineynoy dinamiki parogeneriruyushchego kanala na osnove analiticheskikh resheniy]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya ≪Fizika yadernykh reaktorov≫* [Of Nuclear Science and Technology Series ≪Physics of Nuclear Reactors≫], 1991, issue 3, pp. 14–20.
6. Gunther M., Rentrop P. *PDAE-Netzwerkmodelle in Der Elektrischen Schaltungssimulation.* Preprint 99/3. Karlsruhe: IWRMMM, 1999.

7. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russian Mathematical Surveys,* 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45–74.
8. Sidorov N.A., Falaleev M.V. Generalized Solutions of Differential Equations with the Fredholm Operator in the Derivative [Obobshchennye resheniya differentsial'nykh uravneniy s fredgol'movym operatorom pri proizvodnoy]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1987, vol. 23, no. 4, pp. 726–728.
9. Palamodov, V.P. *Lineynye differentsial'nye operatory s postoyannymi koeffitsientami* [Linear Differential Operators with Constant Coefficients]. Moscow, Nauka, 1967.
10. Campbell S.L. The Index of Infinite Dimensional Implicit System. *Mathematical and Computer Modelling of System,* 1999, vol. 5, no. 1, pp. 18–42.
11. Boyarintsev Yu.E. Application of Generalized Inverse Matrix Solutions and Research Systems of Partial Differential Equations of First Order [Primenenie obobshchennykh obratnykh matrits k resheniyu i issledovaniyu sistem differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka]. *Metody optimizatsii i issledovanie operatsiy* [Methods of Optimization and Operations Research], Irkutsk: SEI SO AN USSR, 1984. pp. 123–141.
12. Bormotova O.V., Chistyakov V.F. O metodakh chislennogo resheniya i issledovaniya sistem ne tipa Koshi–Kovalevskoy [Methods of Numerical Solutions and Research Systems Are not Cauchy – Kovalevskaya]. *Zhurn. vychislit. matematiki i mat. fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2004, vol. 44, no. 8, pp. 1380–1387.
13. Gaidomak, S.V., Chistyakov V.F. On Systems not of Cauchy–Kovalevskaya Index (1, k) [O sistemakh ne tipa Koshi-Kovalevskoy indeksa (1,k)]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computer Applications], 2005, vol. 10, no. 2, pp. 45–59.
14. Boyarintsev Y.E., Chistyakov V.F. *Algebro-differentsial'nye sistemy. Metody chislennogo resheniya i issledovaniya* [Differential Algebraic Equations. Methods of Numerical Solutions and Research]. Novosibirsk: Nauka, 1998.
15. Petrovskiy I.G. *Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on Partial Differential Equations]. Moscow, Leningrad, 1950.
16. Chistyakov V.F., Pjescic M.R. On the Continuous Dependence of Solutions of Linear Systems of Differential-Algebraic Equations. *Differential Equations,* 2009, vol. 45, no. 3, pp. 374–384.
17. Godunov S.K. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1971.
18. Petrovskiy I.G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1964.
19. Loginov A.A., Tairov E.A., Chistyakov V.F. Algebraic-Differential Mathematical Model of the System Power Units [Algebro-differentsial'naya sistema matematicheskoy modeli energobloka TES]. *Trudy XI mezhdunar. Baykal. shk.-seminara «Metody optimizatsii i ikh prilozheniya» (Irkutsk, Baykal, 5–12 iyulya 1998 g.). T. 4. Chislennyy analiz, obratnye i nekorrektnye zadachi* [Proceedings of the XI Intern. Baikal. sch-seminar «Optimization Methods and Their Applications» (Irkutsk, Baikal, 5–12 July 1998), vol. 4. Numerical Analysis, Inverse and Ill-Posed Problems]. Irkutsk, 1998, pp. 119–122.

Поступила в редакцию 10 октября 2012 г.