УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp140210

ОБ ОДНОЙ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Е.В. Бычков

В статье исследуется полулинейная математическая модель соболевского типа высокого порядка с относительно спектрально ограниченным оператором. Данная математическая модель строится на основе уравнения соболевского типа высокого порядка и условий Коши. В работе используются метод фазового пространства и теория относительно p-ограниченных операторов, разработанные Г.А. Свиридюком. При исследовании невырожденной математической модели используется подход, предложенный С. Ленгом; в статье он обобщается на дифференциальные уравнения высокого порядка. В работе рассмотрено два случая. В первом, когда оператор при старшей производной по времени является непрерывно обратимым, используются методы теории дифференцируемых банаховых многообразий и доказывается однозначная разрешимость задачи Коши. Во втором случае, когда оператор при старшей производной по времени имеет нетривиальное ядро. Как известно, задача Коши для уравнений соболевского типа принципиально не разрешима при произвольных начальных данных. В связи с этим возникает задача построения фазового пространства уравнения как множества допустимых начальных значений, содержащего решения уравнения, и изучения его морфологии. В данной работе для вырожденного уравнения строится локальное фазовое пространство.

Ключевые слова: фазовое пространство; уравнение соболевского типа; относительно спектрально ограниченный оператор; банахово многообразие; касательное расслоение.

Введение

Полулинейные математические модели соболевского типа, часто возникающие в приложениях, представимы в виде

$$u^{(n)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1}$$

$$Lu^{(n)} = Mu + N(u), \tag{2}$$

где операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}), N \in C^{\infty}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства.

Данная статья является продолжением работы [1], в которой рассмотрен случай $n = 2$.

В зависимости от вида оператора L уравнение может быть как регулярным, так и сингулярным, второй случай более интересен для нас. Он возникает, в частности, когда ядро оператора L нетривиально. Такие уравнения принято называть уравнениями соболевского типа. Математические модели на их основе будем называть математическими моделями соболевского типа.

Как известно, задача Коши для уравнения соболевского типа не разрешима при произвольных начальных данных. На наш взгляд, наиболее плодотворным (если считать уже имеющиеся приложения) подходом к изучению таких уравнений является метод фазового пространства, основы которого были заложены Г.А. Свиридюком и Т.Г. Сукачевой [2] при изучении полулинейного уравнения соболевского типа первого порядка. Суть этого метода заключается в редукции сингулярного уравнения (2) к регулярному, определенному, однако, не на всем пространстве, а на некотором его подмножестве, содержащем допустимые начальные значения, понимаемом как фазовое пространство исходного уравнения.

Нашей целью является распространение идей данного метода на случай полулинейного уравнения соболевского типа высокого порядка. При исследовании мы существенно опираемся на теорию неполных линейных уравнений соболевского типа высокого порядка с (L,p)-ограниченным оператором M [3]. Теория относительно ограниченных операторов нашла свое продолжение в теории относительно радиальных операторов в применении к разрешимости полулинейных уравнений соболевского типа [4]. Кроме того, данная теория применяется к исследованию задач оптимального управления [5]. В статье мы также опираемся на теорию дифференцируемых многообразий [6].

1. (L,p)-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Определение 1. *Множество*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$$

называется L-резольвентным множеством оператора M. Множество $\mathbb{C}\backslash\rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется L-спектром оператора M.

Определение 2. *Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu = (\mu L - M)^{-1}L, L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются, соответственно, резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой оператора M относительно оператора L (короче, L-резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой оператора M).*

Определение 3. *Оператор M называется (L,σ)-ограниченным, если*

$$\exists a > 0 \ \forall \mu \in \mathbb{C} : (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Лемма 1. [2] *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\lambda(M)d\lambda \text{ и } Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\lambda(M)d\lambda$$

являются проекторами в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно. Здесь $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$. Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора L (M) на подпространство $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1. [2] *Пусть оператор M (L,σ) -ограничен. Тогда*
(i) операторы $L_k, M_k \in \mathcal{L}(U^k;\mathfrak{F}^k), k = 0, 1$;
(ii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$;
(iii) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;

В условиях теоремы 1 построим операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Определение 4. *Точка ∞ называется устранимой особой точкой, полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$, существенно особой точкой L-резольвенты оператора M, если $H \equiv \mathbb{O}; H^p \neq \mathbb{O}, H^{p+1} \equiv \mathbb{O}; H^q \neq \mathbb{O}$ при всех $q \in \mathbb{N}$, соответственно.*

Замечание 1. В дальнейшем устранимую особую точку будем называть *полюсом порядка нуль* L-резольвенты оператора M. (L, σ)-ограниченный оператор M будем называть (L, p)-ограниченным, если точка ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его L-резольвенты.

