

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГРАДИЕНТОВ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СОСТОЯНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

Л.А. Прокудина

В условиях межфазной неустойчивости в пленочных аппаратах протекают различные тепло-массообменные процессы (конденсация, испарение и др.). Исследуется межфазная неустойчивость, связанная с эффектом Марангони, стекающей под действием силы тяжести жидкой пленки при умеренных числах Рейнольдса. В рамках математической модели волнового течения неизоэнтальпической жидкой пленки, а именно, системы уравнений Навье – Стокса и уравнения неразрывности с граничными условиями, учитывающими процессы тепло и-массообмена, выведено уравнение ее свободной поверхности, коэффициенты которого учитывают градиенты температуры. Градиенты температуры вызывают неоднородность поверхностного натяжения, что приводит к возникновению на межфазной поверхности термокапиллярных сил. Модельное уравнение состояния свободной поверхности жидкой пленки – нелинейное дифференциальное в частных производных четвертого порядка решалось методом конечных разностей. Результаты вычислительных экспериментов по влиянию градиентов температуры на нелинейное развитие возмущений на свободной поверхности жидкой пленки показали направленность эффекта Марангони как на усиление возмущений и возможность разрыва пленки, так и на гашение возмущений. В условиях возрастания скорости роста возмущений жидкие пленки с небольшими числами Рейнольдса наиболее устойчивы к воздействию градиентов температуры и выдерживают большие их значения.

Ключевые слова: жидкая пленка; градиенты температуры; межфазная неустойчивость; неустойчивость Марангони.

Введение

Исследование тонких слоев вязких жидкостей (жидких пленок), сочетающих малую толщину и большую поверхность контакта, связано с реализацией их течений в теплообменных аппаратах, например, теплоэнергетической, химической промышленности [1]. Течение жидких пленок имеет свои особенности, обусловленные наличием двух поверхностей раздела: твердая поверхность – жидкая пленка и жидкая пленка – газ. В настоящее время широкое применение получили контактные устройства тепло-массообменного высокоэффективного оборудования. Одним из таких контактных устройств, реализуемых в теплообменных аппаратах, является жидкая пленка, контактирующая с газовым (или парогазовым) потоком. Аппараты с подобным контактным устройством называются пленочными и применяются для проведения различных теплофизических и химико-технологических процессов. Различные тепло-массообменные процессы протекают в условиях межфазной неустойчивости поверхности раздела фаз, вызванной разнообразными эффектами, факторами. Особое внимание исследователей привлекает межфазная неустойчивость, связанная с эффектом Марангони [2], в таких химико-технологических процессах, как испарение, экстракция, абсорбция и др. Эффект Марангони связан с изменением поверхностного натяжения от точки к точке на межфазной поверхности. Поверхностное натяжение является функцией, в частности, зависящей от температуры и концентрации вещества. Градиенты температуры и концентрации вызывают неоднородность поверхностного натяжения и появление градиентов, что приводит к возникновению на межфазной поверхности термокапиллярных сил

(или концентрационнокапиллярных). Возникающая неустойчивость Марангони проявляется в изменении волновых характеристик: частоты, инкремента, фазовой скорости [2] и формирования в приповерхностных слоях диссипативных структур [3, 4]. Неустойчивость Марангони в зависимости от знака градиента межфазного натяжения определяет направленность эффекта Марангони на усиление возмущений или их гашение.

1. Математическая модель течения жидкой пленки

Рассмотрим течение тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости (жидкой пленки) толщиной δ под действием силы тяжести по твердой наклонной плоскости в системе координат ОХУ, ось ОХ направлена по течению пленки, ось ОУ – по нормали в пленку жидкости. Условия на поверхности раздела фаз жидкой пленки учитывают силы поверхностной вязкости, неоднородность поверхностного натяжения, вызванную градиентами температуры и концентрации вещества, и теплообмен на поверхности раздела газ-жидкость. Математическая модель течения неизотермической жидкой пленки представляет собой систему уравнений Навье – Стокса и уравнения неразрывности с соответствующими граничными условиями [2], которая для случая двухмерного течения жидкой пленки запишется в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\varepsilon \frac{\partial P}{\partial x} + F_x + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right); \\ \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^2 u \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon^2 v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + F_y + \frac{1}{Re} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$y = 0 : u = 0, v = V_0 \quad (2)$$

$$y = \delta : \frac{1}{Re} \left[2\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial x} - 2\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta}{\partial x} - \left(\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \varepsilon M \frac{\partial \delta}{\partial x} + \varepsilon \bar{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_x = 0; \quad (3)$$

$$P = \frac{2}{Re} \left[\varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \varepsilon \frac{\partial \delta}{\partial x} \right] - \bar{\sigma} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + P_0 - \text{sign} \Delta T \frac{\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}{(Re * Pr * Ku)^2} \frac{1}{\delta^2}. \quad (4)$$

