

## АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ МАЛОКОНЦЕНТРИРОВАННОЙ СУСПЕНЗИИ МОНОДИСПЕРСНЫХ СТОКСОВСКИХ ЧАСТИЦ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

*В.И. Рязьских, А.А. Богер, А.В. Рязьских*

В рамках конвективно-диффузионных представлений о седиментации монодисперсной малоцентрированной твердой фазы в движущейся суспензии по плоскому горизонтальному каналу получена линейная краевая задача для параболического уравнения относительно локальной счетной концентрации частиц. Граничные условия третьего рода поставлены из условия, что поток частиц на смоченные поверхности пропорционален их концентрации у стенки. Получено аналитическое решение сформулированной краевой задачи методом интегральных преобразований, на основе которого найдены соотношения для определения толщины осадка на нижней и верхней стенках канала. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что кинетика осаждения твердой фазы из движущейся суспензии, а также скорость образования осадка и его распределение на нижней и верхней стенках плоского канала существенным образом зависят от степени перемешивания дисперсионной среды и от поглощательной способности смоченных поверхностей. Установлено, что уменьшение интенсивности перемешивания для стенок с низкой поглощательной способностью уменьшает скорость седиментации частиц на стенки канала, а в случае высокой поглощательной способности – увеличивает.

*Ключевые слова:* уравнение конвективной диффузии; краевая задача; преобразование Лапласа; аналитическое решение; толщина осадка; седиментация; степень перемешивания; поглощательная способность стенки.

### Введение

Исследование гидромеханики суспензий началось с работ Эйнштейна, Каннингема и Смолуховского [1–3], в которых были синтезированы феноменологические модели эффективной вязкости, единичной ячейки и отражения соответственно. Примененная ими схема реализовывала гипотезу взаимодействующих континуумов дисперсионной и дисперсной фаз при ламинарном режиме течения, что давало возможность рассматривать поведение фаз отдельно друг от друга, а их взаимное влияние учитывать через так называемые представительные объемы. Это позволяло использовать совместно уравнения Навье – Стокса и переноса частиц твердой фазы в Эйлеровом представлении модифицированными тензорными соотношениями реологических компонентов. Попытка [4] распространить такой подход на турбулентный режим течения суспензии в рамках энергетического подхода Кармана не привела к ожидаемым результатам: оставалось не ясным, каким образом получить корректную информацию о локальной концентрации твердой фазы в задачах с непроницаемыми границами и о распределении осадка на смоченных поверхностях. Параллельно с феноменологическим подходом стал развиваться и стохастический [5], однако основная проблема решений различного спектра задач динамики дисперсных систем методами статистической физики состоит в согласовании локальных характеристик фаз для однозначного поведения суспензии в целом. Все перечисленные трудности остаются и в случае малоцентрированных суспензий, для которых влиянием твердой фазы на несущую среду можно пренебречь.

Необходимость совершенствования технологий получения композиционных материалов, используемых в энергетике, ракетно-космической технике, химической и пищевой промышленности и др., в последнее время вновь пробудило интерес к этой тематике, подробный анализ работ приведен, например, в [6–9]. Однако, судя по полученным пока результатам, проблема все еще далека от своего разрешения.

Альтернативным подходом для описания гидромеханики дисперсных систем является использование конвективно-диффузионных модельных представлений о сепарации дисперсной фазы в суспензиях, который подтвердил свою состоятельность при решении ряда важных практических задач [10, 11]. Уравнение транспорта монодисперсных частиц имеет следующий вид

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + (\bar{u} \cdot \nabla) n = \nabla (D \nabla n), \quad (1)$$

где  $\tau$  – текущее время;  $n$  – локальная счетная концентрация;  $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$ ;  $\bar{v}$  – скорость движения дисперсионной среды;  $\bar{w}$  – седиментационная скорость частиц;  $D$  – коэффициент диффузии (перемешивания). В общем случае  $\bar{u}$  и  $D$  являются функциями времени, координат, концентрации и размера частиц. На поверхности осадка  $\Gamma$ , как правило, формулируется граничное условие [12]

$$(wn + D \text{grad } n)|_{\Gamma} = [k \cdot n(1 - n/n_s)]|_{\Gamma}, \quad (2)$$

где  $n_s$  – счетная концентрация частиц взвеси в осадке,  $k$  – кинетический коэффициент, характеризующий скорость встраивания частиц в структуру осадка. Соотношения (1) и (2), дополненные начальным условием

$$n|_{\tau=0} = n_0, \quad (3)$$

образуют нелинейную начально-краевую задачу, описывающую различные постановки динамики монодисперсных суспензий при наличии границ образования осадка.

## 1. Постановка задачи и ее физическая линейаризация

Рассматривается однонаправленное движение малоконцентрированной суспензии монодисперсных стоксовских частиц в плоском слое, на входе которого осуществляется подача суспензии с постоянной концентрацией (рис. 1).

