

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПОДВОДНОГО ОПОЛЗНЯ

*Ю.И. Шокин, С.А. Бейзель, О.И. Гусев, Г.С. Хакимзянов,
Л.Б. Чубаров, Н.Ю. Шокина*

Исследуются поверхностные волны, возникающие при сходе подводного оползня по криволинейному склону дна глубокого водоема. Для изучения таких волн используются модели мелкой воды первого и второго приближения. Оползень описывается в рамках модели движения квазидеформируемого тела по криволинейной поверхности под действием внешних сил. Численный алгоритм решения нелинейно-дисперсионных уравнений основан на конечно-разностной аппроксимации системы уравнений гиперболического типа, аналогичной системе уравнений мелкой воды первого гидродинамического приближения и отличающейся от последней лишь правой частью, и уравнения эллиптического типа для осредненной по глубине дисперсионной составляющей давления. Выполнено сопоставление численных результатов, полученных в рамках бездисперсионной модели мелкой воды и нелинейно-дисперсионной модели.

Ключевые слова: подводный оползень; неровное дно; поверхностные волны; уравнения мелкой воды; нелинейно-дисперсионные уравнения; закон движения оползня; численный алгоритм.

Введение

В последнее время заметно вырос интерес [1–3] к исследованию поверхностных волн, возникающих при сходе подводных оползней. Оползневый механизм генерации волн цунами называют аномальным в противовес традиционному сейсмическому. Под аномальностью понимается несоответствие между заметной по своим проявлениям у берега волной цунами и сопоставляемым с генерацией этой волны слабым землетрясением, которое на самом деле может оказаться лишь спусковым крючком, приводящим в действие оползневый механизм генерации волны. На долю таких аномальных событий приходится примерно 15% зарегистрированных исторических цунами (см., например, [4]).

К настоящему времени выполнен ряд экспериментальных работ по изучению поверхностных волн, возникающих при движении модельного подводного оползня [5–7], при этом движение реального оползня моделировалось перемещением твердого тела по плоскому подводному склону. В подавляющем числе работ, посвященных численному исследованию генерируемых оползнем волн, рассматривалось движение оползня лишь по плоскому откосу, при этом для описания перемещения реального оползня вниз по склону использовался закон движения твердого недеформируемого тела по плоскому откосу, выведенный в работах [8, 9]. Лишь недавно [10] получены уравнения движения квазидеформируемого оползня с учетом пространственного характера изменения формы оползня, неровности подводного склона и действия на оползень сил тяжести, плавучести, трения и сопротивления воды. В других подходах движение оползневой массы моделируется перемещением упругопластической среды или течением жидкости, отличающейся от воды по плотности и вязкости.

Особенность моделирования поверхностных волн, порожденных движением оползня, определяется тем, что эти волны зарождаются в прибрежной зоне с малой глубиной, меньшей, чем длины генерируемых волн, поэтому приемлемое описание исследуемых волновых

режимов, особенно в начальной стадии процесса, может дать модель мелкой воды. Уточненные гидродинамические модели могут использоваться в вычислительном эксперименте, предполагающем проведение массовых расчетов при варьировании в известных пределах всех определяющих параметров. Это требует проведения расчетов с огромным числом вариантов. Поэтому трехмерные модели волновой гидродинамики, основанные, например, на уравнениях Эйлера или Навье-Стокса, вряд ли подойдут для таких исследований из-за большой ресурсоемкости реализующих их вычислительных алгоритмов. На наш взгляд, оптимальным является применение нелинейно-дисперсионных (НЛД-) моделей, которые являются двумерными (плановыми) и лучше воспроизводят волновую картину, чем классические (бездисперсионные) уравнения мелкой воды, поскольку в НЛД-уравнениях гидродинамики учитывается дисперсия волн и в некоторой степени неоднородность процесса в вертикальном направлении.

Настоящая работа является продолжением исследований [2, 11], посвященных изучению влияния дисперсии на картину генерируемых оползнем поверхностных волн. В отличие от указанных работ, здесь используется полная НЛД-модель, выведенная из уравнений Эйлера с учетом подвижности дна и без предположений о малости амплитуды и о потенциальности исходного трехмерного течения несжимаемой жидкости со свободной границей [12]. Предлагается метод расщепления, сводящий сложную задачу для НЛД-уравнений к двум более простым: к системе уравнений гиперболического типа и к скалярному уравнению эллиптического типа для осредненной по глубине дисперсионной составляющей давления. Приведены некоторые результаты расчетов с использованием НЛД-модели, которые сравниваются с результатами, полученными по бездисперсионной модели мелкой воды, а также с известными лабораторными данными [5–7] о волнах, возникающих при движении твердых тел по плоскому подводному откосу.

1. Алгоритм численного решения нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды

Пусть слой несжимаемой жидкости ограничен снизу подвижным дном $z = -h(x, y, t)$, а сверху — свободной границей $z = \eta(x, y, t)$, где t — время, x, y, z — координаты точки в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх, а координатная плоскость Oxy совпадает с невозмущенной свободной поверхностью.

В моделях мелкой воды искомыми величинами являются полная глубина слоя жидкости $H = \eta + h > 0$ и вектор $\mathbf{u} = (u, v)$, связанный некоторым образом с вектором скорости трехмерного течения. Если в качестве \mathbf{u} использовать осредненную по глубине ее горизонтальную составляющую, то нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды принимают следующий вид [12]:

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla H = g\nabla h + \frac{1}{H} \nabla \left(\frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right) - \nabla h \left(\frac{H}{2} R_1 + R_2 \right), \quad (2)$$

где $R_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2$, $R_2 = D^2 h$, $D = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ — оператор полной производной, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, g — ускорение свободного падения.