Условие на свободной поверхности пленки при фазовых превращениях

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = v - u \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{1}{Re * Pr * Ku} \frac{1}{\delta}. \quad (5)$$

Безразмерные величины и параметры в (1) – (5): u, v – проекции скорости на оси координат; t – время; Re – число Рейнольдса; F_x, F_y – проекции числа Фруда; σ – параметр поверхностного натяжения; τ_x – постоянное касательное напряжение; M – параметр Марангони; \bar{N} – параметр поверхностной вязкости; Pr – число Прандтля; Ku – число фазового перехода. Для решения поставленной задачи (1) – (4) проведем растяжение осей x и t [5]. Учитывая, что толщина жидкой пленки много меньше длины волны λ , в уравнения системы (1) и граничные условия (2) – (4) введен малый параметр $\varepsilon = \frac{\delta}{\lambda}$ и $\bar{N} = \varepsilon N$, $\bar{\sigma} = \varepsilon^2 \sigma$. Из (1) – (4) определим проекции скорости u, v и давление P , разложив их в ряд по малому параметру ε :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots,$$

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots,$$

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots$$

Выделив члены при одинаковых степенях ε , получим системы уравнений для определения u, v, P в различных приближениях. Подставив в (5) проекции скорости u, v , найденные по

первым трем приближениям, и учитывая, что $\delta = 1 + \psi$, где $\psi(x, t)$ - отклонение свободной поверхности жидкой пленки от невозмущенного состояния, получим уравнение для ее свободной поверхности в тепломассообменных процессах конденсации и испарения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} = & b_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + b_4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \\ & + b_5 \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_6 \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_7 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + b_8 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_9 \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты уравнения (6) имеют вид:

$$\begin{aligned} b_1 = & -ReF_x - Re\tau_x; \quad b_2 = -\frac{ReF_y}{3} - \frac{ReM}{2} + \frac{3}{40} Re^3 F_x (\tau_x + F_x) + \frac{2}{3} Re * \text{sign} \Delta T \frac{1}{(Re * Pr * Ku)^2}; \\ b_3 = & -\frac{Re^2 F_x N}{2}; \quad b_4 = -\frac{Re\sigma}{3}; \quad b_5 = -2ReF_x - Re\tau_x; \quad b_6 = -ReF_y - ReM + \frac{3}{8} Re^3 F_x \tau_x + \frac{9}{20} Re^3 F_x^2; \\ b_7 = & b_6; \quad b_8 = -\frac{1}{2} Re^2 F_x N; \quad b_9 = -2ReF_y - ReM + \frac{3}{2} Re^3 F_x \tau_x + \frac{9}{4} Re^3 F_x^2; \quad F_x = \frac{3}{Re} - \frac{3}{2} \tau_x. \end{aligned}$$

Уравнение (6) является нестационарной математической моделью состояния свободной поверхности неизотермической жидкой пленки, в рамках которой возможно моделирование эволюции двухмерных возмущений на ее поверхности.

2. Вычислительные эксперименты

Для моделирования влияния градиентов температуры на эволюцию возмущений осуществим переход от (6) к уравнению в конечных разностях и выразим положение поверхности раздела (6) в момент времени t_{j+1} через положение поверхности раздела в предыдущий момент времени t_j следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_{i,j+1} = & \psi_{i,j} + \Delta t \left(b_1 \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} + b_2 \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \right. \\ & + b_3 \frac{\psi_{i+2,j} - 2\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i-1,j} - \psi_{i-2,j}}{4(\Delta x)^3} + b_4 \frac{\psi_{i+2,j} - 4\psi_{i+1,j} + 6\psi_{i-1,j} + \psi_{i-2,j}}{\Delta x^4} + \\ & + b_5 \psi \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} + b_6 \psi \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + b_7 \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)^2 + \\ & \left. + b_8 \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + b_9 \psi \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где индекс i указывает шаг по пространственной координате, а индекс j - по времени. Численно исследовано развитие возмущений, вызванных градиентами температуры, при течении вертикальной жидкой пленки воды для чисел Рейнольдса $Re \leq 15$. Поверхностное натяжение связано с числом Рейнольдса зависимостью $\sigma = 4887 Re^{-5/3}$. Проекция числа Фруда на соответствующие оси координат равны $F_x = \frac{3}{Re} - \frac{3}{2} \tau_x$, $F_y = 0$.