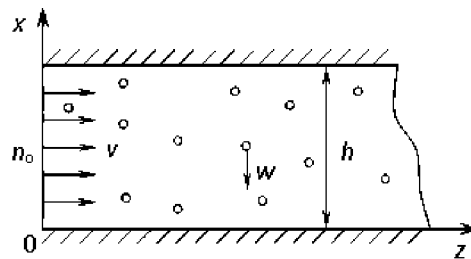


Рис. 1. Расчетная схема

В силу малоконцентрированности суспензии влиянием частиц на гидродинамическую структуру течения можно пренебречь, так что определение  $\bar{u}$  возможно из несопряженных с полем концентрации частиц уравнений Навье – Стокса или уравнений Рейнольдса. Известно [13], что довольно сложное решение гидродинамической задачи может быть заменено гидродинамическим режимом идеального вытеснения, который в первом приближении

вполне адекватно описывает, например, турбулентное течение маловязких сред, откуда следует, что  $v \approx \text{const}$ . Далее, так как частицы имеют стоксовскую природу, то и  $w \approx \text{const}$ . Кроме того, будем считать, что  $D \approx \text{const}$ , а также не учитывать эффект скольжения фаз. Таким образом, в выбранной системе координат (рис. 1) уравнение (1) запишется

$$\frac{\partial n(x, z, \tau)}{\partial \tau} = -v \frac{\partial n(x, z, \tau)}{\partial z} + w \frac{\partial n(x, z, \tau)}{\partial x} + D \left[ \frac{\partial^2 n(x, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n(x, z, \tau)}{\partial z^2} \right]. \quad (4)$$

В силу квазистационарности рассматриваемой задачи  $\partial/\partial\tau \equiv 0$ , а диффузионный перенос частиц в направлении  $oz$  существенно меньше конвективного, получим из (4)

$$v \frac{\partial n(x, z)}{\partial z} = w \frac{\partial n(x, z)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 n(x, z)}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Граничные условия (2) и (3) с учетом того, что  $n \ll n_s$ , модифицируются в следующий вид:

$$n(x, 0) = n_0; \quad (6)$$

$$wn(0, z) + D \frac{\partial n(0, z)}{\partial x} = k_b n(0, z); \quad (7)$$

$$wn(h, z) + D \frac{\partial n(h, z)}{\partial x} = -k_U n(h, z), \quad (8)$$

где  $k_b, k_U$  – кинетические коэффициенты, характеризующие скорость встраивания частиц в осадок на нижней и верхней стенках канала соответственно.

Для сокращения числа независимых переменных в системе (6) – (8) приведем ее к безразмерной форме записи:

$$\frac{\partial N(X, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial N(X, Z)}{\partial X} + \text{Bo}^{-1} \frac{\partial^2 N(X, Z)}{\partial X^2}; \quad (9)$$

$$N(X, 0) = 1; \quad (10)$$

$$N(0, Z) + \text{Bo}^{-1} \frac{\partial N(0, Z)}{\partial X} = K_b N(0, Z); \quad (11)$$

$$N(1, Z) + \text{Bo}^{-1} \frac{\partial N(1, Z)}{\partial X} = -K_U N(1, Z), \quad (12)$$

где  $Z = wz/(vh)$ ;  $X = x/h$ ;  $\text{Bo} = wh/D$  – число Боденштейна;  $K_b = k_b/w$ ;  $K_U = k_U/w$ . Отметим, что краевая задача (9) – (12) является линейной, и, следовательно, ее решение может быть получено классическими методами, например, с помощью одностороннего преобразования Лапласа [14].

## 2. Аналитическое решение

Изображение системы (9) – (12) по Лапласу относительно переменной  $Z$  таково:

$$\frac{d^2 N_L(X, s)}{dX^2} + \text{Bo} \frac{dN_L(X, s)}{dX} - \text{Bo} \cdot s \cdot N_L(X, s) = -\text{Bo}; \quad (13)$$

$$N_L(0, s) + \text{Bo}^{-1} \frac{dN_L(0, s)}{dX} = K_b N_L(0, s); \quad (14)$$

$$N_L(1, s) + \text{Bo}^{-1} \frac{dN_L(1, s)}{dX} = K_U N_L(1, s), \quad (15)$$

где  $s$ ;  $N_L$  – изображения  $Z$  и  $N$  соответственно.

