Восьмидесятилетнему юбилею
профессора В.Ф. Куропатенко
посвящается

УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp140108**

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С УСЛОВИЕМ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА И АДДИТИВНЫМИ «ШУМАМИ»

Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова

Концепция «белого шума», первоначально построенная в конечномерных пространствах, переносится в бесконечномерные пространства. Цель переноса – развитие теории стохастических уравнений соболевского типа и разработка приложений, имеющих практическую значимость. Для достижения цели вводится производная Нельсона – Гликлиха и строятся пространства «шумов». Уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами рассматриваются в пространствах дифференцируемых «шумов», причем доказывается существование и единственность их классических решений. В качестве приложения рассматривается стохастическое уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной в ограниченной области с однородным граничным условием Дирихле и начальным условием Шоуолтера – Сидорова.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; винеровский процесс; производная Нельсона – Гликлиха; «белый шум»; пространство «шумов»; стохастическое уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Введение

Линейное стохастическое дифференциальное уравнение в простейшей ситуации имеет вид

$$d\eta = (S\eta + \psi)dt + Ad\omega, \tag{0.1}$$

где S и A – некоторые линейные операторы, которые в дальнейшем будут определены; $\psi = \psi(t)$ – детерминированное, а $\omega = \omega(t)$ – стохастическое внешние воздействия; $\eta = \eta(t)$ – искомый случайный процесс. Изначально под $d\omega$ понимался дифференциал винеровского процесса $\omega = W(t)$, обобщенная производная которого традиционно трактуется как белый шум. Первым обыкновенные дифференциальные уравнения вида (0.1) начал изучать К. Ито, затем к исследованиям подключились Р.Л. Стратонович и А.В. Скороход. Подход Ито – Стратоновича – Скорохода в конечномерном случае популярен до сих пор [1, 2]. Более того, он успешно распространен и на бесконечномерную ситуацию [3, 4], и даже на уравнения соболевского типа [5, 6]. Отметим еще подход, представленный школой И.В. Мельниковой [7, 8], в котором уравнение (0.1) рассматривается в пространствах Шварца, где обобщенная производная винеровского процесса имеет смысл.

Между тем возник [9] и активно развивается [10, 11] новый подход в исследованиях уравнения (0.1), где под «белым шумом» понимается производная Нельсона – Гликлиха винеровского процесса. (Заметим, что данный «белый шум» более адекватен теории броуновского движения Эйнштейна – Смолуховского, нежели традиционный белый шум [9, 10].) Первоначально «белый шум» использовался в теории оптимальных измерений [12, 13], где для него пришлось построить специальное пространство «шумов» [14]. Концепция «белого шума» в данной теории, которая существует только в конечномерных пространствах, показала свою высокую эффективность, поэтому возникла идея распространения этой концепции на бесконечномерные пространства. Цель такого распространения – развитие теории стохастических уравнений соболевского типа и разработка приложений этой теории к неклассическим моделям математической физики, имеющим практическую значимость.

Статья, кроме введения и списка литературы, содержит три части. В первой части вводится в рассмотрение производная Нельсона – Гликлиха K-случайного процесса со значениями в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве, в частности, K-винеровского процесса. Затем строятся пространства таких процессов, содержащие как K-винеровский процесс, так и его производную Нельсона – Гликлиха (т.е. «белый шум»). Эти пространства, простоты и краткости ради, названы *пространствами «шумов»*. Название оправдано еще и тем, что «черный шум» (т.е. «абсолютная» тишина) – случайный процесс, чьи траектории п.н. (почти наверное) совпадают с точкой нуль, – лежит во всех построенных пространствах.

Во второй части статьи развивается теория стохастических уравнений соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами. Именно, рассматривается стохастическое уравнение соболевского типа

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta + N\omega, \tag{0.2}$$

где $\eta = \eta(t)$ – искомый случайный процесс, $\overset{o}{\eta}$ – его производная Нельсона – Гликлиха, $w = w(t)$ – случайный процесс, отвечающий внешнему воздействию; операторы $L, M, N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Уравнение (0.2) снабжено начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$\left[R^L_\alpha(M)\right]^{p+1} (\eta(0) - \xi_0) = 0, \tag{0.3}$$

где $R^L_\alpha(M) = (\alpha L - M)^{-1}L, \alpha \in \rho^L(M)$. Отметим, что условие (0.3) более естественно для системы леонтьевского типа [13] и для уравнений соболевского типа [15], нежели традиционное условие Коши. Здесь же доказывается существование и единственность классического решения задачи (0.2), (0.3).

В третьей части абстрактные результаты первых двух частей прилагаются к стохастическому уравнению Баренблатта – Желтова – Кочиной, моделирующему процессы фильтрации в трещиноватых средах, влагопереноса в почве и теплопроводности в средах «с двумя температурами» [6]. Доказано существование и единственность решения. Заметим еще, что список литературы не претендует на полноту, а только отражает личные вкусы и пристрастия авторов.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю признательность проф. В.Ф. Куропатенко за многочисленные стимулирующие дискуссии. Особо хочется отметить те работы юбиляра [16–18], идейная направленность которых обусловила идеологию данной статьи.