2.1. Влияние отрицательных градиентов температуры

Отрицательные градиенты температуры возникают при течении жидкой пленки по нагретой поверхности. Течение сопровождается увеличением скорости роста возмущений и расширением области неустойчивости [2]. В этом случае параметр Марангони $M > 0$. Для

значения $Re = 7$ на рис. 1 показано, как при отрицательных градиентах температуры местное искривление свободной поверхности жидкой пленки ведет к «всплеску» ее поверхности раздела без нарушения целостности пленки.

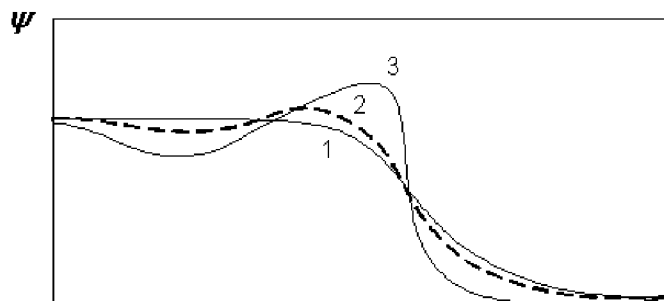


Рис. 1. Развитие возмущений на свободной поверхности пленки при $M = 1$: 1 – $t = 0$; 2 – $t = 2$; 3 – $t = 5$

Однако, при значительных отрицательных градиентах температуры термокапиллярные силы способны разрушить жидкую пленку, что может привести к местному перегреву охлаждаемой пленкой стенки и создать аварийную ситуацию при работе теплообменного аппарата. Процесс развития возмущения во времени на поверхности раздела, моделирующий разрушение пленки при значительных градиентах температуры (параметр $M > 0$), представлен на рис. 2.

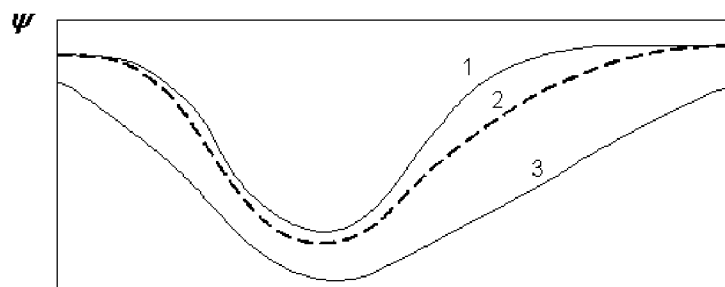


Рис. 2. Процесс разрушения жидкой пленки $Re = 10$, $M = 3$: 1 – $t = 0$; 2 – $t = 2$; 3 – $t = 5$

Можно отметить, что для представленного диапазона чисел Рейнольдса более медленно движущиеся пленки ($Re \leq 8$) выдерживают значительно большие градиенты температуры. Нерастворимые поверхностно-активные вещества (масла, жиры), обладающие демпфирующим эффектом, снижают интенсивность неустойчивости Марангони, что препятствует разрыву жидких пленок и обеспечивает безаварийный режим работы пленочных аппаратов.

2.2. Влияние положительных градиентов температуры

При реализации в жидкой пленке положительных градиентов температуры, например, при обдуве поверхности пленки высокотемпературным потоком газа (параметр $M < 0$), термокапиллярные силы стабилизируют ее течение, снижая интенсивность роста возмущений.

Для числа $R = 7$ в представленных вычислительных экспериментах величина максимальной скорости роста возмущений в три раза меньше соответствующего ее значения при значениях $M > 0$. Также происходит смещение величины значения волнового числа, соответствующего максимальной скорости роста возмущений, в сторону длинных волн, и практически в два раза сокращается область неустойчивости жидкой пленки. Обдув пленки высокотемпературным потоком газа (параметр $M = -1$) ведет к выравниванию профиля пленки в месте возмущения (см. рис. 3). Численное моделирование нелинейного развития во времени локальных возмущений на свободной поверхности жидкой пленки с учетом неоднородности ее поверхностного натяжения, поверхностной вязкости способствует изучению влияния этих факторов на развитие возмущений, а также разработке методик контроля и управления различными режимами течения жидких пленок.

