УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp140111

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ И ИНЕРЦИОННОСТЬЮ

А.В. Келлер, М.А. Сагадеева

В последнее время результаты теории уравнений соболевского типа активно применяются для измерения динамически искаженных сигналов. В данной работе рассматривается задача оптимального измерения для системы, на которую произведено известное мультипликативное воздействие, которое имеет вид скалярной функции переменной t. Построены точное и приближенное решения задачи оптимального измерения для указанной системы.

Статья состоит из двух частей. В первой части формулируется постановка задачи оптимального измерения для системы с детерминированным мультипликативным воздействием, а во второй приводятся формулы точных и приближенных решений рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: оптимальное измерение; система леонтьевского типа; модель Шестакова – Свиридюка.

1. Задача оптимального измерения

При моделировании динамических процессов возникают математические и инженерные задачи в различных областях технических наук [1, 2]. Среди них особо выделяют проблематику динамических измерений, это обусловлено изменением требований к результатам измерений, которое является следствием выдвигаемых требований к качеству испытаний и эффективности производства. Так, одной их наиболее значимых в теории динамических измерений является проблема восстановления измеряемого сигнала. Отметим, что эта задача математически некорректна, поэтому для ее решения А.Л. Шестаковым и его учениками были предложены технически обоснованные гипотезы [2], решения которых были воплощены «в металл». Затем А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком для решения задачи восстановления динамически искаженного сигнала было предложено использовать методы теории оптимального управления [3], а полученную задачу – называть *задачей оптимального измерения*. Построенная математическая модель – *модель Шестакова – Свиридюка* – позволила начать численные исследования задачи оптимального измерения [4], опираясь на результаты о численных решениях задачи Коши для систем леонтьевского типа [5].

Для постановки задачи оптимального измерения для модели измерительного устройства с учетом детерминированного мультипликативного воздействия и инерционности введем в рассмотрение *пространство состояний* $\aleph = \{x \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n)\}$, *пространство измерений* $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n) : u^{p+1} \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n)\}$ и *пространство наблюдений* $\mathfrak{Y} = N[\aleph]$ при некотором фиксированном $\tau \in \mathbb{R}_+$. Выделим в $\mathfrak{U}$ замкнутое и выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ – *множество допустимых измерений.* Требуется найти *оптимальное измерение* $v \in \mathfrak{U}_\partial$ почти всюду на $(0,\tau)$, удовлетворяющее системе леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Du(t), \tag{1}$$

$$y(t) = Nx(t), \tag{2}$$

при начальных условиях Шоуолтера – Сидорова [6]

$$[R^L_\alpha(M)]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0, \tag{3}$$

минимизирущее значение *функционала*

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \|y^{(q)}(x(u),t) - y_d^{(q)}(t)\|^2 dt. \tag{4}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния измерительного устройства соответственно; $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – вектор-функции измерений и наблюдений измерительного устройства соответственно; $y_d = (y_{d1}, y_{d2}, \ldots, y_{dm})$ – наблюдение, полученное в ходе натурного эксперимента; n – число параметров состояния системы; L и M – квадратные матрицы порядка n ($\det L = 0$), представляющие собой взаимовлияние скоростей изменения состояния и собственно состояния измерительного устройства, при этом скалярная функция $a : (0,\tau) \to \mathbb{R}_+$, описывает изменение во времени параметров системы этих взаимовлияний; квадратная матрица D порядка n и прямоугольная матрица N размера $m \times n$, характеризуют взаимовлияние параметров измерения и связь между состоянием системы и наблюдением соответственно, функция $a : (0,\tau) \to \mathbb{R}^n$ будет описана ниже.

Отметим, что представленная модель датчика, описываемая системой леонтьевского типа (1), содержит мультипликативное воздействие $a(t)$ на измерительное устройство, то есть система (1) нестационарна (разрешимость таких систем в более общем случае рассматривается, например, в [7]). Кроме того, системы леонтьевского типа являются конечномерным аналогом *уравнений соболевского типа* [8], и при изучении задачи оптимального измерения воспользуемся результатами о существовании решения задачи оптимального управления для (1), полученными в [9].

2. Точное и приближенное решения задачи оптимального измерения

Пусть L и M — квадратные матрицы порядка n, $\det L = 0$. Следуя [8], будем называть множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(\mu L - M) \neq 0\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* матрицы M. Нетрудно показать, что либо $\rho^L(M) = \emptyset$, либо L-спектр матрицы M состоит из конечного множества точек [8]. Кроме того, множества $\rho^L(M)$ и $\sigma^L(M)$ не изменяются при переходе к другим базисам.

Для комплексной переменной $\mu \in \mathbb{C}$ определим матрично-значные функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ и будем их называть соответственно *L-резольвентой, правой* и *левой L-резольвентами* матрицы M.