Общее решение (13) – (15) есть

$$N_L(X, s) = \frac{1}{s} + [C_1 \operatorname{sh}(\beta X) + C_2 \operatorname{ch}(\beta X)] \exp\left(-\frac{\operatorname{Bo}}{2} X\right),$$

где  $\beta = \sqrt{\operatorname{Bo}^2/4 + s \cdot \operatorname{Bo}}$ ;  $C_1, C_2$  – константы интегрирования, которые определены из условий (14) и (15). Поэтому

$$N_L(X, s) = \frac{1}{s} + \frac{\varphi(X, s)}{\psi(s)}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(X, s) = & \left\langle \left\{ (1 + K_U) \left( \frac{1}{2} - K_b \right) \exp\left(\frac{\operatorname{Bo}}{2}\right) - (1 - K_b) \left[ \left( \frac{1}{2} + K_U \right) \cdot \operatorname{ch} \beta + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \operatorname{Bo}^{-1} \beta \operatorname{sh} \beta \right] \right\} \frac{\operatorname{sh}(\beta X)}{\beta} + \left\{ -\operatorname{Bo}^{-1} (1 + K_U) \exp\left(\frac{\operatorname{Bo}}{2}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - K_b) \left[ \left( \frac{1}{2} + K_U \right) \frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta} + \operatorname{Bo}^{-1} \operatorname{ch} \beta \right] \right\} \operatorname{ch}(\beta X) \right\rangle \exp\left(-\frac{\operatorname{Bo}}{2} X\right); \\ \psi(s) = & s \left\{ \operatorname{Bo}^{-1} (K_U + K_b) \operatorname{ch} \beta + \left[ \operatorname{Bo}^{-2} \beta^2 - \left( \frac{1}{2} - K_b \right) \left( \frac{1}{2} + K_U \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta} \right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что  $\varphi(X, s)$  и  $\psi(s)$  являются обобщенными полиномами, причем степень  $\psi(s)$  больше степени  $\varphi(X, s)$ , поэтому воспользуемся второй теоремой обращения Лапласа [15]. Для этого найдем корни уравнения  $\psi(s) = 0$ , которыми будут: 1)  $s = 0$ ; 2) действительный корень  $\lambda$  уравнения

$$\operatorname{th} \lambda = p\lambda / (q - \lambda^2); \quad (17)$$

и 3) бесконечное счетное множество корней  $\mu_n$  уравнения

$$\operatorname{tg} \mu_n = p\mu_n / (q - \mu_n^2), \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (18)$$

где

$$p = \operatorname{Bo} (K_U + K_b); \quad q = \operatorname{Bo}^2 \left( \frac{1}{2} - K_b \right) \left( \frac{1}{2} + K_U \right).$$

При  $p > 0, q > 0$  и  $p < q$  уравнение (17) имеет один корень в интервале  $(0, \sqrt{q})$ , а при  $p > 0, q > 0$  и  $p > q$  или когда  $p > 0, q < 0$  у уравнения (17) действительных корней нет. При  $p > 0, q > 0$  и  $p < q$  уравнение (18) имеет по одному корню в интервалах периодичности функции тангенс, причем в интервале  $(0, \pi/2)$  действительных корней нет. При  $p > 0, q > 0$  и  $p > q$  уравнение (18) имеет по одному корню в интервалах периодичности функции тангенс, а также корень в интервале  $(0, \pi/2)$ . И, наконец, при  $p > 0, q < 0$  уравнение (18) на одном из интервалов периодичности функции тангенс имеет два корня. Номер этого интервала определяется величиной  $\sqrt{q}$ .

Из вышесказанного следует, что оригинал (16) есть

$$N(X, Z) = \begin{cases} N_\lambda(X, Z) + N_\mu(X, Z), & \text{при } p > 0, q > 0 \text{ и } p < q; \\ N_\mu(X, Z), & \text{при } p > 0, q > 0, p > q \text{ или при } p > 0, q < 0, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$N_\lambda(X, Z) = \left[ \frac{A_\lambda}{\lambda} \operatorname{sh}(\lambda X) + B_\lambda \operatorname{ch}(\lambda X) \right] \exp\left[-\frac{\operatorname{Bo}}{2} X + \left( \frac{\lambda^2}{\operatorname{Bo}} - \frac{\operatorname{Bo}}{4} \right) Z\right] / C_\lambda;$$