В отличие от классической (бездисперсионной) модели мелкой воды

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla H = g\nabla h, \quad (3)$$

уравнение движения (2) НЛД-модели содержит смешанные производные высокого порядка от компонент вектора скорости, непосредственная аппроксимация которых приводит

к сложной разностной задаче, трудно поддающейся исследованию. Как указано в [13], разработка эффективных численных алгоритмов должна начинаться с модульного анализа задачи, позволяющего свести ее решение к последовательному решению так называемых «простых задач». В настоящее время известно много примеров модульной декомпозиции задач математической физики. Например, задача для уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости часто сводится [14] к последовательному решению на каждом шаге по времени «простых задач» для уравнения Пуассона относительно функций тока и давления и уравнения параболического типа для функции вихря. В случае двумерного течения идеального газа одной из «простых задач» может быть краевая задача для скалярного уравнения гиперболического типа относительно функции вихря [15].

Для того чтобы выполнить декомпозицию задачи для НЛД-уравнений (1), (2), перепишем уравнение движения в терминах скорость–давление

$$H\mathbf{u}_t + H(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = p_0 \nabla h, \quad (4)$$

где через p обозначено давление [12], проинтегрированное по глубине слоя жидкости, а p_0 означает давление на дне:

$$p = \frac{gH^2}{2} - \left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2 \right), \quad p_0 = gH - \left(\frac{H^2}{2}R_1 + HR_2 \right).$$

Запись уравнения движения в форме (4) позволяет заметить аналогию с неоднородным уравнением движения для течения идеального газа, при этом в НЛД-модели аналогом плотности газа является полная глубина H . Таким образом, можно попытаться использовать подход [16] с выделением в качестве одной из простых задачи определения давления p . Гидростатическая его составляющая вычисляется через полную глубину слоя жидкости, поэтому «простая задача» формулируется только для дисперсионной составляющей $\varphi = H^3R_1/3 + H^2R_2/2$, уравнение для которой имеет вид

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \varphi}{H} - \frac{(\nabla \varphi \cdot \nabla h) \nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left(\frac{2}{H^3} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla h}{H^2 r} \right) \right) = F, \quad (5)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left(g\nabla \eta + \frac{R\nabla h}{r} \right) - \frac{6R}{Hr} + 2(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - 2(u_x v_y - u_y v_x),$$

$$R = -g\nabla \eta \cdot \nabla h + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla h) + h_{tt} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla h_t), \quad r = 4 + |\nabla h|^2.$$

Уравнение (5) является равномерно эллиптическим, не содержит производных по времени от компонент вектора скорости, и если коэффициент при φ положителен (например, $h = \text{const}$), то для нахождения численного решения можно построить разностные схемы с положительно определенными операторами и использовать быстро сходящиеся итерационные методы. Для сильно неровного дна коэффициент при φ может в некоторых точках стать отрицательным. Анализ таких случаев выполнен в работе [17].

Введение новой зависимой переменной φ позволяет записать уравнение движения НЛД-модели в виде

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla H = g\nabla h + \frac{\nabla \varphi - \psi \nabla h}{H}, \quad (6)$$

где $\psi = H^2R_1/2 + HR_2$ — дисперсионная составляющая давления на дне, связанная с переменными φ , H , \mathbf{u} выражением $\psi = (6\varphi/H + HR + \nabla \varphi \cdot \nabla h)/r$. Таким образом, возникает вторая «простая задача», заключающаяся в решении системы уравнений гиперболического типа (1), (6), аналогичной системе (3) бездисперсионных уравнений мелкой воды и отличающейся от последней лишь правой частью. Заметим, что уравнения мелкой воды (3) при

$h = \text{const}$ полностью совпадают с уравнениями газовой динамики для политропного газа с показателем адиабаты, равным двум. История развития численных методов для задач газовой динамики насчитывает несколько десятилетий [18], и приобретен огромный опыт в создании эффективных и высокоточных соответствующих алгоритмов [19, 20], сохраняющих важные свойства решений дифференциальных задач, в теоретическом обосновании и исследовании этих алгоритмов [21]. Такие хорошо изученные методы могут быть адаптированы для решения уравнений мелкой воды (3) и для решения гиперболической системы (1), (6). В настоящей работе для ее численного решения используется схема предиктор-корректор [22], хорошо зарекомендовавшая себя при исследовании волновых процессов в рамках бездисперсионной модели мелкой воды.