1. Пространства «шумов»

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, наделенное борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин образует гильбертово пространство со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$. Это гильбертово пространство мы обозначим символом $\mathbf{L_2}$. В дальнейшем будут очень важны те случайные величины $\xi \in \mathbf{L_2}$, которые имеют нормальное (гауссово) распределение; их мы назовем *гауссовыми величинами*.

Пусть теперь $\mathcal{A}_0$-σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. Построим пространство $\mathbf{L_2^0}$ случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{A}_0$. Оказывается, $\mathbf{L_2^0}$ – подпространство в $\mathbf{L_2}$; обозначим через $\Pi : \mathbf{L_2} \to \mathbf{L_2^0}$ – ортопроектор. Пусть $\xi \in \mathbf{L_2}$, тогда $\Pi\xi$ называется *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначается символом $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}_0)$. Как нетрудно заметить, $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}_0) = \mathbf{E}\xi$, если $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$; и $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}_0) = \xi$, если $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$. Наконец напомним, что минимальная σ-подалгебра $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, относительно которой случайная величина ξ измерима, называется *σ-алгеброй, порожденной* ξ.

Пусть далее $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ – некоторый промежуток. Рассмотрим два отображения: $f : \mathfrak{I} \to \mathbf{L_2}$, которое каждому $t \in \mathfrak{I}$ ставит в соответствие случайную величину $\xi \in \mathbf{L_2}$, и $g : \mathbf{L_2} \times \Omega \to \mathbb{R}$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствие точку $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$. Отображение $\eta : \mathfrak{I}\times\Omega \to \mathbb{R}$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$, мы называем *(одномерным) случайным процессом.* Таким образом, при каждом фиксированном $t \in \mathfrak{I}$ случайный процесс $\eta = \eta(t, \cdot)$ является случайной величиной, т.е. $\eta(t, \cdot) \in \mathbf{L_2}$, а при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ случайный процесс $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ называется *(выборочной) траекторией.* Случайный процесс η назовем *непрерывным,* если п.н. все его траектории непрерывны (т.е. при п.в. (почти всех) $\omega \in \Omega$ траектории $\eta(\cdot, \omega)$ непрерывны). Множество непрерывных случайных процессов образует банахово пространство, которое мы обозначим символом $\mathbf{CL_2}$. Непрерывный случайный процесс, чьи (независимые) случайные величины гауссовы, называется *гауссовым.*

Важнейшим примером непрерывного гауссова случайного процесса служит (одномерный) винеровский процесс $\beta = \beta(t)$, моделирующий броуновское движение на прямой в теории Эйнштейна – Смолуховского. Он обладает следующими свойствами:

(W1) п.н. $\beta(0) = 0$, п.н. все его траектории $\beta(t)$ непрерывны, и при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+ (= \{0\} \cup \mathbb{R})$ случайная величина $\beta(t)$ гауссова;

(W2) математическое ожидание $\mathbf{E}\left(\beta\left(t\right)\right) = 0$ и автокорреляционная функция $\mathbf{E}\left(\left(\beta\left(t\right) - \beta\left(s\right)\right)^2\right) = |t - s|$ при всех $s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(W3) траектории $\beta(t)$ недифференцируемы в любой точке $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и на любом сколь угодно малом промежутке имеют неограниченную вариацию.

Теорема 1.1. *С вероятностью 1 существует единственный случайный процесс β, удовлетворяющий свойствам (W1) – (W2), причем его можно представить в виде*

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin\frac{\pi}{2}(2k + 1)t,$$

где ξ_k – независимые гауссовы величины, $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = [\frac{\pi}{2}(2k + 1)]^{-2}$.

В дальнейшем случайный процесс β, удовлетворяющий свойствам (W1) – (W3), назовем *броуновским движением.*

Теперь фиксируем $\eta \in \mathbf{CL_2}$ и $t \in \mathfrak{I}(= (\varepsilon, \tau) \subset \mathbb{R})$ и через $\mathcal{N}_t^\eta$ обозначим σ-алгебру, порожденную случайной величиной $\eta(t)$. Переобозначим еще, краткости ради, $\mathbf{E}_t^\eta = \mathbf{E}(\cdot|\mathcal{N}_t^\eta)$.

Определение 1.1. Пусть $\eta \in \mathbf{CL_2}$, *производной в среднем справа* $D\eta(t, \cdot)$ *(слева* $D_*\eta(t, \cdot)$*) случайного процесса η в точке* $t \in (\varepsilon, \tau)$ называется случайная величина

$$D\eta\left(t, \cdot\right) = \lim_{\triangle t \to 0+} E_t^\eta \left(\frac{\eta\left(t + \triangle t, \cdot\right) - \eta(t, \cdot)}{\triangle t}\right)$$

$$\left(D_*\eta\left(t, \cdot\right) = \lim_{\triangle t \to 0-} E_t^\eta \left(\frac{\eta\left(t, \cdot\right) - \eta\left(t - \triangle t, \cdot\right)}{\triangle t}\right)\right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на $\mathbb{R}$. Случайный процесс η называется *дифференцируемым в среднем справа (слева) на* (ε, τ), если в каждой точке $t \in (\varepsilon, \tau)$ существует производная в среднем справа (слева).