$$\begin{aligned}
 N_\mu(X, Z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_\mu}{\mu_n} \sin(\mu_n X) + B_\mu \cos(\mu_n X) \right] \exp \left[ -\frac{\text{Bo}}{2} X - \left( \frac{\mu_n^2}{\text{Bo}} + \frac{\text{Bo}}{4} \right) Z \right] / C_\mu; \\
 A_\lambda &= (1 + K_U) \left( \frac{1}{2} - K_b \right) \exp \left( \frac{\text{Bo}}{2} \right) - (1 - K_b) \left[ \left( \frac{1}{2} + K_U \right) \text{ch } \lambda + \text{Bo}^{-1} \lambda \text{sh } \lambda \right]; \\
 B_\lambda &= -\text{Bo}^{-1} \lambda (1 + K_U) \exp \left( \frac{\text{Bo}}{2} \right) + (1 - K_b) \left[ \left( \frac{1}{2} + K_U \right) \frac{\text{sh } \lambda}{\lambda} + \text{Bo}^{-1} \text{ch } \lambda \right]; \\
 C_\lambda &= \left( \frac{\lambda^2}{\text{Bo}} - \frac{\text{Bo}}{4} \right) \left\{ \frac{1}{2\lambda} (K_U + K_b) \text{sh } \lambda + \text{Bo}^{-1} \lambda^{-1} \text{sh } \lambda + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\text{Bo}}{2\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\text{Bo}^2} - \left( \frac{1}{2} - K_b \right) \left( \frac{1}{2} + K_U \right) \right] (\text{ch } \lambda - \lambda^{-1} \text{sh } \lambda) \right\}; \\
 A_\mu &= (1 + K_U) \left( \frac{1}{2} - K_b \right) \exp \left( \frac{\text{Bo}}{2} \right) - (1 - K_b) \left[ \left( \frac{1}{2} + K_U \right) \cos \mu_n - \text{Bo}^{-1} \mu_n \sin \mu_n \right]; \\
 B_\mu &= -\text{Bo}^{-1} (1 + K_U) \exp \left( \frac{\text{Bo}}{2} \right) + (1 - K_b) \left[ \left( \frac{1}{2} + K_U \right) \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \text{Bo}^{-1} \cos \mu_n \right]; \\
 C_\mu &= - \left( \frac{\mu_n^2}{\text{Bo}} + \frac{\text{Bo}}{4} \right) \left\{ (K_U + K_b) \frac{\sin \mu_n}{2\mu_n} + \frac{\text{Bo}^{-1}}{\mu_n} \sin \mu_n + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\text{Bo}}{2\mu_n^2} \left[ \frac{\mu_n^2}{\text{Bo}^2} + \left( \frac{1}{2} - K_b \right) \left( \frac{1}{2} + K_U \right) \right] \left( \cos \mu_n - \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Осредненное по поперечному сечению значение локальной концентрации (19) таково:

$$\bar{N}(Z) = \begin{cases} \bar{N}_\lambda(Z) + \bar{N}_\mu(Z), & \text{при } p > 0, q > 0 \text{ и } p < q; \\ \bar{N}_\mu(Z), & \text{при } p > 0, q > 0 \text{ и } p > q \text{ или при } p > 0, q < 0, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_\lambda(Z) &= C_\lambda^{-1} \left\langle \left( \frac{A_\lambda}{\lambda} + B_\lambda \right) \frac{1}{2\lambda - \text{Bo}} \left[ \exp \left( \lambda - \frac{\text{Bo}}{2} \right) - 1 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{A_\lambda}{\lambda} - B_\lambda \right) \left[ \frac{1}{2\lambda + \text{Bo}} \left\{ \exp \left[ - \left( \lambda + \frac{\text{Bo}}{2} \right) \right] - 1 \right\} \right] \right\rangle \exp \left[ \left( \frac{\lambda^2}{\text{Bo}} - \frac{\text{Bo}}{4} \right) Z \right]; \\
 \bar{N}_\mu(Z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \left\{ \frac{A_\mu}{\mu_n} \left[ \mu_n - \left( \frac{\text{Bo}}{2} \sin \mu_n + \mu_n \cos \mu_n \right) \exp \left( -\frac{\text{Bo}}{2} \right) \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + B_\mu \left[ \frac{\text{Bo}}{2} - \left( \frac{\text{Bo}}{2} \cos \mu_n - \mu_n \sin \mu_n \right) \exp \left( -\frac{\text{Bo}}{2} \right) \right] \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp \left[ - \left( \frac{\mu_n^2}{\text{Bo}} + \frac{\text{Bo}}{4} \right) Z \right] / \left[ C_\mu \left( \frac{\text{Bo}^2}{4} \mu_n^2 \right) \right] \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Наиболее важной характеристикой движения суспензии в канале является распределение толщины осадка частиц на смоченных поверхностях. Расчетные соотношения для толщины осадка на нижней стенке канала получены из следующих соображений. Из (7) следует, что локальный штучный поток частиц на поверхность осаждения есть

$$j(0, z) = k_b n(0, z),$$

откуда их число на элементарной площади  $dzdy$  будет

$$dm(0, z) = k_b n(0, z) d\tau dz dy,$$

где  $dy$  – элемент длины в направлении плоскости  $oxy$ . С другой стороны, объем одной частицы равен  $V_p = k_V l^3$ , где  $k_V$  – коэффициент формы частицы с характерным размером  $l$ , тогда общий объем частиц на элементарной площади составит

$$dV(0, z) = V_p dm(0, z) = k_V l^3 k_b n(0, z) d\tau dz dy.$$

Учитывая порозность осадка через  $\varepsilon$ , получим величину толщины осадка на элементарной площади в виде

$$d\delta(0, z) = \frac{k_V l^3}{1 - \varepsilon} k_b n(0, z) \frac{dz}{v}. \quad (21)$$