Декомпозиция исходной системы НЛД-уравнений на две «простые задачи» позволяет предложить следующий алгоритм расчета на текущем слое по времени. На шаге предиктор сначала определяется функция φ^n из конечно-разностного уравнения, аппроксимирующего (5) с коэффициентами, вычисленными по известным значениям H^n и \mathbf{u}^n с n -го слоя по времени. Затем решается гиперболическая система уравнений (1), (6) для нахождения величин H^* и \mathbf{u}^* , при этом в правой части уравнения движения используются известные значения φ^n , ψ^n , H^n и h^n . После этого вновь численно решается уравнение (5), в коэффициентах которого берутся величины, вычисленные на предикторе. Найденные на этом этапе значения φ^* и ψ^* используются затем на шаге корректор для определения окончательных значений H^{n+1} и \mathbf{u}^{n+1} путем численного решения системы уравнений гиперболического типа, состоящей из уравнения неразрывности (1) и уравнения движения с дивергентной формой левой части:

$$(\mathbf{H}\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{u}\mathbf{u}) + g\nabla \frac{H^2}{2} = gH\nabla h + \nabla\varphi - \psi\nabla h. \quad (7)$$

Для контроля вычислений можно использовать закон изменения полной энергии E в НЛД-модели [12]

$$(\mathbf{H}E)_t + \nabla \cdot [\mathbf{u}\mathbf{H}(E + p/H)] = -p_0 h_t, \quad (8)$$

где

$$E = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{H^2}{6} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{H}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) Dh + \frac{(Dh)^2}{2} + \frac{g(H - 2h)}{2}. \quad (9)$$

В случае стационарного дна ($h_t = 0$), уравнение изменения энергии (8) принимает дивергентный вид и выражает собой закон сохранения полной энергии.

2. Модель движения оползня

Далее функцию $z = -h(x, y, t)$ представим в виде суммы двух, первая из которых $z = h_{\text{bt}}(x, y)$ задает неподвижное дно, а вторая $z = h_{\text{sl}}(x, y, t)$ — верхнюю границу движущегося оползня. Используемая здесь модель движения оползня базируется на предположении о том, что в каждый момент времени его положение определяется точкой $\mathbf{x}_c(t) = (x_c(t), y_c(t), z_c(t))$, скользящей по дну согласно закону несвободного движения материальной точки по криволинейной поверхности. Связь между положениями оползня и точки $\mathbf{x}_c(t)$ понимается так, что если в начальный момент времени $t = 0$ оползень покоится, функция $z = h_{\text{sl}}^0(x, y)$ с конечным носителем \mathcal{D}_0 задает его начальную форму и точка $\mathbf{x}_c(0)$ имеет координаты $x_c(0) = x_c^0$, $y_c(0) = y_c^0$, $z_c(0) = z_c^0 = h_{\text{bt}}(x_c^0, y_c^0)$, причем $(x_c^0, y_c^0) \in \mathcal{D}_0$, то при $t > 0$ поверхность оползня задается функцией

$$h_{\text{sl}}(x, y, t) = h_{\text{sl}}^0(x + x_c^0 - x_c(t), y + y_c^0 - y_c(t)), \quad (10)$$

носителем которой является множество

$$\mathcal{D}_t = \left\{ (x, y) \mid (x + x_c^0 - x_c(t), y + y_c^0 - y_c(t)) \in \mathcal{D}_0 \right\}. \quad (11)$$

Таким образом, в каждый момент времени t оползень располагается на склоне так, что его проекция на плоскость $z = 0$ совпадает с множеством \mathcal{D}_t , а из формулы (11) следует, что все точки оползня имеют одну и ту же мгновенную горизонтальную составляющую вектора скорости. Однако в вертикальном направлении различные точки оползня могут двигаться с разными скоростями, и площадь его соприкосновения с дном может меняться со временем: на крутых участках он вытягивается, на пологих — становится короче (вдоль склона), что в некоторой степени отражает реальную ситуацию. Таким образом, при движении оползня его поверхность деформируется в соответствии с встречающимися неровностями дна, поэтому можно сказать, что для реального оползня нами используется модель квазидеформируемого тела. Легко показать, что для такой модели объем оползня V не меняется со временем, т.е.

$$V = \iint_{\mathcal{D}_t} h_{sl}(x, y, t) dx dy = \iint_{\mathcal{D}_0} h_{sl}^0(x, y) dx dy = \text{const.}$$

В случае плоского откоса для всех точек оползня одинаковы не только горизонтальные компоненты скорости, но и вертикальные, т. е. оползень будет двигаться по плоскому откосу как твердое тело.

Силами, определяющими движение оползня, являются силы тяжести, плавучести, трения о дно и сопротивления воды. При вычислении первых трех учитывается форма оползня и его расположение на склоне. Каждая из сил определяется как интегральная сумма сил, действующих на элементарные объемы оползня. Сила сопротивления воды вычисляется по максимальной площади Π сечения оползня вертикальной плоскостью, перпендикулярной горизонтальной составляющей вектора скорости \mathbf{v}_c точки $\mathbf{x}_c(t)$. С учетом сделанных предположений, получаем следующие уравнения движения оползня (точки $\mathbf{x}_c(t)$) [10]:

$$\begin{aligned} \frac{dv_\alpha}{dt} = & \frac{R_\alpha}{2} + \left[(\gamma - 1) g \left(I_{1,\alpha} - \sigma_\alpha C_{fr} I_2 \right) - \right. \\ & \left. - \sigma_\alpha \left(\gamma C_{fr} \left(u^2 I_{3,11} + 2uv I_{3,12} + v^2 I_{3,22} \right) + \frac{C_d}{2} \Pi v_c^2 \right) \right] \frac{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}{(\gamma + C_w)V}, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\gamma = \rho_{sl}/\rho_w > 1$, ρ_w — плотность воды, ρ_{sl} — плотность оползня, C_w , C_{fr} , C_d — коэффициенты присоединенной массы, трения и сопротивления воды, соответственно, $C_{fr} = \text{tg } \theta_*$, θ_* — угол трения,

$$\sigma_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} v_c}}, \quad R_\alpha = (g_{11})_{x^\alpha} u^2 + 2(g_{12})_{x^\alpha} uv + (g_{22})_{x^\alpha} v^2.$$