Итак, пусть случайный процесс $\eta \in \mathbf{CL_2}$ дифференцируем в среднем справа (слева) на (ε, τ). Его производная в среднем справа (слева) тоже будет случайным процессом, который мы обозначим символом $D\eta$ $(D_*\eta)$. Если случайный процесс $\eta \in \mathbf{CL_2}$ дифференцируем в среднем как справа, так и слева на (ε, τ), то можно определить *симметрическую (антисимметрическую) производную в среднем* $D_S\eta = \frac{1}{2}(D + D_*)\,\eta$ $\left(D_A\eta = \frac{1}{2}(D_* - D)\,\eta\right)$. Поскольку производные в среднем ввел в рассмотрение Е. Нельсон [19], а теорию таких производных развил Ю.Е. Гликлих [2], то в дальнейшем, краткости ради, симметрическую производную в среднем D_S случайного процесса η будем называть *производной Нельсона – Гликлиха* и обозначать $\overset{o}{\eta}$, т.е. $D_S\eta \equiv \overset{o}{\eta}$. Через $\overset{o}{\eta}{}^{(l)}$ обозначим l-тую производную Нельсона – Гликлиха случайного процесса η, $l \in \mathbb{N}$. Отметим, что если траектории случайного процесса η п.н. непрерывно дифференцируемы в «обычном смысле» на (ε, τ), то их производная Нельсона – Гликлиха совпадает с «обычной» производной. Так, например, обстоит дело со случайным процессом $\eta = \alpha\sin(\beta t)$, где α – гауссова случайная величина, $\beta \in \mathbb{R}_+$ – некоторая фиксированная константа, а $t \in \mathbb{R}$ имеет физический смысл времени.

Теорема 1.2. (Ю.Е. Гликлих) $\overset{o}{\beta}{}^{(l)}(t) = (-1)^{l+1}(2t)^{-l}\beta(t)$ *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $l \in \mathbb{N}$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2$, $l \in \mathbb{N}$, случайных процессов из $\mathbf{CL}_2$, чьи траектории п.н. дифференцируемы по Нельсону – Гликлиху на $\mathfrak{I}$ до порядка l включительно. Если $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}_+$, то из теоремы 1.2 следует существование производной $\overset{o}{\beta} \in \mathbf{C}^1\mathbf{L}_2$, которую мы называем (*одномерным*) *«белым шумом»*. В [14] пространства $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2$ предложено называть *пространствами дифференцируемых «шумов»*.

Теперь фиксируем $k \in \mathbb{N}$, возьмем k независимых случайных процессов $\{\eta_1(t), \eta_2(t), ..., \eta_k(t)\}$ и формулой

$$\Theta(t) = \sum_{j=1}^{k} \eta_j(t)e_j,$$

где e_j – орты, $j = \overline{1,k}$, зададим *k-мерный случайный процесс* (короче, *k-случайный процесс*). Очевидно, что п.н. все его траектории непрерывны, если $\eta_j \in \mathbf{CL}_2$, $j = \overline{1,k}$, и непрерывно дифференцируемы по Нельсону – Гликлиху до порядка l включительно, если $\eta_j \in \mathbf{C}^l\mathbf{L}_2$, $j = \overline{1,k}$. По аналогии с предыдущим введем в рассмотрение пространства непрерывных $\mathbf{C}_k\mathbf{L}_2$ и непрерывно дифференцируемых $\mathbf{C}^l_k\mathbf{L}_2$ k-мерных «шумов». В качестве примера рассмотрим k-мерный винеровский процесс (*k-винеровский процесс*)

$$W_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j(t)e_j, \tag{1.1}$$

где β_j, $j = \overline{1,k}$ – независимые броуновские движения. Из теоремы 1.2 с очевидностью вытекает

Следствие 1.1. $\overset{o}{W}{}_k^{(l)}(t) = (-1)^{l+1}(2t)^{-l}W_k(t)$ *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$, $k, l \in \mathbb{N}$.

Из (1.1) следует, что k-винеровский процесс W_k удовлетворяет свойствам (W1) – (W3), если в них символ β заменить символом W_k. Считаем, что такая замена сделана, тогда верна

Теорема 1.3. *При любом $k \in \mathbb{N}$ с вероятностью 1 существует единственный k-винеровский процесс W_k, удовлетворяющий условиям (W1) – (W3), причем его можно представить в виде (1.1).*

Теперь пусть $\mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство; рассмотрим оператор $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, спектр $\sigma(K)$ которого неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к нулю. Обозначим через $\{\lambda_j\}$ последовательность собственных значений оператора K, занумерованных по невозрастанию с учетом их кратности. Отметим, что линейная оболочка множества $\{\varphi_j\}$ соответствующих ортонормированных собственных векторов оператора K плотна в $\mathfrak{U}$. Предположим еще, что оператор K – ядерный (т.е. его след $\operatorname{Tr} K = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j < +\infty$).

