УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp140213

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С (A,p)-ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

О.Н. Цыпленкова

В работе исследована задача оптимального управления для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка. Доказана теорема существования и единственности сильного решения задачи Коши для данного уравнения. Получены достаточные условия существования и единственности оптимального управления такими решениями. В работе используются идеи и методы, разработанные Г.А. Свиридюком и его учениками. Доказательство теоремы о существовании и единственности оптимального управления для исследуемой задачи опирается на теорию оптимального управления, развитую в работах Ж.-Л. Лионса.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, сильные решения, оптимальное управление.

Введение

Рассмотрим неполное уравнение соболевского типа высокого порядка

$$Ax^{(n)} = Bx + y + Cu, \tag{1}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, функции $u : [0,\tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0,\tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{Y}\,(\tau < \infty)$, $\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства.

Рассмотрим задачу Коши

$$x^{(m)}(0) = x_m, \quad m = 0,\dots n-1. \tag{2}$$

Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании пары $(\hat{x},\hat{u})$, где $\hat{x}$ – решение задачи (1), (2), а $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$ – управление, для которого выполняется соотношение

$$J(\hat{x},\hat{u}) = \min_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(x,u). \tag{3}$$

Здесь $J(x,u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества, $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики (см. обстоятельные обзоры в [1, 2]). Оптимальное управление линейными уравнениями первого порядка с условиями Коши впервые изучалось в [3, гл. 7]. В работе [4] предложен численный алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа первого порядка. Оптимальное управление для полулинейных уравнений соболевского типа первого порядка рассматривалось в работе [5]. Данная работа основана на идеях и методах [4, 6].

1. Относительно p-ограниченные операторы

Определение 1. *Множество*

$$\rho^A(B) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu A - B)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$$

называется резольвентным множеством оператора B относительно оператора A (короче, A-резольвентным множеством оператора B). Множество $\mathbb{C} \backslash \rho^A(B) = \sigma^A(B)$ называется спектром оператора B относительно оператора A (короче, A-спектром оператора B).

Определение 2. *Оператор-функции*

$$(\mu A - B)^{-1}, \quad R^A_\mu = (\mu A - B)^{-1} A, \quad L^A_\mu = A(\mu A - B)^{-1}$$

с областью определения $\rho^A(B)$ называются соответственно резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой оператора B относительно оператора A (короче, A-резольвентой, правой A-резольвентой, левой A-резольвентой оператора B).

Определение 3. *Оператор B называется спектрально ограниченным относительно оператора A (короче, (A, σ)-ограниченным), если*

$$\exists a > 0 \ \forall \mu \in \mathbb{C} : (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^A(B)).$$

Лемма 1. [1] *Пусть оператор B (A, σ)-ограничен. Тогда операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma R^A_\lambda(B) d\lambda \ \text{и} \ Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma L^A_\lambda(B) d\lambda$$

являются проекторами, причем $P : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ и $Q : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}$. Здесь $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$.

Положим $\mathfrak{X}^0 = \ker P$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{X}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{Y}^1 = \operatorname{im} Q$. Обозначим через $A_k (B_k)$ сужение оператора A (B) на подпространство $\mathfrak{X}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1. [1] *Пусть оператор B (A, σ)-ограничен. Тогда*
(i) операторы $A_k, B_k : \mathfrak{X}^k \to \mathfrak{Y}^k, k = 0, 1$;
(ii) существует оператор $B_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0, \mathfrak{X}^0)$;
(iii) существует оператор $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1, \mathfrak{X}^1)$;
(iv) оператор $B_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1, \mathfrak{Y}^1)$.

В условиях теоремы 1 построим операторы $H = B_0^{-1} A_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$ и $S = A_1^{-1} B_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1)$. Тогда

$$(\mu A - B)^{-1} = \left(-\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k \right) B_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} A_1^{-1} Q. \tag{4}$$

Определение 4. *Бесконечно удаленная точка A-резольвенты оператора B называется*
(i) устранимой особой точкой, если $H \equiv \mathbb{O}$;
(ii) полюсом порядка p, если $H^p \neq \mathbb{O}, H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$, $p \in \mathbb{N}$;
(iii) существенно особой точкой, если $H^q \neq \mathbb{O}$, $\forall q \in \mathbb{N}$.