Здесь использованы новые обозначения для декартовых координат $x = x^1$, $y = x^2$, через u и v обозначены горизонтальные составляющие вектора $\mathbf{v}_c = (\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c)^T$, при этом

$$z_c(t) = h_{bt}(x_c(t), y_c(t)), \quad \dot{z}_c = u \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} + v \frac{\partial h_{bt}}{\partial y},$$

$v_c = |\mathbf{v}_c| = \sqrt{g_{11}u^2 + 2g_{12}uv + g_{22}v^2}$, v_1, v_2 — первые две ковариантные компоненты вектора скорости \mathbf{v}_c , связанные с декартовыми компонентами с помощью формул

$$v_1 = g_{11}u + g_{12}v, \quad v_2 = g_{21}u + g_{22}v,$$

$g_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) — ковариантные компоненты метрического тензора поверхности дна,

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial h_{bt}}{\partial x} \right)^2, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} \cdot \frac{\partial h_{bt}}{\partial y}, \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial h_{bt}}{\partial y} \right)^2.$$

Кроме того,

$$I_{1,\alpha} = - \iint_{\mathcal{D}_t} \frac{h_{sl}(x, y, t)}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}(x, y)}} \frac{\partial h_{bt}}{\partial x^\alpha}(x, y) dx dy, \quad I_2 = \iint_{\mathcal{D}_t} \frac{h_{sl}(x, y, t)}{\sqrt{G(x, y)}} dx dy > 0,$$

$$I_{3,\alpha\beta} = \iint_{\mathcal{D}_t} \frac{h_{sl}(x, y, t)}{\sqrt{G(x, y)}} \frac{\partial^2 h_{bt}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}(x, y) dx dy, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \neq 0.$$

Итак, для определения положения нижней границы жидкости из системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (12) с использованием начальных данных $v_1(0) = v_2(0) = 0$ находятся ковариантные компоненты скорости v_α и по формулам $u = g^{11}v_1 + g^{12}v_2$, $v = g^{21}v_1 + g^{22}v_2$, где $g^{11} = g_{22}/G$, $g^{12} = g^{21} = -g_{12}/G$, $g^{22} = g_{11}/G$, определяются декартовы компоненты скорости u , v . Далее решается задача

$$\frac{dx_c}{dt} = u, \quad \frac{dy_c}{dt} = v; \quad x_c(0) = x_c^0, \quad y_c(0) = y_c^0,$$

и вычисляются координаты $x_c(t)$, $y_c(t)$ движущейся точки $\mathbf{x}_c(t)$, что позволяет определить в каждый момент времени нижнюю подвижную границу жидкости $z = -h(x, y, t)$. Эти вычисления проводятся до момента остановки оползня, т. е. до того, как значение v_c обратится в нуль.

3. Результаты расчетов

Разработанная методика расчета поверхностных волн, возникающих при сходе подводных оползней, применялась для исследования наката волн на берега как больших, так и малых акваторий. Установлено, что в первом случае перед набирающим скорость оползнем на поверхности воды постепенно формируется одиночная волна, которая с большей, чем у оползня, скоростью движется в сторону увеличения глубин и уходит в открытое море. Непосредственно над движущимся оползнем свободная граница имеет вид «впадины», которая удаляется от берега вместе с оползнем и исчезает через некоторое время после его остановки. Для береговых сооружений представляет опасность волна понижения, подходящая к берегу вскоре после начала оползневого процесса и генерирующая впоследствии волну наката.

В случае малых акваторий волновая картина выглядит иначе: головная волна повышения после отражения от противоположного берега проходит водоем в обратном направлении, взаимодействуя по пути со «впадиной», набегает на береговой склон, с которого сошел оползень, и, отражаясь от него, вновь уходит к противоположному берегу, при этом максимальные заплески на берегах наблюдаются не всегда при первом накате. Более сложным является и движение оползневой массы: пройдя глубокую часть водоема, она может по инерции подняться на некоторую высоту противоположного склона и сдвинуться затем в обратную сторону. Выполнено также исследование величин заплесков на плотину ГЭС. Показано, что вертикальные заплески, рассчитанные с помощью классической модели, согласуются с результатами расчетов по более точным моделям, однако формы подходящих к плотине волн могут различаться.

По результатам вычислительных экспериментов исследовано влияние параметров, определяющих геометрию водоема и движение квазидеформируемого оползня, на величины максимальных заплесков на берег. При этом варьировались начальное заглубление оползня, его размеры и плотность, коэффициенты присоединенной массы, трения и гидродинамического сопротивления, крутизна и кривизна модельных склонов. Результаты численного моделирования подтвердили гипотезу о том, что наибольшую опасность для береговых сооружений представляют волны, генерируемые оползнями с большой массой и малым начальным заглублением.

Остановимся здесь на кратком сравнительном анализе расчетных и экспериментальных данных для случая плоского откоса. В лабораторных исследованиях [5] подводный оползень имитировался движением по плоскому откосу полностью погруженного в воду твердого тела с плотностью 1900 кг/м^3 . В поперечном сечении форма тела представляла собой полуэллипс с большой a_x и малой a_y полуосями. Плоский откос сопрягался справа с участком дна постоянной глубины. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных было выполнено для угла наклона откоса $\theta = 15^\circ$. Здесь рассматриваются результаты экспериментов, в которых откос был ограничен слева вертикальной непроницаемой стенкой:

$$h_{\text{bt}}(x) = \begin{cases} h_w - x \operatorname{tg} \theta & \text{при } 0 \leq x \leq \xi, \\ h_\xi & \text{при } \xi \leq x, \end{cases} \quad (13)$$

где h_w — глубина в точке $x = 0$ (около левой стенки), $\xi = (h_w - h_\xi) / \operatorname{tg} \theta$ — абсцисса основания склона.