Возьмем последовательность независимых случайных процессов $\{\eta_j\}$ и определим K-случайный процесс

$$\Theta_K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\eta_j(t)\varphi_j \tag{1.2}$$

при условии, что ряд (1.2) равномерно сходится на любом компакте из $\mathfrak{I}$. Заметим, что, если $\{\eta_j\} \subset \mathbf{CL}_2$, то из существования K-случайного процесса Θ_K следует п.н. непрерывность его траекторий. Введем в рассмотрение производные Нельсона – Гликлиха K-случайного процесса

$$\overset{o}{\Theta}{}_K^{(l)}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\, \overset{o}{\eta}{}_j^{(l)}(t)\varphi_j \tag{1.3}$$

при условии, что производные в правой части (1.3) до порядка l включительно существуют, и все ряды равномерно на любом компакте из $\mathfrak{I}$ сходятся. Аналогично конечномерному случаю введем в рассмотрение пространство $\mathbf{C}_K\mathbf{L}_2$ K-случайных процессов, чьи траектории п.н. непрерывны, и пространства $\mathbf{C}^l_K\mathbf{L}_2$ K-случайных процессов, чьи траектории п.н. непрерывно дифференцируемы по Нельсону – Гликлиху до порядка $l \in \mathbb{N}$ включительно.

В качестве примера рассмотрим K-винеровский процесс

$$W_K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\beta_j(t)\varphi_j, \tag{1.4}$$

который, очевидно, существует на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Более того, справедливо

Следствие 1.2. $\overset{o}{W}{}_K^{(l)}(t) = (-1)^{l+1}(2t)^{-l}W_K(t)$ *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$, $l \in \mathbb{N}$ *и ядерных операторах* $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$.

Кроме того, K-винеровский процесс (1.4) удовлетворяет условиям (W1) – (W3), если в них символ β заменить символом W_K. И если такая замена сделана, то справедлива

Теорема 1.4. *При любом ядерном операторе* $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ *с вероятностью 1 существует единственный* K*-винеровский процесс, удовлетворяющий условиям (W1) – (W3), причем его можно представить в виде (1.4).*

2. Стохастические уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейны и непрерывны). Следуя [20], введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\right\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Если L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M ограничен, то оператор M называется (L,σ)-ограниченым. Если оператор M (L,σ)-ограничен, то существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} L^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}).$$

Здесь $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – *правая*, а $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – *левая L-резольвенты* оператора M, а замкнутый контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L(M)$. Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{U}^1) = \ker P(\mathrm{im}P)$, $\mathfrak{F}^0(\mathfrak{F}^1) = \ker Q(\mathrm{im}Q)$ и через $L_k(M_k)$ обозначим сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 2.1. (теорема о расщеплении [6, 15, 20]) *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, тогда*

(i) операторы $L_k(M_k) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Построим операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Следствие 2.1. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, тогда при всех $\mu \in \rho^L(M)$*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

Оператор M называется *(L, p)-ограниченным,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если ∞ – устранимая особая точка (т.е. $H \equiv \mathbb{O}, p = 0$) или полюс порядка $p \in \mathbb{N}$ (т.е. $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$) *$L$-резольвенты* $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M.

Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta + N\omega, \tag{2.1}$$

где свободный член будет определен позже. Дополним уравнение (2.1) начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$\left[R^L_\alpha(M)\right]^{p+1} (\eta\,(0) - \xi_0) = 0, \tag{2.2}$$

о преимуществах которого по сравнению с условием Коши

$$\eta(0) = \xi_0 \tag{2.3}$$

мы говорили выше. В дальнейшем наряду с условием (2.2) нам придется рассматривать еще и *ослабленное* (в смысле С.Г. Крейна) *условие Шоуолтера – Сидорова*

$$\lim_{t \to 0+} \left[R^L_\alpha(M)\right]^{p+1} (\eta\,(t) - \xi_0) = 0. \tag{2.4}$$

Считаем далее, что $\mathfrak{I} = [0, \tau)$. Пусть $\mathfrak{U}$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – ядерный оператор, чьи собственные значения $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}_+$. Назовем K-случайный процесс $\eta \in \mathbf{C}^1_K\mathbf{L}_2$ (*классическим*) *решением уравнения* (2.1), если п.н. все его траектории удовлетворяют уравнению (2.1) при некотором K-случайном процессе $w \in \mathbf{C}_K\mathbf{L}_2$, операторе $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и всех $t \in (0, \tau)$. Решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (2.1) назовем (*классическим*) *решением* задачи (2.1), (2.4), если вдобавок выполнено условие (2.4). Классические решения задач (2.1), (2.2) и (2.1), (2.3) определяются аналогично. Заметим, что из выполнения (2.2) следует выполнение (2.3), а из выполнения (2.3) – выполнение (2.4). Рассмотрим сначала задачу (2.3) для однородного уравнения (2.1)

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta. \tag{2.5}$$

В этом (и только в этом) случае считаем $\mathfrak{I} = \mathbb{R}$.

Определение 2.1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2.5), если

(i) п.н. любая траектория решения $\eta = \eta(t)$ лежит в $\mathfrak{P}$ поточечно, т.е. $\eta(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любой случайной величине $\xi_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение $\eta \in \mathbf{C}^1_K\mathbf{L}_2$ задачи (2.5), (2.3).