Соотношение (21) в безразмерном дифференциальном виде таково

$$\frac{d\Delta(0, z)}{dZ} = K_b N(0, Z), \quad (22)$$

где  $\Delta(0, z) = \delta(0, z) / \left( \frac{k_V l^3}{1 - \varepsilon} h n_0 \right)$ ; к которому добавляется очевидное условие

$$\Delta(0, \infty) = 0. \quad (23)$$

Из (22) и (23) окончательно получим

$$\Delta(0, Z) = K_b \int_{\infty}^Z N(0, Z) dZ. \quad (24)$$

Аналогичное соотношение может быть записано для безразмерной толщины осадка на верхней стенке канала

$$\Delta(1, Z) = K_U \int_{\infty}^Z N(1, Z) dZ. \quad (25)$$

### 3. Результаты расчетов

Целью расчетов являлось установление закономерностей кинетики осаждения твердой фазы в суспензии в зависимости от интенсивности перемешивания дисперсионной среды и влияние поглотательной способности стенок канала при образовании осадка.

При интенсивном перемешивании суспензии в канале и малой поглотательной способности стенок канала локальная концентрация частиц по длине канала имеет слабо выраженную неоднородность (рис. 2 а), связанную с действием силы тяжести на частицы, что отличается заметным повышением концентрации частиц у нижней стенки канала. Как видно из рис. 2 б, действие силы тяжести также оказывает влияние на толщины осадков на смоченных поверхностях, заметно различающихся между собой. Очевидно, что при еще большем уменьшении  $Bo$  (увеличения интенсивности перемешивания) это различие будет нивелироваться.

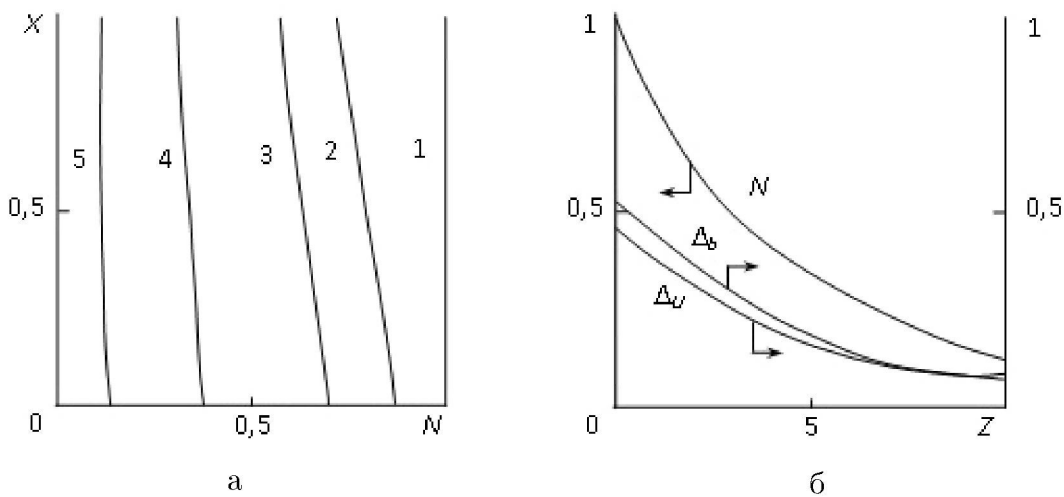
Если уменьшить интенсивность перемешивания (увеличить число Боденштейна), то локальная концентрация твердой фазы сначала существенно возрастает на нижней стенке канала, а затем начинает уменьшаться в силу осаждения частиц (рис. 3 а). При этом процесс образования осадка частиц происходит на меньшей длине канала с его локализацией, в основном, на нижней смоченной поверхности (рис. 3 б).

При интенсивном поглощении частиц стенками канала в процессе осаждения их локальная концентрация в ядре потока больше, чем у смоченных поверхностей (рис. 4 а), причем

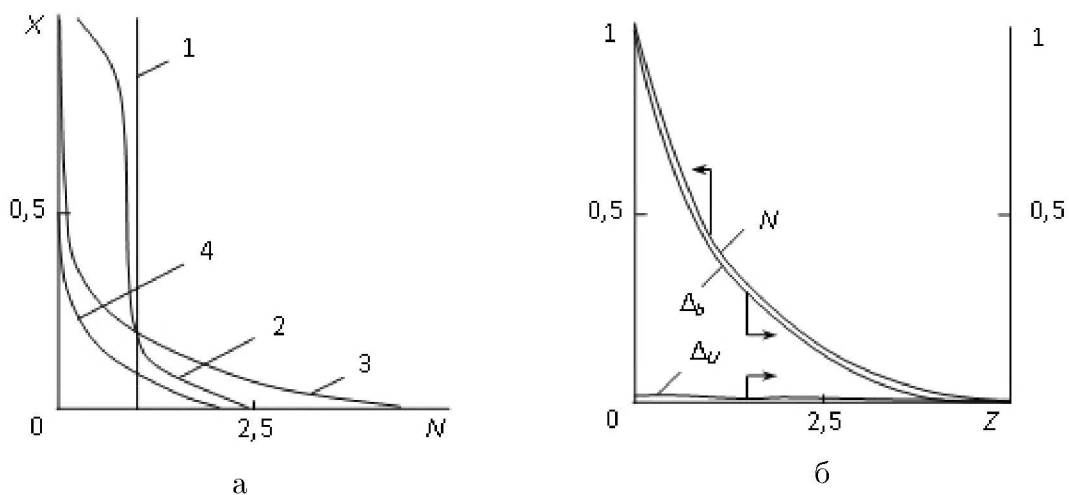
локальная концентрация частиц больше у верхней стенки. Этим объясняется и то, что толщина осадка на верхней смоченной поверхности больше, чем на нижней (рис. 4 б).