2. Дифференцируемые банаховы многообразия

Пусть $\mathfrak{M}$ — C^k-многообразие, моделируемое пространством $\mathfrak{U}$. Обозначим через $T\mathfrak{M}$ касательное расслоение многообразия $\mathfrak{M}$, а через $T^n\mathfrak{M}$ – касательное расслоение порядка n. Множество $T\mathfrak{M}$ имеет естественную структуру гладкого C^{k-1}-многообразия, моделируемого пространством $\mathfrak{U}$, в силу построения, а касательное расслоение $T^n\mathfrak{M}$ является многообразием класса C^{k-n}, сейчас и в дальнейшем предполагается $k > n$.

Обозначим через π^l — каноническое проектирование с касательного расслоения порядка l на касательное расслоение порядка $l-1$, причем $l = 1, 2, \dots, n$, π_*^l — проектирование с касательного расслоения порядка l на многообразие $\mathfrak{M}$, т.е. $\pi_*^l = \pi^1\pi^2 \dots \pi^l$.

Рассмотрим кривую $\alpha : J \to \mathfrak{M}$ класса C^s, $(s \leq k, J$ — некоторый интервал содержащий нуль). Поднятием кривой α в $T\mathfrak{M}$ называют кривую $\alpha^1 : J \to T\mathfrak{M}$, что $\pi^1\alpha^1 = \alpha$. Мы всегда предполагаем, что $s \geq n$, так что поднятие кривой принадлежит классу $s - 1 \geq 1$. Аналогично, поднятием порядка l кривой α в $T^l\mathfrak{M}$ назовем кривую $\alpha^l : J \to T^l\mathfrak{M}$, что $\pi_*^l\alpha^l = \alpha$, так что поднятие кривой порядка l принадлежит классу $s - l \geq 1$. На основе определения дифференциального уравнения второго порядка [6] введем

Определение 5. *Дифференциальным уравнением порядка n на многообразии $\mathfrak{M}$ назовем такое векторное поле ξ класса $C^{k-n}(k > n)$ на касательном расслоении $T^{n-1}\mathfrak{M}$, что для всех $v \in T^{n-1}\mathfrak{M}$ выполнено равенство*

$$\pi^n\xi(v) = v.$$

Из определения следует, что ξ точно тогда является дифференциальным уравнением порядка n, когда выполнено следующее условие: каждая интегральная кривая β для ξ является каноническим поднятием порядка $n-1$ кривой $\pi_*^{n-1}\beta$. Другими словами

$$(\pi_*^{n-1}\beta)^{n-1} = \beta.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ открытое множество в банаховом пространстве $\mathfrak{U}$. В этом случае у любого векторного поля на $T^{n-1}\mathfrak{M}$ главная часть

$$f : T^{n-1}\mathfrak{M} \to \mathfrak{U}^n$$

имеет n компонент $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ каждая из которых отображает $T^{n-1}\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{U}$.

Утверждение 1. [6] *Отображение f класса C^{k-n} точно тогда является главной частью дифференциального уравнения порядка n, когда*

$$f(g_1, g_2, \dots, g_n) = (g_2, g_3, \dots, g_n, f_n(g_1, g_2, \dots, g_n)).$$

Следуя [6], сформулируем и докажем

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ банахово C^k-многообразие $(k > n)$, ξ – дифференциальное уравнение порядка n класса C^{k-n}. Тогда для любой точки $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \in T^{n-1}\mathfrak{M}$ существует* *единственная кривая* $u \in C^l\big((-\tau,\tau);\mathfrak{M}\big)$, $\tau = \tau(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) > 0$, $l \geq n$, *лежащая в* $\mathfrak{M}$, *проходящая через точку* $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ *такая, что*