Теорема 2.2. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения (2.5) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$.*

Действительно, в силу теоремы 2.1 уравнение (2.5) редуцируется к эквивалентной системе
$$H \overset{o}{\eta}{}^0 = \eta^0, \ \overset{o}{\eta}{}^1 = S\eta^1, \tag{2.6}$$
где $\eta^0 = (\mathbb{I} - P)\eta$, $\eta^1 = P\eta$. Дифференцируя по Нельсону – Гликлиху первое уравнение в (2.6) и умножая слева на H, последовательно получим
$$0 = H^{p+1} \overset{o}{\eta}{}^{0(p+1)} = ... = H^2 \overset{o}{\eta}{}^{0(2)} = ... = H \overset{o}{\eta}{}^0 = \eta^0.$$
Условие (i) определения 2.1, таким образом, выполняется. Для выполнения условия (ii) заметим, что, если $\xi_0 \in \mathfrak{U}^1$, то единственное решение задачи (2.6), (2.3) существует и имеет вид $\eta^1 = \eta^1(t) = e^{tS}\xi_0$, где $e^{tS} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k S^k}{k!}$. Тогда, единственное решение задачи (2.5), (2.3) при $\xi_0 \in \mathfrak{U}^1$ будет иметь вид $\eta(t) = (\mathbb{O}(\mathbb{I} - P) + e^{tS}P)\xi_0$.

Следствие 2.2. *В условиях теоремы 2.2 решение задачи (2.5), (2.3) – гауссов K-случайный процесс, если случайная величина ξ_0 – гауссова.*

Определение 2.2. Отображение $U^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ называется *группой разрешающих операторов*, если
$$U^s U^t = U^{s+t} \text{ при всех } s, t \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$
Группа $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ называется *голоморфной*, если она аналитически продолжима во всю комплексную плоскость с сохранением свойства (*); и вырожденной, если ее единица $U^0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ является проектором.

Хорошим примером голоморфной вырожденной группы служит разрешающая группа $U^t = \mathbb{O}(\mathbb{I} - P) + e^{tS}P$ уравнения (2.5). Рассмотрим ее подробнее. Пусть $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ – некоторая голоморфная вырожденная группа, введем в рассмотрение ее образ $\operatorname{im} U^\bullet = \operatorname{im} U^0$ и ядро $\ker U^\bullet = \ker U^0$. Назовем эту группу *разрешающей группой уравнения* (2.5), если ее образ совпадает с фазовым пространством данного уравнения.

Теорема 2.3. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда существует единственная разрешающая группа уравнения (2.5)*
$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Здесь $\gamma \subset \mathbb{C}$ – тот же контур, что и в проекторах P, Q. Доказательство теоремы 2.3 см., напр., в [20]. Сделаем ряд замечаний. Во-первых, очевидно, что единицей группы (2.7) служит проектор P. Отсюда в силу теоремы 2.1 $U^t = \mathbb{O}(\mathbb{I} - P) + e^{tS}P$. Во-вторых, в силу той же теоремы условия (2.2) и (2.4) эквивалентны соответственно следующим условиям:
$$P(\eta(0) - \xi_0) = 0 \text{ и } \lim_{t \to 0+} P(\eta(t) - \xi_0) = 0. \tag{2.8}$$

Таким образом, справедлива

Лемма 2.1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда при любой случайной величине $\xi_0 \in \mathbf{L}_2$ существует единственное решение $\eta \in \mathbf{C}_K^\infty \mathbf{L}_2$ задачи (2.5), (2.2), которое к тому же имеет вид $\eta(t) = U^t \xi_0$, $t \in \mathbb{R}$. Если вдобавок ξ_0 принимает значения только в $\mathfrak{U}^1$, то данное решение будет также единственным решением задачи (2.5), (2.3).*

Вернемся теперь к уравнению (2.1) и напомним, что теперь $\mathfrak{I} = [0,\tau)$. Пусть K-случайный процесс $w = w(t), t \in [0,\tau)$ таков, что

$$(\mathbb{I} - Q)Nw \in \mathbf{C}_K^{p+1}\mathbf{L}_2 \text{ и } QNw \in \mathbf{C}_K \mathbf{L}_2, \tag{2.9}$$

тогда K-случайный процесс

$$\eta(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N \overset{o}{\omega}{}^{(q)}(t) + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} QN\omega(s)ds \tag{2.10}$$

является единственным классическим решением задачи (2.1), (2.2) при $\xi_0 \in \mathfrak{U}^0$. Доказательство см., напр., в [20]. Итак, справедлива

Лемма 2.2. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда при любом K-случайном процессе $w = w(t)$ таком, что выполнено (2.9), и любой случайной величине $\xi_0 \in \mathfrak{U}^0$ независимой от w существует единственное решение $\eta \in \mathbf{C}_K^1 \mathbf{L}_2$ задачи (2.1), (2.2), которое к тому же имеет вид (2.10). Если вдобавок $\xi_0 = -\sum\limits_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N \overset{o}{\omega}{}^{(q)}(0)$, то данное решение будет также единственным решением задачи (2.1), (2.3).*

Теорема 2.4. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда при любом $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, любом K-случайном процессе $w = w(t)$ таком, что выполнено (2.9), и любой случайной величине $\xi_0 \in \mathbf{L}_2$, не зависящей от w, существует единственное решение $\eta \in \mathbf{C}_K^1 \mathbf{L}_2$ задачи (2.1), (2.2), которое к тому же имеет вид*

$$\eta(t) = U^t \xi_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} QN\omega(s)ds - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N \overset{o}{\omega}{}^{(q)}(t). \tag{2.11}$$

Если вдобавок ξ_0 такая, что

$$(P - \mathbb{I})\xi_0 = \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N \overset{o}{\omega}{}^{(q)}(0), \tag{2.12}$$

то решение (2.11) будет также единственным решением задачи (2.1), (2.3).