Уменьшение интенсивности перемешивания дисперсионной среды при тех же кинетических характеристиках стенок канала приводит к тому, что по длине канала формируется неоднородное ядро частиц с локальной концентрацией частиц, смещенной по направлению к нижней смоченной поверхности (рис. 5 а). Это приводит к тому, что толщина осадка на нижней стенке значительно больше, чем на верхней (рис. 5 б). Кроме того, в этом случае скорость осаждения частиц суспензии замедляется.

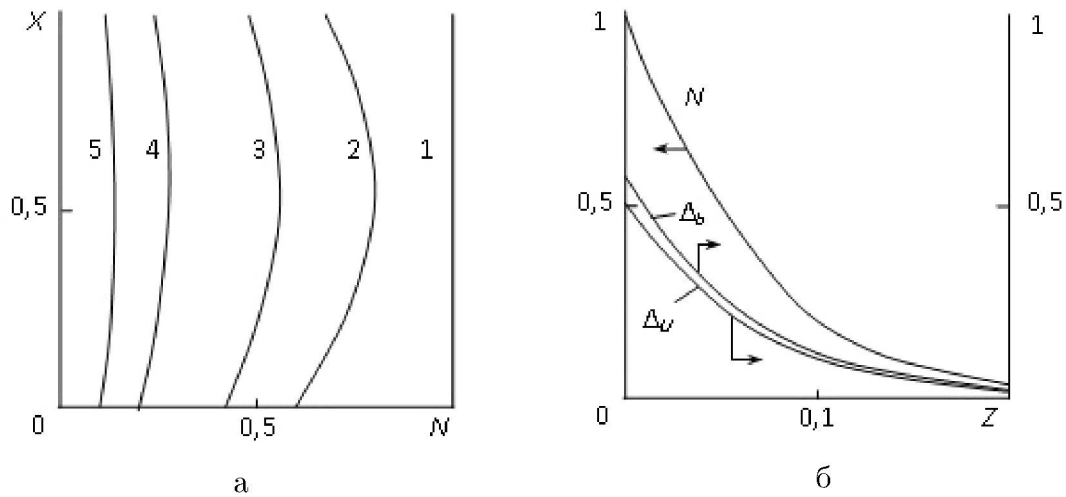
Выявленные закономерности позволяют управлять процессом седиментации твердой фазы суспензии.



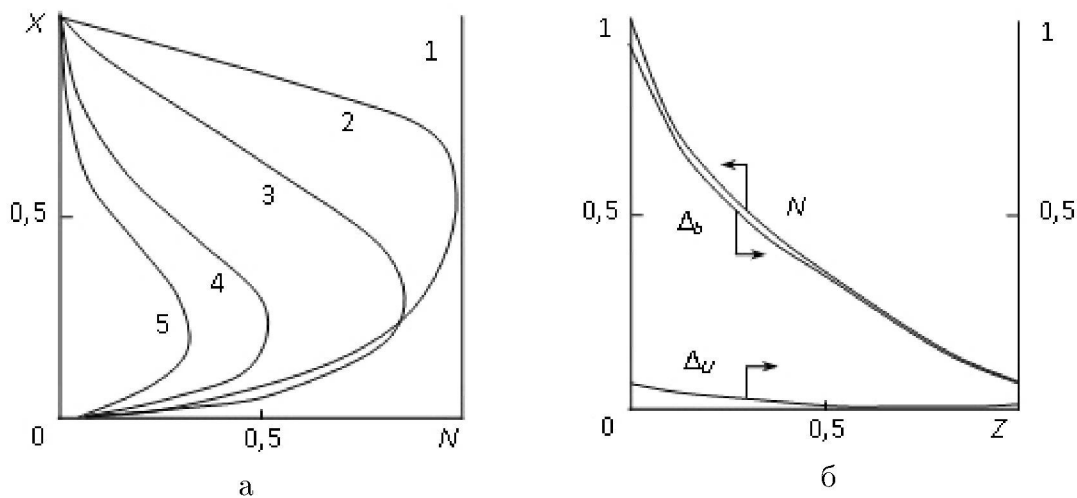
**Рис. 2.** Локальная концентрация (а) при различных  $Z$ : 1–0; 2–1,0; 3–3,0; 4–4,0; 5–10,0; средняя концентрация по длине канала и толщины осадков на верхней ( $\Delta_U$ ) и нижней ( $\Delta_b$ ) стенках (б) для  $Bo=0,1$ ;  $K_U = 0, 1$ ;  $K_b = 0, 1$