Определение 1. Матрица M называется *L-регулярной,* если $\rho^L(M) \neq \emptyset$ и (L,p)-*регулярной,* при p равном порядку полюса в ∞ для функции $\det(\mu L - M)^{-1}$.

Замечание 1. Если бесконечность является устранимой особой точкой L-резольвенты матрицы M, то $p = 0$. Для квадратных матриц параметр p не может превосходить размерности пространства n.

В силу результатов [9] справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна и $\det M \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathfrak{U}$ и $a \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}_+)$, отделенной от нуля, существует единственное решение $x \in \aleph$ задачи Шоуолтера – Сидорова (3) для (1), имеющее вид*

$$x(u,t) = \lim_{k\to\infty} x_k(u,t) = \lim_{k\to\infty} \Bigg[\left(\left(L - \frac{1}{k} M \int\limits_0^t a(\zeta)d\zeta \right)^{-1} L \right)^k x_0 +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int\limits_s^t a(\zeta)d\zeta \right)^{-1} L \right)^k \left(L - \frac{1}{k}M \right)^{-1} \left(kL_k^L(M) \right)^p Du(s)ds +$$

$$+ \sum_{q=0}^{p} \Big(M^{-1} \Big(\big(kL_k^L(M) \big)^{p+1} - \mathbb{I}_n \Big) L \Big)^q M^{-1} \Big(\mathbb{I}_n - \big(kL_k^L(M) \big)^{p+1} \Big) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{Du(t)}{a(t)} \Bigg], \qquad (5)$$

причем выражение $\left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q$ в последнем слагаемом означает последовательное применение q раз данного оператора.

Выражением (5) определены точное $x(u,t)$ и приближенное $x_k(u,t)$ решения задачи (1), (3).

Решением задачи оптимального измерения является функция $v \in \mathfrak{U}_\partial$ такая, что

$$J(v) = \min_{(u,x(u))\in \mathfrak{U}_\partial \times \aleph} J(u), \qquad (6)$$

где функционал $J(u)$ имеет вид (4), и пара $(u,x(u)) \in \mathfrak{U}_\partial \times \aleph$ удовлетворяет системе (1), (2) с начальным условием (3).

В силу результатов, полученных в [10], справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ и $\det M \neq 0$. Тогда при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathfrak{U}$ и $a \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}_+)$, отделенной от нуля, существует единственная пара $(v,x(v))$ такая, что $x(v)$ — сильное решение задачи Шоуолтера – Сидорова (3) для системы (1), (2), а функция v минимизирует (6) с функционалом (4), причем они связаны формулой*

$$x(v) = \lim_{k\to\infty} x_k(v,t).$$

Следуя [10], опишем приближенные решения задачи оптимального измерения. Заменим пространство управлений $\mathfrak{U}$ на конечномерное пространство $\mathfrak{U}^\ell = H_\ell^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ вектор-многочленов вида $u^\ell = u^\ell(t) = \mathrm{col}\left(\sum\limits_{j=0}^{\ell} c_{1j}t^j, \sum\limits_{j=0}^{\ell} c_{2j}t^j, \ldots \sum\limits_{j=0}^{\ell} c_{nj}t^j \right)$.

Учитывая вид (5), необходимо чтобы $\ell > p$. Подставляя u^ℓ вместо u в (5) и (4), будем рассматривать задачу минимизации функционала $J(v^\ell) = \min\limits_{u^\ell \in \mathfrak{U}_\partial^\ell} J(u^\ell)$, в результате получим решение (v^ℓ, x^ℓ), причем $x^\ell = x(v^\ell,t) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(v^\ell,t)$.

Приближенным решением задачи оптимального измерения (1) – (4), (6) является функция $v_k^\ell(t)$, минимизирующая функционал

$$J_k(u^\ell) = \sum_{q=0}^{1} \int\limits_0^\tau \|Nx_k^{(q)}(u^\ell,t) - y_d^{(q)}(t)\|^2 dt.$$

Сходимость таких приближенных решений к точному доказана в [10].