Определение 5. *(A, σ)-ограниченный оператор B, будем называть (A, p)-ограниченным, если точка ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его A-резольвенты.*

2. Сильные решения

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение соболевского типа

$$Ax^{(n)} = Bx + y. \tag{5}$$

Определение 6. *Оператор-функцию $V^{\bullet} \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{X}))$ будем называть пропагатором однородного уравнения (5), если для любого $v \in \mathfrak{X}$ вектор-функция $x(t) = V^t v$ будет решением этого уравнения.*

Теорема 2. [7] *Пусть оператор B (A, σ)-ограничен. Тогда формулы*

$$X_m^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \mu^{n-m-1} (\mu^n A - B)^{-1} A e^{\mu t} d\mu,$$

где контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R > a\}$, определяют пропагаторы уравнения (5) при всех $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. *(i) $X_m^{\bullet} \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{X}^1))$, $\left(X_m^t\right)_t^{(l)} = X_{m-l}^t$, где $m = 0, 1, \dots, n-1$, $l = 0, 1, \dots, m$;*
(ii) $\left.\left(X_m^t\right)_t^{(l)}\right|_{t=0} = \mathbb{O}$ при $m \neq l$, $\left.\left(X_m^t\right)_t^{(m)}\right|_{t=0} = X_0^0 = P$.

Рассмотрим задачу Коши (2) для однородного уравнения (5).

Определение 7. *Подпространство $\mathcal{P} \subset \mathfrak{X}$ называется фазовым пространством однородного уравнения (5), если*
(i) любое решение $x = x(t)$ уравнения (5) лежит в $\mathcal{P}$, т.е. $x(t) \in \mathcal{P} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
(ii) при любых $x_m, m = 0, ..., n-1 \in \mathcal{P}$ существует единственное решение задачи (2), (5).

Теорема 3. [7] *Пусть оператор $B(A, p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Пусть вектор-функция $y : (-\tau, \tau) \to \mathfrak{Y}$ такова, что $y^0 \in C^{n(p+1)}((-\tau, \tau); \mathfrak{Y}^0)$, и $y^1 \in C((-\tau, \tau); \mathfrak{Y}^1)$. Пусть начальные значения удовлетворяют соотношениям*

$$(I - X_0^0) x_m = -\sum_{q=0}^{p} H^q B_0^{-1} \frac{d^{nq+m}}{dt^{nq+m}} y^0(0), \quad m = 0, 1, ..., n-1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (2),(5), которое можно представить в виде

$$x(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q B_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) y^{(qn)}(t) + \sum_{m=0}^{n-1} V_m^t x_m^1 + \int\limits_0^t V_{n-1}^{t-s} A_1^{-1} Q y(s) ds, t \in (-\tau, \tau). \tag{6}$$

Определение 8. *Вектор-функцию $x \in H^n(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X}) : \ x^{(n)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X})\}$ назовем сильным решением уравнения (5), если она п. в. на $(0, \tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (5) назовем сильным решением задачи (2),(5), если оно удовлетворяет (2).*

В силу непрерывности вложения $H^n(\mathfrak{X}) \hookrightarrow C^{n-1}([0, \tau]; \mathfrak{X})$ наше определение корректно. Термин «сильное решение» введен для того, чтобы отличать решение уравнения (5) в данном смысле от решения (6), которое обычно называют «классическим». Заметим, что классическое решение (6) является также и сильным решением задачи (2), (5).

Построим пространства $H^{np+n}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}) : v^{(np+n)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. Пространство $H^{np+n}(\mathfrak{Y})$ – гильбертово со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{np+n} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

Пусть $y \in H^{np+n}(\mathfrak{Y})$. Введем в рассмотрение операторы

$$A_1 y(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q B_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) y^{(qn)}(t),$$
$$A_2 y(t) = \int_0^t V_{n-1}^{t-s} A_1^{-1} Q y(s) ds$$

и функцию

$$k(t) = \sum_{m=0}^{n-1} V_m^t x_m^1.$$

Лемма 3. *Пусть оператор B (A,p)-ограничен. Тогда*
(i) $A_1 \in \mathcal{L}(H^{np+n}(\mathfrak{Y}); H^n(\mathfrak{X}))$;
(ii) при любом $x_m \in \mathfrak{X}$ вектор-функция $k \in C^n([0,\tau);\mathfrak{X})$;
(iii) $A_2 \in \mathcal{L}(H^{np+n}(\mathfrak{Y}); H^n(\mathfrak{X}))$.