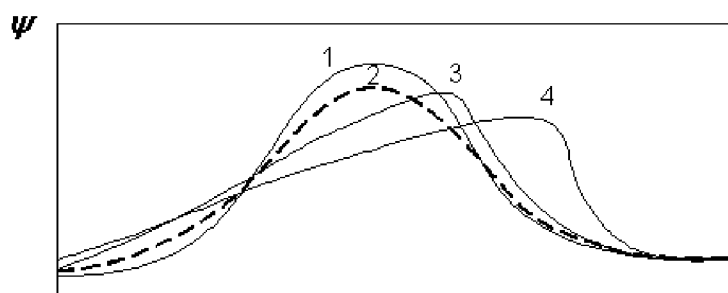


Рис. 3. Эволюция возмущений на свободной поверхности жидкой пленки при положительных градиентах температуры: 1 — $t = 0$; 2 — $t = 2$; 3 — $t = 5$; 4 — $t = 10$

Литература

1. Холпанов, Л.П. Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела / Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов. — М.: Наука, 1990. — 271 с.
2. Прокудина, Л.А. Неустойчивость неизотермической жидкой пленки / Л.А. Прокудина, Г.П. Вяткин // Доклады АН. — 1998. — Т. 362, №6. — С. 770–772.
3. Linde, H. Dissipative Structures and Nonlinear Kinetics of Marangoni-Instability / H. Linde, P. Schwarz, H. Wilke // Lecture Notes in Physics. — 1979. — №105. — P. 75–120.
4. Schwarz, P. Origin and Behaviour of a Dissipative Structure of Marangoni Instability / P. Schwarz, J. Bielcki, H. Linde // Z. Phys. Chem. — 1985. — V. 266. — P. 731–739.
5. Иванилов, Ю.П. Катящиеся волны в наклонном канале / Ю.П. Иванилов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1961. — Т. 1, №6. — С. 1061–1076.

Людмила Александровна Прокудина, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), prokudina-la@mail.ru.

Поступила в редакцию 15 декабря 2013 г.

MSC 76T10, 76E17

DOI: 10.14529/mmp140211

Modelling the Influence of Temperature Gradients on the State of a Free Liquid Surface

L.A. Prokudina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, prokudina-la@mail.ru

Various heat and mass exchange processes (condensation, evaporation, and others) in film devices occur in the conditions of interfacial instability. We study the interfacial instability, associated with the Marangoni effect, of a liquid film flowing due to gravity at moderate Reynolds numbers. We derive an equation for its free surface in the framework of a mathematical model of the wave flow of a non-isothermal liquid film, namely, the system of Navier – Stokes and continuity equations with boundary conditions accounting for heat and mass transfer. The coefficients in the equation depend on the temperature gradients, which causes variations in the surface tension creating thermocapillary forces on the interphase surface. The model equation of state for the free surface of a liquid film is a nonlinear fourth-order PDE, which we solve by the finite difference method. The results of computer simulations of the influence of temperature gradients on the nonlinear development of perturbations on the free surface of a liquid film showed that the Marangoni effect both strengthens perturbations and the possibility of rupture and suppresses perturbations. When the grow rate of perturbations increases, liquid films with small Reynolds numbers are the most resistant to temperature gradients.

Keywords: liquid film; temperature gradients; interfacial instability; Marangoni instability.

References

1. Kholpanov L.P., Chkadov V.Ya. *Gidrodinamika i teplomassoobmen s poverkhnost'yu razdela* [Hydrodynamics and Heat-Mass Exchange with the Surface of Section]. Moscow, Nauka, 1990. (in Russian)
2. Prokudina L.A., Vyatkin G.P. [Instability of non-Isothermal Liquid Films]. *Doklady Akademii Nauk*, 1998, vol. 362, no. 6, pp. 770–772. (in Russian)
3. Linde H., Schwarz P., Wilke H. Dissipative Structures and Nonlinear Kinetics of Marangoni-Instability. *Lecture Notes in Physics*, 1979, no. 105, pp. 75–120.
4. Schwarz P., Bielcki J., Linde H. Origin and Behaviour of a Dissipative Structure of Marangoni Instability. *Z. Phys. Chem.*, 1985, vol. 266, pp. 731–739.
5. Ivanilov U.P. [Rolling Waves in an Inclined Channel]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1961, vol. 1, no. 6, pp. 1061–1076. (in Russian)

Received December 15, 2013