**Рис. 3.** Локальная концентрация (а) при различных  $Z$ : 1–0; 2–0,1; 3–1,0; 4–2,0; средняя концентрация по длине канала и толщины осадков на верхней ( $\Delta_U$ ) и нижней ( $\Delta_b$ ) стенках (б) для  $Bo=10,0$ ;  $K_U = 0, 1$ ;  $K_b = 0, 1$



**Рис. 4.** Локальная концентрация (а) при различных  $Z$ : 1–0; 2–0,1; 3–3,0; 4–4,0; 5–10,0; средняя концентрация по длине канала и толщины осадков на верхней ( $\Delta_U$ ) и нижней ( $\Delta_b$ ) стенках (б) для  $Bo=0,1$ ;  $K_U = 10$ ;  $K_b = 10$



**Рис. 5.** Локальная концентрация (а) при различных  $Z$ : 1–0; 2–0,1; 3–0,3; 4–0,6; 5–0,8; средняя концентрация по длине канала и толщины осадков на верхней ( $\Delta_U$ ) и нижней ( $\Delta_b$ ) стенках (б) для  $Bo=10$ ;  $K_U = 10$ ;  $K_b = 10$

*Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ по гранту № 13-08-00261.*

## Литература

1. Einstein, A. Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen / A. Einstein // Annalen der Physik. – 1906. – V. 19. – P. 289–306.
2. Cunningham, E. On the Velocity of Steady Fall of Spherical Particles Through Fluid Medium / E. Cunningham // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1910. – V. 83. – P. 357–365.
3. Smoluchowski, M. Über die Wechselwirkung von Kugeln, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen / M. Smoluchowski // Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie. Ser. 1A. – 1911. – P. 28–39.



4. Einstein, A. Effects of Heavy Concentration Near the Bed on the Velocity and Sediment Distribution / A. Einstein, N. Chien. – MRD Sediment Series 8, University of California, Berkeley, 1955.
5. Покровский, В.П. Статистическая механика разбавленных суспензий / В.П. Покровский. – М.: Наука, 1978. – 135 с.
6. Junke, G. Turbulent Velocity Profiles in Sediment-Laden Flows / G. Junke, Y.J. Pierre // Journal of Hydraulic Research. – 2001. – V. 39, № 1. – P. 11–23.
7. Venturu, A.F. Modeling the Turbulent Flow of Pulp Suspensions / A.F. Venturu, A.P. Garcia, P.J. Ferreira, M.G. Rasteiro // Ind. Eng. Chem. Res. – 2011. – V. 50, issue 16. – P. 9735–9742.
8. Shanliang, Z. Numerical Research on the Fiber Suspensions in a Turbulent T-Shaped Branching Channel Flow / Z. Shanliang, L. Jianzhong, Z. Weifeng // Chinese Journal of Chemical Engineering. – 2007. – V. 15, № 1. – P. 30–38.
9. Гуськов, С.Б. Метод самосогласованного поля применительно к динамике вязких суспензий / С.Б. Гуськов // Прикладная математика и механика – 2013. – Т. 77, вып. 4. – С. 557–572.
10. Нигматулин, Р.Н. Основы механики гетерогенных сред / Р.Н. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
11. Процессы и аппараты химической технологии. Явления переноса, макрокинетика, подобие, моделирование, проектирование: В 5 т. Т. 1. Основы теории процессов химической технологии / Под ред. А.М. Кутепова. – М.: Логос, 2000. – 480 с.
12. Хариц, В.М. К теории осаждения / В.М. Хариц, В.И. Ряжских // Теоретические основы химической технологии. – 1989. – Т. 23, № 5. – С. 651–658.
13. Цветков, Ф.Ф. Теплообмен / Ф.Ф. Цветков, В.А. Григорьев. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 550 с.
14. Дёч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования / Г. Дёч. – М.: Физматгиз, 1971. – 288 с.
15. Беляев, Н.М. Методы теории теплопроводности. В 2-х ч. Ч. 1 / Н.М. Беляев, А.А. Рядно. – М.: Высш. шк., 1982. – 327 с.

Виктор Иванович Ряжских, доктор технических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), ryazhskih@scientist.com.

Андрей Александрович Богер, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Математика», Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж, Российская Федерация), a-boger@yandex.ru.

Александр Викторович Ряжских, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Высшая математика и физико-математическое моделирование», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), ryazhskihav@bk.ru.