Теорема 4. *Пусть оператор B (A,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $x_m \in \mathfrak{X}, k = 0, n-1$ и $y \in H^{np+n}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (2) для уравнения (5).*

Доказательство. Подстановка классического решения (6) в уравнение (5) обеспечивает существования сильного решения. Покажем единственность решения задачи (2), (5). Пусть оператор B (A,p)-ограничен, тогда в силу леммы 3 задача (2), (5) распадается на две независимые задачи

$$H(x^0)^{(n)} = x^0 + B_0^{-1} y^0, \quad (x^0)^{(m)}(0) = x_m^0,\ m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{7}$$

$$(x^1)^{(n)} = Su^1 + A_1^{-1} y^1, \quad (x^1)^{(m)}(0) = x_m^1,\ m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{8}$$

где операторы $H = B_0^{-1} A_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$, $S = A_1^{-1} B_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1)$; вектор-функции $x^0 = (I-P)x$, $y^0 = (I-Q)y$, $x^1 = Px$, $y^1 = Qy$; векторы $x_m^k \in \mathfrak{X}^k$, $\quad k = 0,1, m = 0,...,n-1$. Пусть x и $\tilde{x}$ – два решения задачи (7)–(8). Тогда $\hat{x} = x - \tilde{x}$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} A\hat{x}^{(n)} &= B\hat{x}, \\ \hat{x}^{(m)}(0) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Действуя на уравнение (9) последовательно проекторами $\mathbb{I} - Q$ и Q и пользуясь леммой 1, сведем его к эквивалентной системе из двух независимых уравнений

$$H(\hat{x}^0)^{(n)} = \hat{x}^0, \tag{10}$$

$$(\hat{x}^1)^{(n)} = S\hat{x}^1, \quad (\hat{x})^{(m)}(0) = 0. \tag{11}$$

В силу нильпотентности оператора H из уравнения (10) получаем $H^{p+1}(\hat{x}^0)^{(np+n)} = \ldots = H(\hat{x}^0)^{(n)} = \hat{x}^0 = 0$. Продолжая этот процесс, убеждаемся, что $\hat{x}^0 = 0$. Равенство нулю решения задачи (11) следует из ограниченности оператора S. $\square$

3. Оптимальное управление

Рассмотрим задачу Коши (2) для линейного неоднородного уравнения соболевского типа (1), где функции x, y, u лежат в гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ соответственно. Операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, оператор B $(A,p)-$ограничен.

Введем в рассмотрение пространство управлений

$$H^{np+n}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : u^{(np+n)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Пространство $H^{np+n}(\mathfrak{U})$ гильбертово, в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$, со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{np+n} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt.$$

Выделим в пространстве $H^{np+n}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_{ad} = H_\partial^{np+n}(\mathfrak{U})$ – *множество допустимых управлений.*

Определение 9. *Вектор-функцию $\hat{u} \in H_\partial^{np+n}(\mathfrak{U})$ назовем оптимальным управлением решениями задачи (1), (2), если выполнено соотношение (3).*

Целью данной работы является доказательство существования единственного управления $\hat{u} \in H_\partial^{np+n}(\mathfrak{U})$, минимизирующего функционал качества

$$J(x,u) = \mu \sum_{q=0}^{n} \int_0^\tau ||x^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}||^2 dt + \nu \sum_{q=0}^{np+n} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt. \tag{12}$$

Здесь $\mu, \nu > 0$, $\mu + \nu = 1$, $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, np+n$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $\tilde{x}(t)$ – плановое состояние системы.

Теорема 5. *Пусть оператор B (A,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $x_m \in \mathfrak{X}$ и $y \in H^{np+n}(\mathfrak{Y})$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (2) для уравнения (1).*

Доказательство. По теореме 4 при любых $y \in H^{np+n}(\mathfrak{Y})$, $x_m \in \mathfrak{X}$, $u \in H^{np+n}(\mathfrak{U})$ существует единственное сильное решение $x \in H^n(\mathfrak{X})$ задачи (1), (2), имеющее вид

$$x(t) = (A_1 + A_2)(y + Cu)(t) + k(t), \tag{13}$$

где операторы A_1, A_2 и вектор-функция k заданы в лемме 3.