Теорема 2.4 является почти дословным переносом детерминированного случая на стохастическое уравнение (2.1), поэтому доказательство ее опускается. Однако «белый шум» $w(t) = (2t)^{-1} W_K(t)$ не удовлетворяет условию (2.9), поэтому не может быть в правой части (2.1). Один из возможных подходов к преодолению этой трудности предложен в [5, 6] (кстати, он годится и для традиционного белого шума). Чтобы воспользоваться этим подходом, преобразуем второе слагаемое в правой части (2.10) следуюшим образом:

$$\int_\varepsilon^t U^{t-s} L_1^{-1} QN \overset{o}{W}_K(s)ds = L_1^{-1} QN(W_K(t) - W_K(\varepsilon)) - SP \int_\varepsilon^t U^{t-s} L_1^{-1} QNW_K(s)ds. \tag{2.13}$$

Интегрирование по частям имеет смысл при любых $\varepsilon \in (0,t), t \in \mathbb{R}_+$ в силу определения производной Нельсона – Гликлиха. Переходя в (2.13) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} QN \overset{o}{W}_K(s)ds = L_1^{-1} QNW_K(t) - SP \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} QNW_K(s)ds. \tag{2.14}$$

Следствие 2.3. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, а оператор N таков, что*

$$QN = N. \tag{2.15}$$

Пусть $\mathfrak{I} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. Тогда при любой случайной величине $\xi_0 \in \mathbf{L}_2$, не зависящей от W_K, существует единственное решение $\eta \in \mathbf{C}_K^1\mathbf{L}_2$ задачи (2.2) для уравнения

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta + N \overset{o}{W}_K, \tag{2.16}$$

которое к тому же имеет вид

$$\eta(t) = U^t\xi_0 + L_1^{-1}NW_K(t) - SP \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} NW_K(s)ds. \tag{2.17}$$

Если вдобавок ξ_0 принимает значения только в $\mathfrak{U}^1$, то (2.17) является единственным решением задачи (2.3) для уравнения (2.16).

Понятно, что (2.17) получено из (2.10) в силу (2.15) и предельного перехода (2.13) $\to$ (2.14). Причем условие (2.15) здесь играет главную роль. Чтобы от него избавиться, назовем K-случайный процесс $\eta \in \mathbf{C}_K^1\mathbf{L}_2$ (*классическим*) *решение уравнения* (2.16), если п.н. все его траектории удовлетворяют (2.16) поточечно на $\mathbb{R}_+$. И назовем решение $\eta = \eta(t)$ *решением задачи* (2.16), (2.4), если $\eta(t)$ удовлетворяет еще и условию (2.4).

Теорема 2.5. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда при любом $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и любой $\mathfrak{U}$-значной случайной величине $\xi_0 \in \mathbf{L}_2$, не зависящей от W_K, существует единственное решение $\eta = \eta(t)$ задачи (2.16), (2.4), которое к тому же имеет вид*

$$\eta(t) = U^t\xi_0 + L_1^{-1}[QNW_K(t) - M_1 \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} QNW_K(s)ds] - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N \overset{o}{W}_K^{(q+1)}(t).$$

Доказательство теоремы заключается в ссылках на теоремы 2.1 и 2.4, а также на второе соотношение (2.8).

3. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной с аддитивным «белым шумом»

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d (d \in \mathbb{N})$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞. Фиксируем $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и положим $\mathfrak{F} = W_2^l(D)$, $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{l+2}(D) : u(x) = 0, x \in \partial D\}$. Очевидно, $\mathfrak{U}$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, плотно и непрерывно вложенное в $\mathfrak{F}$. Фиксируем $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ и построим операторы $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta$, где Δ – оператор Лапласа. Как известно (см., напр., [21], гл. 5), операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор L фредгольмов при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Рассмотрим стохастическое уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta + N\omega, \tag{3.1}$$

где $\eta = \eta(t)$ – искомый, $w = w(t)$ – заданный случайные процессы на интервале $(0, \tau)$. Оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ подлежит в дальнейшем уточнению. Приведем давно и хорошо известный результат (см., напр., [20] или [22], гл. 1).