*Поступила в редакцию 18 сентября 2014 г.*

MSC 35K60

DOI: 10.14529/mmp140405

## A Linear Model of the Motion of a Low-Concentration Suspension of Monodisperse Stokes Particles in a Flat Channel

**V.I. Ryazhskih**, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, ryazhskih@scientist.com,

**A.A. Boger**, Military training and scientific center of the air force "Air force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin", Voronezh, Russian Federation, a-boger@yandex.ru,

**A.V. Ryazhskih** Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, ryazhskihav@bk.ru

In the framework of the convection-diffusion approach to the monodisperse low-concentration solid phase sedimentation in a suspension moving in a flat horizontal channel, we obtain a linear boundary value problem for a parabolic equation on the local concentration of particles. We impose boundary conditions of the third kind using the condition that the flux of particles on the wetted surface is proportional to their concentration at the wall. Integral transformations yield an analytical solution of the stated boundary value problem, which we use to find the relations to determine the thickness of sediment on the bottom and top walls of the channel. Simulations show that the kinetics of the solid phase settling from a flowing suspension, as well as the sediment formation rate and its distribution on the bottom and top walls of the flat channel, substantially depend on the degree of mixing of the dispersion medium and the absorption capacity of wet surfaces. We establish that for walls with low absorption capacity a decrease in the mixing intensity reduces the rate of particle sedimentation on the walls, but increases it in the case of high absorption capacity.

*Keywords: convection-diffusion equation; boundary value problem; Laplace transform; analytical solution; sediment thickness; sedimentation; degree of mixing; wall absorption capacity.*

## References

1. Einstein A. Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen. *Annalen der Physik*, 1906, vol. 19, pp. 289–306. DOI: 10.1002/andp.19063240204
2. Cunningham E. On the Velocity of Steady Fall of Spherical Particles Through Fluid Medium. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1910, vol. 83, pp. 357–365. DOI: 10.1098/rspa.1910.0024
3. Smoluchowski M. Über die Wechselwirkung von Kugeln, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen. *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie. Ser. 1A*, 1911, pp. 28–39.
4. Einstein H.A., Chien N. *Effects of Heavy Concentration Near the Bed on the Velocity and Sediment Distribution*. MRD Sediment Series 8, University of California, Berkeley, 1955.
5. Pokrovskiy V.P. *Statisticheskaya mehanika razbavlennoy suspenziy* [Statistical Mechanics of Dilute Suspensions]. Moscow, Nauka, 1978. 135 p.
6. Junke G., Pierre Y.J. Turbulent Velocity Profiles in Sediment-Laden Flows. *Journal of Hydraulic Research*, 2001, vol. 39, no. 1, pp. 11–23. DOI: 10.1080/00221680109499798

7. Venturu A.F., Garcia A.P., Ferreira P.J., Rasteiro M.G. Modelling the Turbulent Flow of Pulp Suspensions. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2011, vol. 50, issue 16, pp. 9735–9742. DOI: 10.1021/ie101500h
8. Shanliang Z., Jianzhong L., Weifeng Z. Numerical Research on the Fiber Suspensions in a Turbulent T-Shaped Branching Channel Flow. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 2007, vol. 15, no. 1, pp. 30–38. DOI: 10.1016/S1004-9541(07)60030-5
9. Gus'kov S.B. [Self-consistent Field Method is Applied to the Dynamics of Viscous Suspensions]. *Prikladnaja Matematika i Mehanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2013, vol. 77, no. 4, pp. 557–572. (in Russian).
10. Nigmatulin R.N. *Osnovy mehaniki geterogennyh sred* [Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Media]. Moscow, Nauka, 1978. 336 p.
11. D.A. Baranov, A.V. Vjaz'min, A.A. Tuhman *Processy i apparaty himicheskoy tehnologii. Javleniya perenosa, makrokinetika, podobie, modelirovanie, proektirovanie. T. 1. Osnovy teorii processov himicheskoy tehnologii* [Processes and Devices of Chemical Technology. Transport Phenomena, Macrokinetics, Likeness, Modelling, Design. Fundamentals of the Theory of Chemical Technology Processes]. Moscow, Logos, 2000. 480 p.
12. Harin V.M., Ryazhskih V.I. [On the Theory of Deposition]. *Teoreticheskie osnovy himicheskoy tehnologii* [Theoretical Foundations of Chemical Engineering], 1989, vol. 23, no. 5, pp. 651–658. (in Russian)
13. Cvetkov F.F., Grigor'ev B.A. *Teplomassoobmen* [Heat and Mass Transfer]. Moscow, Izd-vo MJeI, 2005. 550 p.
14. Dötsch G. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der z-transformation, dritte Auflage*. Wien, 1967.
15. Belyaev N.M., Ryadno A.A. *Metody teorii teploprovodnosti* [Methods of the Teory of Heat Conduction. Ch. 1]. Moscow, Vysshaya shkola, 1982. 327 p.

*Received September 18, 2014*