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= f_n(u, \dot u, \ddot u, \dots, u^{(n-1)}) \\ u^{(k)}(0) &= u_k, \quad k = 0, \dots n-1. \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Поскольку $T^{n-1}\mathfrak{M}$ — это C^{k-n+1}-многообразие, ξ — векторное поле класса C^l на $T^{n-1}\mathfrak{M}$, то для любой точки $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \in T^{n-1}\mathfrak{M}$, существует единственная интегральная кривая $\varphi(t), t \in (-\tau, \tau)$, проходящая через точку $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ $(\varphi(0) = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}))$. Представим кривую в виде n компонент и будем рассматривать ее локально

$$\varphi(t) = (u(t), u_1(t), \dots, u_{n-1}(t)) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{U}^{n-1}.$$

Согласно утверждению 1, если f — главная часть дифференциального уравнения ξ, то

$$\dot\varphi = (\dot u(t), \dot{u_1}(t), \dots, \dot{u_n}(t)) = f(u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n-1}(t)) =$$

$$= (u_2(t), \dots, u_{n-1}(t), f_n(u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n-1}(t))).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение можно переписать в более привычном виде

$$\begin{aligned} &\dot u(t) = u_1(t), \\ &\dot{u_1}(t) = u_2(t), \\ &\dots \\ &\dot u_{n-1}(t) = f_n(u(t), u_1(t), \dots, u_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Следовательно, $u^{(n)}(t) = f_n(u(t), u_1(t), \dots, u_{n-1}(t))$. Делая обратную подстановку, получим

$$u^{(n)} = f_n(u, \dot u, \ddot u, \dots, u^{(n-1)}).$$

Таким образом, кривая $(\pi_*\varphi)(t) = u(t), t \in (-\tau, \tau)$, лежит в $\mathfrak{M}$ и удовлетворяет (3). ▷

3. Математическая модель соболевского типа высокого порядка

Возвращаясь к задаче (1)–(2), введем определение решения

Определение 6. Вектор-функцию $u \in C^n((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2) при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$, назовем *решением этого уравнения,* а если решение удовлетворяет условию (1), то функцию u будем называть *решением задачи (1), (2).*

Определение 7. Множество $\mathfrak{P}$ назовем *фазовым пространством уравнения (2),* если
(i) для любых $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \in T^{n-1}\mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (1), (2);
(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория, т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при $t \in (-\tau, \tau)$.

Если $\ker L = \{0\}$, то уравнение (2) тривиально редуцируется к эквивалентному ему уравнению

$$u^{(n)} = F(u),$$

где оператор $F = L^{-1}(M + N) \in C^\infty(\mathfrak{U})$ по построению. Существование единственного решения u задачи (1), (2) при любых $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ следует из теоремы 2.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$ и оператор $M(L,0)$-ограничен, тогда в силу теоремы 1 уравнение (2) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{cases} 0 = (I-Q)(M+N)(u^0+u^1), \\ u^{1(n)} = L_1^{-1}Q(M+N)(u^0+u^1), \end{cases} \tag{4}$$

где $u^1 = Pu, u^0 = (I-P)u$.

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (I-Q)(Mu+N(u)) = 0\}$. Пусть $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, то есть существует точка $u_0 \in \mathfrak{U}$, положим ${u_0}^1 = Pu \in \mathfrak{U}^1$. Будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ в точке u_0 является банаховым C^k-многообразием, если существуют окрестности $\mathcal{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathcal{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек u_0 и u_0^1 соответственно и C^k-диффеоморфизм $\delta : \mathcal{O}^1 \to \mathcal{O}$ такой, что δ^{-1} равен сужению проектора P на $\mathcal{O}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется банаховым C^k-многообразием, моделируемым пространством $\mathfrak{U}^1$, если оно является банаховым C^k-многообразием в каждой своей точке.

Пусть выполнено условие:

$$(I-Q)(M+N'_{u_0}) : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0 - \text{топлинейный изоморфизм.} \tag{5}$$

Тогда в силу теоремы о неявной функции [7, стр. 155] существуют окрестности $\mathcal{O}^0 \subset \mathfrak{U}^0$ и $\mathcal{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек $u_0^0 = (I-P)u_0, u_0^1 = Pu_0$ соответственно, и оператор $B \in C^\infty(\mathcal{O}^1;\mathcal{O}^0)$ такой, что $u_0^0 = B\big(u_0^1\big)$. Построим оператор $\delta = I + B : \mathcal{O}^1 \to \mathfrak{M}$, $\delta\big(u_0^1\big) = u_0$. Тогда оператор δ^{-1} вместе со множеством $\mathcal{O}^1$ задает карту множества $\mathfrak{M}$ и равен сужению проектора P на $\delta[\mathcal{O}^1] = \mathcal{O} \subset \mathfrak{M}$. Таким образом, доказана