Известно, что модели мелкой воды весьма чувствительны к гладкости функции, задающей подвижное дно, поэтому численные эксперименты проводились для оползня с достаточно гладкой начальной формой

$$h_{\text{sl}}^0(x) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi(x - x_c^0)}{b} \right) \right] & \text{при } |x - x_c^0| \leq b/2, \\ 0 & \text{при } |x - x_c^0| > b/2. \end{cases} \quad (14)$$

При этом оползни в численном и лабораторном [5] экспериментах имели одну и ту же высоту T , площадь сечения $bT/2$ и начальное заглубление z_c^0 . Значения параметров, определяющих постановки вычислительных и лабораторных экспериментов, приведены в таблице. Заметим, что параметр b определяет длину численного оползня, аппроксимирующего реальный объект, участвовавший в лабораторных экспериментах, а выбранные значения параметров обеспечивают равенство объемов численного и лабораторного оползней, а также совпадение их траекторий движения.

Таблица

Значения параметров в вычислительных и лабораторных экспериментах

№	T , м	b , м	a_x , см	a_y , см	γ	θ , град	θ_* , град	h_w , м	h_ξ , м	z_c^0 , м	C_d	C_w
1	0,05	0,785	25,0		1,9	15	1	-0,043	-0,9	-0,15	1,0	0,6
2	0,052	0,157	50,0		1,806	15	0	0,0	-1,05	-0,309	1,0	1,0
3	0,082		19,75	34,0	2,435	15	1,7	0,0	-1,5	-0,061	0,473	0,607

Мареограммы, представленные на рис. 1, *a*, показывают, что НЛД-модель удовлетворительно описывает большее число волн, чем бездисперсионная модель мелкой воды. На рис. 1, *б* демонстрируется сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными из работы [6], в которой также исследовались закономерности волнообразования при движении оползня по плоскому откосу (13) с тем же углом наклона, но с большей глубиной воды ($h_\xi = -1,05$ м). Использовалась более длинная и более заглубленная в начальный момент времени, чем в [5], модель оползня полуэллиптической формы. Как и предыдущем случае, форма оползня задавалась формулой (14), а значения определяющих параметров указаны в таблице.

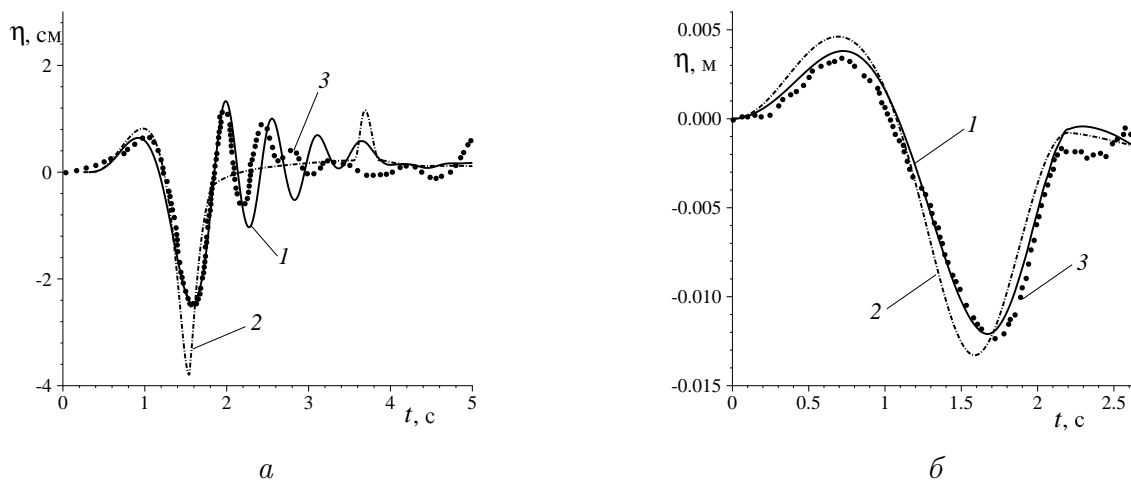


Рис. 1. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными из [5] (а) и [6] (б). Мареограммы в точках $x = 0,9$ м (а) и $x = 1,775$ м (б), полученные в расчетах по НЛД-модели (1), модели мелкой воды (2) и в лабораторных экспериментах (3)

Из рис. 1, б видно, что волна повышения и следующая за ней волна понижения очень хорошо описываются в рамках НЛД-модели. Заметим, что и бездисперсионные уравнения мелкой воды описывают эти волны также с приемлемой точностью вследствие того, что в этом эксперименте волны имели большую длину и меньшую амплитуду, чем в [5].

В лабораторном эксперименте [7] моделью подводного оползня было удобообтекаемое твердое тело в форме тонкого сглаженного эллипсоидального сегмента. Его масса равнялась 16,00 кг, а объем — $V = 6,57 \cdot 10^{-3}$ м³. Эксперимент проводился в бассейне глубиной 1,5 м, длиной 30 м и шириной 3,7 м, ограниченном с трех сторон вертикальными непроницаемыми стенками. Высоты волн фиксировались датчиками, первый из которых был расположен над вершиной оползня ($x_c^0 = 1,01$ м, $y_c^0 = 1,85$ м), а второй — ниже по склону и с некоторым смещением относительно оси бассейна ($x = 1,469$ м, $y = 2,2$ м).