Литература

1. Куропатенко, В.Ф. О моделировании динамических процессов в сферических и цилиндрических оболочках / В.Ф. Куропатенко, Ю.Н. Андреев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 53–67.
2. Шестаков, А.Л. Коррекция динамической погрешности измерительного преобразователя линейным фильтром на основе модели датчика / А.Л. Шестаков // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 1991. – Т. 34, № 4. – С. 8–13.
3. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16 (192), вып. 5. – С. 116–120.
4. Келлер, А.В. Задача оптимального измерения: численное решение, алгоритм программы / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 74–82.
5. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.
6. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.
7. Сагадеева, М.А. Исследование устойчивости решений линейных уравнений соболевского типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук / М.А. Сагадеева. – Челябинск, 2006. – 119 с.
8. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи математичеких наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.
9. Сагадеева, М.А. Оптимальное управление решениями нестационарных уравнений соболевского типа специального вида в относительно секториальном случае / М.А. Сагадеева, А.Д. Бадоян // Вестник МаГУ. Математика. – 2013. – Вып. 15. – С. 68–80.
10. Келлер, А.В. Численное решение задач оптимального и жесткого управления для одной нестационарной системы леонтьевского типа / А.В. Келлер, М.А. Сагадеева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2013. – Т. 32, № 19. – С. 57–66.

Алевтина Викторовна Келлер, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Математическое моделирование», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), alevtinak@inbox.ru.

Минзиля Алмасовна Сагадеева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Информационно-измерительная техника», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), sam79@74.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 1, pp. 134–138.

MSC 47D06, 49J15, 93A30 **DOI: 10.14529/mmp140111**

The Optimal Measurement Problem for the Measurement Transducer Model with a Deterministic Multiplicative Effect and Inertia

A.V. Keller, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, alevtinak@inbox.ru,
M.A. Sagadeeva, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, sam79@74.ru

The results of the theory of Sobolev-type equations are extensively used to measure of dynamically distorted signals recently. In this paper the authors consider the optimal measurement for the system where the well-known multiplicative effect was produced which in its turn has the form of a scalar function of the variable t. The authors develop the exact and approximate solutions of the optimal measurement problem for the specified system.

The paper consists of two parts. The statement of the problem is formulated in the first part as an optimal measurement for the system with a deterministic multiplicative effect, and the second part presents the formulas of exact and approximate solutions of the problem.

Keywords: optimal measurement; Leontiev type system; Shestakov–Sviridyuk model.

References

1. Kuropatenko V.F., Andreev Yu.N. Simulation of Dynamic Processes in Spherical and Cylindrical Shells [O modelirovanii dinamicheskih processov v sfericheskih i cilindricheskih obolochkah]. *Vychislitel'naya mehanika sploshnyh sred* [Computational Continuum Mechanics], 2010, vol. 3, no. 4, pp. 53–67.
2. Shestakov A.L. Dynamic Error Correction Transducer Linear Filter-based Sensor Model [Korrektsiya dinamicheskoy pogreshnosti izmeritel'nogo preobrazovatelya lineynym fil'trom na osnove modeli datchika]. *Izvestiya VUZ. Priborostroenie*, 1991, vol. 34, no. 4, pp. 8–13.
3. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. A New Approach to Measuring Dynamically Distorted Signals [Novyy podkhod k izmereniyu dinamicheski iskazhennykh signalov]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2010, no. 16 (192), issue 5, pp. 116–120.
4. Keller A.V., Nazarova E.I. Optimal Measuring Problem: the Computation Solution, the Program Algorithm [Zadacha optimal'nogo izmereniya: chislennoe reshenie, algoritm programmy]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"], 2011, vol. 4, no. 3, pp. 74–82.
5. Sviridyuk G.A., Brychev S.V. Numerical solution of Leontiev type systems [Chislennoe reshenie sistem uravneniy leont'evskogo tipa]. *Izvestiya VUZ. Matematika* [Russian Mathematics], 2003, no. 8, pp. 46–52.
6. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev Type Equations [Zadacha Shouoltera – Sidorova kak fenomen uravneniy sobolevskogo tipa]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"], 2010, vol. 3, no. 1, pp. 133–137.
7. Sagadeeva M.A. *Investigation of Solutions Stability for Linear Sobolev Type Equations* [Issledovanie ustoychivosti resheniy lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa: dis...kand. fiz.-mat. nauk]. Chelyabinsk, 2006.
8. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390
9. Sagadeeva M.A., Badoyan A.D. The Optimal Control over Solutions of Special Form of Nonstacionary Sobolev Type Equations in Relatively Spectral Case [Optimal'noe upravlenie resheniyami nestatsionarnykh uravneniy sobolevskogo tipa spetsial'nogo vida v otnositel'no sektorial'nom sluchae]. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika* [Bulletin of Magnitogorsk State University. Mathematics], 2013, no. 15, pp. 68–80.
10. Keller A.V., Sagadeeva M.A. The Numerical Solution of Optimal and Hard Control for Nonstationary System of Leontiev Type [Chislennoe reshenie zadach optimal'nogo i zhestkogo upravleniya dlya odnoy nestacionarnoy sistemy leont'evskogo tipa]. *Nauchnye vedomosti BelGU. Seriya: Matematika i fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics], 2013, vol. 32, no. 19, pp. 57–66.

Поступила в редакцию 15 ноября 2013 г.