Лемма 2. *Множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (I-Q)(Mu+N(u)) = 0\}$ при выполнении (5) является C^∞ многообразием в точке u_0.*

Подействуем производной Фреше n-го порядка $\delta^{(n)}_{(u^1,u^2,\ldots,u^n)}$ на второе уравнение системы (4). Тогда, так как

$$\delta^{(n)}_{(u^1,u^2,\ldots,u^n)} u^{1(n)} = \frac{d^n}{dt^n}\big(\delta(u^1)\big) \text{ и } \delta(u^1) = u,$$

получим задачу вида (3), где $F(u) = \delta^{(n)}_{(u^1,u^2,\ldots,u^n)} L_1^{-1}Q(M+N)(u)$.

В силу теоремы 2 справедлива

Теорема 3. *Пусть оператор $M(L,0)$-ограничен, оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Тогда для любых начальных условий $(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in T^{n-1}\mathfrak{M}$ при выполнении условия (4), существует единственное локальное решение задачи (1)–(2), лежащее в $\mathfrak{M}$, как траектория.*

Литература

1. Замышляева, А.А. Фазовое пространство полулинейного уравнения Буссинеска / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков// Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 18 (277), вып. 12. – С. 13–19.

2. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева// Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.

3. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева// Дифференциальные уравнения. – 2006.– Т. 42, № 2. – С. 252–260.

4. Сагадеева, М.А. Существование и устойчивость решений полулинейных уравнений соболевского типа в относительно радиальном случае / М.А. Сагадеева// Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2013. – № 1. – С. 78–88.
5. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления с функционалом общего вида / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков// Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 4(25). – С. 18–24.
6. Ленг, С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг.– М.: Мир, 1967. – 203 с.
7. Ниренберг, Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг.– М.: Мир, 1980. –232 с.

Евгений Викторович Бычков, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (Россия, г. Челябинск), bychkov42@gmail.com.

Поступила в редакцию 26 февраля 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 2, pp. 111–117.

MSC 35A01 **DOI: 10.14529/mmp140210**

On a Semilinear Sobolev-Type Mathematical Model

E.V. Bychkov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, bychkov42@gmail.com

This article studies a semilinear Sobolev-type mathematical model whose operator is relatively spectrally bounded. The mathematical model consists of a semilinear Sobolev-type equation of high order and initial conditions. We apply the phase space method and the theory of relatively spectrally bounded operators developed by Sviridyuk. We use Leng's method for nondegenerate equations and extend it to higher-order equations. The two cases are considered in this article. In the first case the operator L at the highest time derivative is continuously invertible, and we prove the uniqueness of solutions to the initial value problem using the theory of Banach manifolds. In the second case L has nontrivial kernel and it is known that the initial value problem with arbitrary initial data has no solution. This raises the problem of constructing and studying the phase space for the equation as the set of admissible initial data containing solutions to the equation. We construct the local phase space for the degenerate equation.

Keywords: phase space; Sobolev-type equation; relatively spectrally bounded operator; Banach manifold; tangent bundle.

References

1. Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V. The Phase Space of Modified Boussinesq Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, no. 18 (277), issue 12, pp. 13–19. (in Russian)
2. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. [The Phase Space of a Class of Operator Equations of Sobolev Type]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 1990, vol. 26, no. 2, pp. 250–258. (in Russian)

3. Sviriduyk G.A., Zamyshlyaeva A.A. The Phase Space of a Class of Linear Higher-Order Sobolev Type Equations. *Differential Equation*, 2006, vol. 42, no 2, pp. 269–278. DOI: 10.1134/S0012266106020145
4. Sagadeeva M.A. A Existence and a Stability of Solutions for Semilinear Sobolev Type Equations in Relatively Radial Case. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, 2013, no. 1, pp. 78–88. (in Russian)
5. Manakova N.A., Dylkov A.G. On One Optimal Control Problem with a Penalty Functional in General Form. *The Journal of Samara State Technical University. Series "Physical and Mathematical Sciences"*, 2011, no. 4(25), pp. 18–24. (in Russian)
6. Leng S. *Introduction to Differentiable Manifolds*. Springer-Verlag, N. Y., 2002.
7. Nirenberg L. *Topics in Nonlinear Functional Analysis*. New ed. (AMS), N. Y., 2001.

Received February 26, 2014