Лемма 3.1. *При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L, 0)$-ограничен.*

Пусть $\{\nu_j\}$ – последовательность собственных чисел оператора Лапласа (определенного в D с однородными граничными условиями Дирихле), занумерованная по невозрастанию с учетом их кратности, $\{\varphi_j\}$ – соответствующие ортонормированные (в смысле $\mathfrak{U}$) собственные функции. Построим проектор $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$,

$$P = \begin{cases} \mathbb{I},\ \lambda \neq \nu_j \text{ при всех} j \in \mathbb{N}; \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda = \nu_j} \langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j, \text{если} \lambda = \lambda_j. \end{cases}$$

Приведем ослабленное условие Шоуолтера – Сидорова в виде (2.8)

$$\lim_{t \to 0+} P(\eta\,(t) - \xi_0) = 0. \tag{3.2}$$

Введем в рассмотрение $\mathfrak{U}$-значные K-случайные процессы. Построим оператор $\Lambda = (-1)^{m-1}\Delta^m$ с областью определения $\mathrm{dom}\Lambda = \{W_2^{l+2(m+1)}(D) : \Delta^k u(x) = 0, x \in \partial D, k \in 0, 1, ..., m-1\}, m \in \mathbb{N}$. Заметим, что оператор Λ будет иметь те же собственные функции $\{\varphi_j\}$, что и оператор Лапласа, однако его спектр будет состоять из собственных значений вида $|\nu_j|^m$. Поскольку асимптотика этих собственных чисел будет иметь вид $\nu_j^m \sim j^{\frac{2m}{d}} \to \infty, j \to \infty$, то мы считаем, что число $m \in \mathbb{N}$ выбрано таким образом, чтобы ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\nu_j|^{-m}$ сходился при фиксированном $d \in \mathbb{N}$. Далее, оператор Λ непрерывно обратим на $\mathfrak{U}$, причем обратный оператор (т.е. оператор Грина) имеет спектр, состоящий из собственных значений $\lambda_j = |\nu_j|^{-m}$. Именно этот оператор мы возьмем в качестве ядерного оператора K.

Итак, на $\mathbb{R}_+$ рассмотрим стохастическое уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta + N \overset{o}{W}_K, \tag{3.3}$$

где $W = W(t)$ – $\mathfrak{U}$-значный K-винеровский процесс. Итак, в силу теоремы 2.5 справедлива

Теорема 3.1. *При любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ и $\xi_0 \in \mathbf{L}_2$, не зависящей от W_K существует единственное решение $\eta = \eta(t)$ задачи (3.3), (3.2), которое к тому же имеет вид*

$$\eta(t) = U^t\xi_0 + L_1^{-1}[QNW_K(t) - M_1 \int\limits_0^t U^{t-s} L_1^{-1} QNW_K(s)ds] - M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N \overset{o}{W}_K(t).$$

Здесь

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\infty} e^{t\mu_j} \langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j, \text{ если} \lambda \neq \nu_j \text{ при всех } j \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{j=1,\, \lambda \neq \nu_j}^{\infty} e^{t\mu_j} \langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$\mu_j = \alpha\nu_j(\lambda - \nu_j)^{-1}$,

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\infty} (\lambda - \nu_j)^{-1}[\cdot, \psi_j]\psi_j, \text{если} \lambda \neq \nu_j \text{ при всех } j \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{j=1,\, \lambda \neq \nu_j}^{\infty} (\lambda - \nu_j)^{-1}[\cdot, \psi_j]\psi_j, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$\mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если} \lambda \neq \nu_j \text{ при всех } j \in \mathbb{N}; \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda=\nu_j} [\cdot, \psi_j]\psi_j, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

ψ_j – это собственные функции оператора Лапласа, ортонормированные в смысле $\mathfrak{U}$, $[\cdot,\cdot]$ – скалярное произведение в $\mathfrak{U}$, символ $\mathbb{I}$ обозначает единичный оператор вне зависимости от области его определения,

$$M_1 = \begin{cases} \alpha \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j, \text{ если} \lambda \neq \nu_j \text{ при всех } j \in \mathbb{N}; \\ \alpha \sum\limits_{j=1,\, \lambda\neq\nu_j}^{\infty} \lambda_j \langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Литература

1. Arato, M. Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach / M. Arato. – Berlin; Heidelberg; N.-Y.: Springer, 1982.
2. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London; Dordrecht; Heidelberg; N.-Y.: Springer, 2011.
3. Da Prato, G. Stochastic Equations in Infinite Dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
4. Kovacs, M. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations / M. Kovacs, S. Larsson // Proceedings of «New Directions in the Mathematical and Computer Sciences», National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. V. 4. – Lagos: Publications of the ICMCS, 2008. – P. 159–232.
5. Замышляева, А.А. Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40, вып. 14. – С. 73–82.
6. Загребина, С.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2013. – № 1. – С. 20–34.
7. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, M.A. Alshansky // J. of Mathematical Sciences. – 2003. – V. 116, № 5. – P. 3620–3656.
8. Melnikova, I.V. Generalized Solutions to Abstract Stochastic Problems / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // J. Integ. Transf. and Special Funct. – 2009. – V. 20, № 3–4. – P. 199–206.
9. Шестаков, А.Л. О новой концепции белого шума / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 287.
10. Shestakov, A.L. On the Measurement of the «White Noise» / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 99–108.
11. Гликлих, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю.Е. Гликлих // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 24–34.