При численном моделировании начальная форма оползня задавалась по формуле

$$h_{sl}^0(x, y) = \begin{cases} \frac{T}{4} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi(x - x_c^0)}{b_x}\right) \right] \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi(y - y_c^0)}{b_y}\right) \right], & \text{если } \begin{cases} |x - x_c^0| \leq b_x/2 \text{ и} \\ |y - y_c^0| \leq b_y/2, \end{cases} \\ 0, & \text{если } \begin{cases} |x - x_c^0| > b_x/2 \text{ или} \\ |y - y_c^0| > b_y/2, \end{cases} \end{cases}$$

где $b_x = 0,431$ м, $b_y = 0,743$ м — длины численной модели оползня вдоль осей Ox и Oy соответственно. Указанные выше и в таблице параметры выбраны так, что численный оползень и его движение полностью согласуются с лабораторными аналогами [7].

Из рис. 2 видно, что по сравнению с бездисперсионной моделью мелкой воды результаты расчетов по НЛД-модели лучше соответствуют экспериментальным данным по значениям локальных экстремумов генерируемых волн, однако со временем волны в расчетах становятся более длинными, чем в эксперименте.

Работа проводилась при финансовой поддержке Президентской программы «Ведущие научные школы РФ» (грант № НШ-6293.2012.9), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00721) и программы Интеграционных исследований СО РАН (проект № 42).

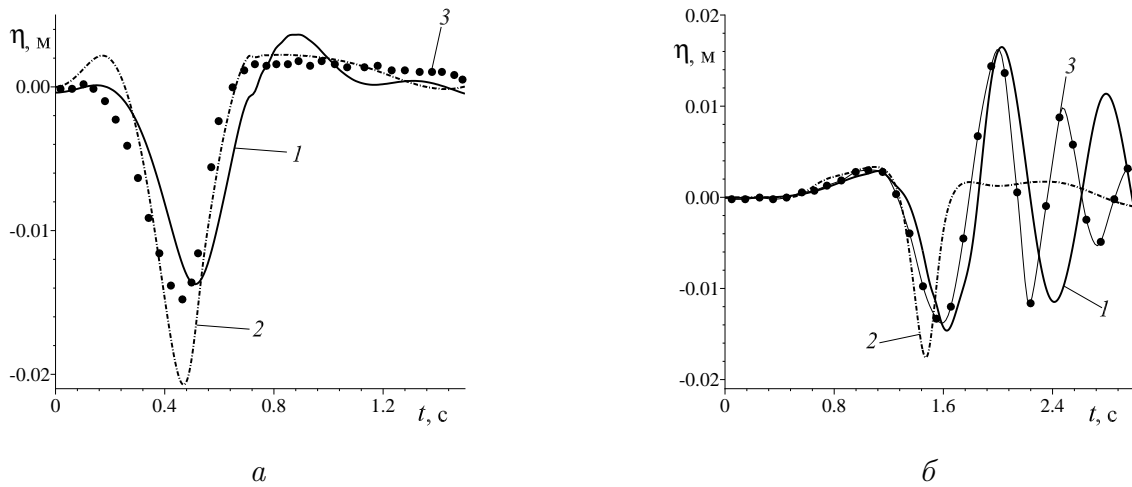


Рис. 2. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными из [7]. Магнитограммы первого (а) и второго (б) датчиков, полученные в расчетах по НЛД-модели (1), модели мелкой воды (2) и в лабораторных экспериментах (3)

Литература

1. Mechanisms of Tsunami Generation by Submarine Landslides — a Short Review / C.B. Harbitz, F. Lovholt, G. Pedersen, et al // Norwegian J. of Geology. — 2006. — V. 86, № 3. — P. 255–264.
2. Modelling Surface Waves of Generated by a Moving Landslide with Allowance for Vertical Flow Structure / Yu.I. Shokin, Z.I. Fedotova, G.S. Khakimzyanov, et al // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2007. — V. 22, № 1. — P. 63–85.
3. Beisel, S.A. Simulation of Surface Waves Generated by an Underwater Landslide Moving over an Uneven Slope / S.A. Beisel, L.B. Chubarov, G.S. Khakimzyanov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2011. — V. 26, № 1. — P. 17–38.
4. Tappin, D.R. The Papua New Guinea Tsunami of 17 July 1998: Anatomy of a Catastrophic Event / D.R. Tappin, P. Watts, S.T. Grilli // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. — 2008. — V. 8. — P. 243–266.
5. Моделирование генерации поверхностных волн перемещением фрагмента дна по береговому склону / С.В. Елецкий, Ю.Б. Майоров, В.В. Максимов и др. // Вычисл. технологии. — 2004. — Т. 9, Специальный выпуск, Ч. II. — С. 194–206.
6. Grilli, S.T. Tsunami Generation by Submarine Mass Failure. I: Modeling, Experimental Validation, and Sensitivity Analyses / S.T. Grilli, P. Watts // J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng. — 2005. — V. 131, № 6. — P. 283–297.
7. Enet, F. Experimental Study of Tsunami Generation by Three-Dimensional Rigid Underwater Landslides / F. Enet, S.T. Grilli // J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng. — 2007. — V. 133, № 6. — P. 442–454.
8. Pelinovsky, E. Simplified Model of Tsunami Generation by Submarine Landslides / E. Pelinovsky, A. Poplavsky // J. Phys. Chem. Earth. — 1996. — V. 21, № 12. — P. 13–17.
9. Grilli, S.T. Modeling of Waves Generated by a Moving Submerged Body: Applications to Underwater Landslides / S.T. Grilli, P. Watts // Eng. Anal. Boundary Elem. — 1999. — V. 23, № 8. — P. 645–656.