Зафиксируем $y \in H^{np+n}(\mathfrak{Y})$, $x_m \in \mathfrak{X}$, и рассмотрим (13) как отображение $D : u \to x(u)$. Тогда отображение $D : H^{np+n}(\mathfrak{U}) \to H^n(\mathfrak{X})$ непрерывно. Поэтому функционал качества зависит только от u, т.е. $J(x,u) = J(u)$.

Перепишем функционал качества (12) в виде

$$J(u) = \mu \left\| x(t,u) - \tilde{x} \right\|^2_{H^n(\mathfrak{X})} + \nu[v,u],$$

где $v^{(q)}(t) = N_q u^{(q)}(t),\ q = 0, \ldots, np+n$. Отсюда

$$J(u) = \pi(u,u) - 2\lambda(u) + \left\| \tilde{x} - x(t,0) \right\|^2_{H^n(\mathfrak{X})},$$

где

$$\pi(u,u) = \mu \left\| x(t,u) - x(t,0) \right\|^2_{H^n(\mathfrak{X})} + \nu[v,u] \quad -$$

билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $H^{np+n}(\mathfrak{U})$, а

$$\lambda(u) = \mu \left\langle \tilde{x} - x(t,0), x(t,u) - x(t,0) \right\rangle_{H^n(\mathfrak{X})} \quad -$$

линейная непрерывная на $H^{np+n}(\mathfrak{U})$ форма. Значит, условия теоремы [8, гл. 1] выполнены. $\square$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность доценту А.А. Замышляевой за постановку задачи и поддержку в работе.

Литература

1. Demidenko, G.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 632 p.

2. Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшанский, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.

3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 179 p.

4. Келлер, А.В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 345–346.

5. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.

6. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка: моногр. / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

7. Замышляева, А.А. О численном исследовании математической модели распространения волн на мелкой воде / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 1. – С. 27–34.

8. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 416 с.

Ольга Николаевна Цыпленкова, старший преподаватель, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), Tsyplenkova_Olga@mail.ru.

Поступила в редакцию 24 декабря 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 2, pp. 129–135.

MSC 35A01 **DOI: 10.14529/mmp140213**

Optimal Control in Higher-Order Sobolev-Type Mathematical Models with (A, p)-Bounded Operators

O.N. Tsyplenkova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, Tsyplenkova_Olga@mail.ru

This article deals with the optimal control problem for an incomplete Sobolev-type equation of high order. We prove an existence and uniqueness theorem for strong solutions to the initial value problem for a given equation. We obtain sufficient and necessary conditions for the existence and uniqueness of optimal control of these solutions. We use the ideas and methods developed by G.A. Sviridyuk and his school. The proof of the existence and uniqueness of optimal control rests on the theory of optimal control developed by J.-L. Lions.

Keywords: Sobolev-type equations; strong solutions; optimal control.

References

1. Demidenko G.V. Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* N.Y.; Basel; Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003.
2. Al'shin A. B, Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in Nonlinear Sobolev-type Equations.* Berlin; N.-Y., Walter de Gruyter, 2011. DOI: 10.1515/9783110255294
3. Sviridyuk G.A. Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate SemiGroups of Operators.* Utrecht; Boston; Köln; Tokyo, VSP, 2003. DOI: 10.1515/9783110915501
4. Keller A.V. [Numerical Solution of the Start Control for a System of Equation of Leontief Type]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki,* 2009, vol. 16, issue 2, pp. 345–346.
5. Manakova N.A. Optimal Control Problem for the Oskolkov Nonlinear Filtration Equation. *Differential Equations,* 2007, vol. 43, no. 9, pp. 1213–1221. DOI: 10.1134/S0012266107090042
6. Zamyshlyaeva, A.A. *Lineynye uravneniya sobolevskogo tipa vysokogo poryadka* [Linear Sobolev Type Equations of High Order]. Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012.
7. Zamyshlyaeva, A.A. Bychkov, E.V. [On Numerical Investigation of Mathematical Model of Waves in Shallow Water].*Matematicheskie zametki YaGU,* 2013, vol. 20, no. 1, pp. 27–34.
8. Lions J.-L. *Contrôle optimal de systémes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris, 1968.

Received December 24, 2013