12. Shestakov, A.L. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 70–75.
13. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
14. Шестаков, А.Л. Динамические измерения в пространствах «шумов» / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013. – Т. 13, № 2. – С. 4–11.
15. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.
16. Куропатенко, В.Ф. Мезомеханика однокомпонентных и многокомпонентных материалов / В.Ф. Куропатенко // Физическая мезомеханика. – 2001. – Т. 4, № 3. – С. 49–55.
17. Куропатенко, В.Ф. Обмен импульсом и энергией в неравновесных многокомпонентных средах / В.Ф. Куропатенко // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – № 1. – С. 7–15.
18. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.
19. Nelson, E. Dynamical Theories of Brownian Motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967.
20. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.
21. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
22. Свиридюк Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск: Челябинский гос. ун-т, 2003. – 179 с.

Георгий Анатольевич Свиридюк, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), sviridyuk@susu.ac.ru.

Наталья Александровна Манакова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), manakova@susu.ac.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 1, pp. 90–103.

MSC 60H30 **DOI: 10.14529/mmp140108**

The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter – Sidorov Condition and Additive "Noise"

G.A. Sviridyuk, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, sviridyuk@susu.ac.ru,
N.A. Manakova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, manakova@susu.ac.ru

The concept of "white noise", initially established in finite-dimensional spaces, has been transfered to infinite-dimensional spaces. The goal of this transition is to develop the theory of stochastic Sobolev type equations and to elaborate applications of practical value. The derivative of Nelson – Gliklikh is entered to reach this goal, as well as the spaces of "noises" are developed. The equations of Sobolev type with relatively bounded operators are considered in the spaces of differentiable "noises". Besides, the existence and uniqueness of their classical solutions are proved. A stochastic equation of Barenblatt – Zheltov – Kochina is considered as an application in bounded domain with homogeneous boundary condition of Dirichlet and initial condition of Showalter – Sidorov.

Keywords: the Sobolev type equations; Wiener process; Nelson – Gliklikh derivative; "white noise"; space of "noise"; stochastic equation of Barenblatt–Zheltov–Kochina.

References

1. Arato M. *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach.* Berlin, Heidelberg, N.-Y., Springer, 1982. DOI: 10.1007/BFb0043631
2. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.* London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9
3. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Cambridge, Cambridge University Press, 1992. DOI: 10.1017/CBO9780511666223
4. Kovacs M., Larsson S. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations. *Proceedings of "New Directions in the Mathematical and Computer Sciences National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. V. 4.* Lagos, Publications of the ICMCS, 2008, pp. 159–232.
5. Zamyshlyaeva A.A. Stochastic Incomplete Linear Sobolev Type High-Ordered Equations with Additive White Noise. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, no. 40, issue 14, pp. 73–82. (in Russian)
6. Zagrebina S.A., Soldatova E.A. The Linear Sobolev-Type Equations With Relatively p-bounded Operators and Additive White Noise. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"], 2013, vol. 6, no. 1, pp. 20–34. (in Russian)
7. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions. *J. of Mathematical Sciences,* 2003, vol. 116, no. 5, pp. 3620–3656. DOI: 10.1023/A:1024159908410
8. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Generalized Solutions to Abstract Stochastic Problems. *J. Integ. Transf. and Special Funct.,* 2009, vol. 20, no. 3–4, pp. 199–206. DOI: 10.1080/10652460802567574
9. Shestakov A.L., Sviridyuk G. A. On a New Conception of White Noise. *Obozrenie Prikladnoy i Promyshlennoy Matematiki*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 287–288. (in Russian)
10. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On the Measurement of the "White Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, no. 27 (286), issue 13, pp. 99–108.
11. Gliklikh Yu.E. Investigation of Leontieff Type Equations with White Noise Protect by the Methods of Mean Derivatives of Stochastic Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, no. 27 (286), issue 13, pp. 24–34. (in Russian)

12. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",* 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 70–75.

13. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control,* 2012, vol. 73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079

14. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Hudyakov Yu.V. Dynamic Measurement in Spaces of "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series "Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics"*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 4–11. (in Russian)

15. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter – Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev Type Equations. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"], 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russian)

16. Kuropatenko V.F. Mesomechanics Single-Component and Multicomponent Materials [Mezomekhanika odnokomponentnykh i mnogokomponentnykh materialov]. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical Mesomechanics], 2001, vol. 4, no. 3, pp. 49–55.

17. Kuropatenko V.F. Momentum and Energy Exchange in Nonequilibrium Multicomponent Media. *J. of Applied Mechanics and Technical Physics,* 2005, vol. 46, no. 1, pp. 1–8. DOI: 10.1007/s10808-005-0021-9

18. Kuropatenko V.F. New Models of Continuum Mechanics. *J. of Engineering Physics and Thermophysics,* 2011, vol. 84, no. 1, pp. 77–99. DOI: 10.1007/s10891-011-0457-0

19. Nelson E. *Dynamical Theories of Brownian Motion.* Princeton, Princeton University Press, 1967.

20. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

21. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* Heidelberg, Barth, 1995.

22. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Lineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear Sobolev Type Equations]. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University, 2003. 179 p.

Поступила в редакцию 10 декабря 2013 г.