10. Simulation of Surface Waves Generated by an Underwater Landslide in a Bounded Reservoir / S.A. Beisel, L.B. Chubarov, D. Dutykh, et al // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2012. – V. 27, № 6. – P. 539–558.
11. Simulation of Surface Waves Generation by an Underwater Landslide / L.B. Chubarov, S.V. Eletskiy, Z.I. Fedotova, G.S. Khakimzyanov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2005. – V. 20, № 5. – P. 425–437.
12. Федотова, З.И. Анализ условий вывода НЛД-уравнений / З.И. Федотова, Г.С. Хахимзянов // Вычисл. технологии. – 2012. – Т. 17, № 5. – С. 94–108.
13. Яненко, Н.Н. Избранные труды. Математика. Механика / Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1991. – 416 с.
14. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 618 с.
15. Хахимзянов, Г.С. О численном расчете дозвуковых установившихся осесимметричных течений идеальной сжимаемой жидкости в каналах сложной формы / Г.С. Хахимзянов, И.К. Яушев // Известия Сибирского отделения Академии наук СССР. Серия: Технические науки. – 1981. – № 13, вып. 3. – С. 50–57.
16. Хахимзянов, Г.С. О расчете давления в двумерных стационарных задачах динамики идеальной жидкости / Г.С. Хахимзянов, И.К. Яушев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1984. – Т. 24, № 10. – С. 1557–1564.
17. Гусев, О.И. Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне / О.И. Гусев // Вычисл. технологии. – 2012. – Т. 17, № 5. – С. 46–64.
18. Куропатенко, В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики / В.Ф. Куропатенко // Тр. МИАН СССР. – 1966. – Т. 74. – С. 107–137.
19. Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
20. Куропатенко, В.Ф. Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1985. – Т. 25, № 8. – С. 1176–1188.
21. Шокин, Ю.И. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике / Ю.И. Шокин, Н.Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1985. – 364 с.
22. Shokina, N.Yu. To the Problem of Construction of Difference Schemes on Movable Grids / N.Yu. Shokina // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2012. – V. 27, № 6. – P. 603–626.

Юрий Иванович Шокин, академик, доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт вычислительных технологий СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация), dir@ict.nsc.ru.

Софья Александровна Бейзель, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт вычислительных технологий СО РАН, кафедра «Математическое моделирование», Национальный исследовательский Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), beisel@ict.nsc.ru.

Олег Игоревич Гусев, инженер-исследователь, Институт вычислительных технологий СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация), gusev_oleg_igor@mail.ru.

Гаяз Салимович Хахимзянов, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительных технологий СО РАН, кафедра «Математическое моделирование», Национальный исследовательский Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), khak@ict.nsc.ru.

Леонид Борисович Чубаров, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт вычислительных технологий СО РАН, кафедра «Математическое моделирование», Национальный исследовательский Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), chubarov@ict.nsc.ru.

Нина Юрьевна Шокина, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт вычислительных технологий СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация), nina.shokina@ict.nsc.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 1, pp. 121–133.

MSC 76B15, 76M20

DOI: 10.14529/mmp140110

Numerical Modelling of Dispersive Waves Generated by Landslide Motion

Yu.I. Shokin, Institute of Computational Technologies of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation, dir@ict.nsc.ru,

S.A. Beisel, Institute of Computational Technologies of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation, beisel@ict.nsc.ru,

O.I. Gusev, Institute of Computational Technologies of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation, gusev_oleg_igor@mail.ru,

G.S. Khakimzyanov, Institute of Computational Technologies of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation, khak@ict.nsc.ru,

L.B. Chubarov, Institute of Computational Technologies of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation, chubarov@ict.nsc.ru,

N.Yu. Shokina, Institute of Computational Technologies of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation, nina.shokina@ict.nsc.ru

The authors study the surface waves which are generated by the submarine landsliding on a curvilinear bottom slope of a deep reservoir. The shallow water models of the first and second approximations are used to describe the surface waves. An underwater landslide is described by the model of motion of a "quasi-deformed" body on curvilinear surface under the effect of mass and external forces. The numerical algorithm for solving the nonlinear dispersive equations is based on the finite differential approximation of the hyperbolic system, which is similar to the shallow water equations of the first hydrodynamic approximation and the elliptic equation for the depth-average dispersive pressure component. The comparison of the numerical results obtained in the framework of the dispersion-free shallow water model and the nonlinear dispersive model is done.

Keywords: underwater landslide; irregular bottom; surface waves; shallow water equations; nonlinear dispersive equations; landslide motion law; numerical algorithm.

References

1. Harbitz C.B., Lovholt F., Pedersen G., Glimsdal S., Masson D.G. Mechanisms of Tsunami Generation by Submarine Landslides — a Short Review. *Norwegian Journal of Geology*, 2006, vol. 86, no. 3, pp. 255–264.

2. Shokin Yu.I., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B., Beisel S.A. Modelling Surfaces Waves of Generated by a Moving Landslide with Allowance for Vertical Flow Structure. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2007, vol. 22, no. 1, pp. 63–85. DOI: 10.1515/RNAM.2007.22.1.63
3. Beisel S.A., Chubarov L.B., Khakimzyanov G.S. Simulation of Surface Waves Generated by an Underwater Landslide Moving over an Uneven Slope. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2011, vol. 26, no. 1, pp. 17–38. DOI: 10.1515/RJNAMM.2011.002
4. Tappin D.R., Watts P., Grilli S.T. The Papua New Guinea Tsunami of 17 July 1998: Anatomy of a Catastrophic Event. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 2008, vol. 8, pp. 243–266. DOI: 10.5194/nhess-8-243-2008
5. Eletskiy S.V., Maiorov Yu.B., Maksimov V.V., Nudner I.S., Fedotova Z.I., Khazhoyan M.G., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B. Simulation of Surface Waves Generation by a Moving Part of the Bottom Down the Coastal Slope [Modelirovanie generatsii poverkhnostnykh voln peremeshcheniem fragmenta dna po beregovomu sklonu]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies], 2004, vol. 9, pp. 194–206.
6. Grilli S.T., Watts P. Tsunami Generation by Submarine Mass Failure. I: Modeling, Experimental Validation, and Sensitivity Analyses. *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng.*, 2005, vol. 131, no. 6, pp. 283–297. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-950X(2005)131:6(283)
7. Enet F., Grilli S.T. Experimental Study of Tsunami Generation by Three-Dimensional Rigid Underwater Landslides. *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng.*, 2007, vol. 133, no. 6, pp. 442–454. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-950X(2007)133:6(442)
8. Pelinovsky E., Poplavsky A. Simplified Model of Tsunami Generation by Submarine Landslides. *J. Phys. Chem. Earth*, 1996, vol. 21, no. 12, pp. 13–17.
9. Grilli S.T., Watts P. Modeling of Waves Generated by a Moving Submerged Body: Applications to Underwater Landslides. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, 1999, vol. 23, no. 8, pp. 645–656. DOI: 10.1016/S0955-7997(99)00021-1
10. Beisel S.A., Chubarov L.B., Dutykh D., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Simulation of Surface Waves Generated by an Underwater Landslide in a Bounded Reservoir. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2012, vol. 27, no. 6, pp. 539–558. DOI: 10.1515/rnam-2012-0031
11. Chubarov L.B., Eletskiy S.V., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. Simulation of Surface Waves Generation by an Underwater Landslide. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2005, vol. 20, no. 5, pp. 425–437. DOI: 10.1515/156939805775186668
12. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. On Analysis of Conditions for Derivation of Nonlinear-Dispersive Equations [Analiz usloviy vyvoda NLD-uravneniy]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies], 2012, vol. 17, no. 5, pp. 94–108.
13. Yanenko N.N. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Moscow, Nauka, 1991. 416 p.
14. Roache P.J. *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque, Hermosa Publishers, 1976. 446 p.
15. Khakimzyanov G.S., Yaushev I.K. Numerical Calculation of Steady Subsonic Axisymmetric Flows of Ideal Compressible Fluid in the Channels of Complex Shape [O chislenom raschete dozvukovykh ustanovivshikhsya osesimmetrichnykh teceniy ideal'noy szhimaemoy zhidkosti v kanalakh slozhnoy formy]. *Izvestiya Sibirskogo otdeleniya Akademii nauk SSSR. Seriya: Tekhnicheskie nauki* [Proceedings of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences. Ser.: Technical Sciences], 1981, no. 13, issue 3, pp. 50–57.
16. Khakimzyanov G.S., Yaushev I.K. Calculation of the Pressure in Stationary Problems of Ideal Fluid Dynamics. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1984, vol. 24, issue 5, pp. 170–175. DOI: 10.1016/0041-5553(84)90175-7

17. Gusev O.I. On an Algorithm for Surface Waves Calculation within the Framework of Nonlinear Dispersive Model with a Movable Bottom [Ob algoritme rascheta poverkhnostnykh voln v ramkakh nelineynno-dispersionnoy modeli na podvizhnom dne]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies], 2012, vol. 17, no. 5, pp. 46–64.
18. Kuropatenko V.F. On Finite-Difference Methods for Fluid Dynamic Equations [O raznostnykh metodakh dlya uravneniy gidrodinamiki]. *Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova Akad. Nauk SSSR* [Proceedings of the Steklov Mathematical Institute USSR AS], 1966, vol. 74, no. 1, pp. 107–137.
19. Rozhdestvenskiy B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasilinear Equations and Their Application to Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1978. 687 p.
20. Kuropatenko V.F. Local Conservativeness of Difference Schemes for the Equations of Gas Dynamics. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1985, vol. 25, issue 4, pp. 134–142. DOI: 10.1016/0041-5553(85)90157-0
21. Shokin Yu.I., Yanenko N.N. *Metod differentsial'nogo priblizheniya. Primenenie k gazovoy dinamike* [Method of Differential Approximation. Application to Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka, 1985. 364 p.
22. Shokina N.Yu. To the Problem of Construction of Difference Schemes on Movable Grids. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2012, vol. 27, no. 6, pp. 603–626. DOI: 10.1515/rnam-2012-0035

Поступила в редакцию 7 декабря 2013 г.