

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА И ИНОРОДНЫХ ЧАСТИЦ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

*А.Н. Крайко*

Обсуждаются математические модели разного уровня, применяемые и развиваемые для описания течений смесей газа или жидкости и инородных (твердых или жидких) «макрочастиц» размера от микронов и более и нестационарной фильтрации жидкости и газа в пористых средах. В приближении взаимопроникающих сплошных сред (континуумов) отмечена роль «пелен» – разрывов с поверхностной плотностью частиц. В задачах о течениях смесей газа и инородных частиц наряду с приближением взаимопроникающих сплошных сред рассмотрена континуально-дискретная модель. В этой модели со сплошной средой газа или жидкости взаимодействует дискретное множество индивидуальных макрочастиц. Во многих задачах число таких частиц хотя и велико, но настолько меньше числа взаимодействующих с ними атомов и молекул газа или жидкости, что при современных вычислительных мощностях становится возможно интегрирование уравнений, описывающих движение и столкновения всех частиц, присутствующих в расчетной области. Существенно, что в континуально-дискретной модели делается это не по аналогии с кинетической теорией газов (такие подходы также известны) с функциями распределений по параметрам частиц (их размерам, скоростям и т.п.), а строго индивидуально. Применительно к нестационарной фильтрации жидкости рассмотрена модель мгновенного насыщения со связанной и несвязанной жидкостями и с особенностями движения переднего и заднего фронтов насыщения. Отмечены возможности феноменологического описания нестационарного протекания газа через поверхности разрыва пористости.

*Ключевые слова:* интегральные законы сохранения; «пелены» в моделях взаимопроникающих сплошных сред; континуально-дискретная модель; модель мгновенного насыщения, течения газа через поверхности разрыва пористости.

## 1. Модели взаимопроникающих континуумов

Восходящие к работе Х.А. Рахматулина [1] и развитые многими исследователями (см. [2–7]) широко используемые модели взаимопроникающих континуумов в общем случае допускают существование поверхностей разрыва. По этой причине исходными в таких моделях являются законы сохранения, записанные в интегральной форме («интегральные законы сохранения» – ИЗС). Если неидеальность несущей среды проявляется только в силовом и тепловом взаимодействиях с инородными (твердыми или жидкими) частицами «второй фазы», лишенной собственного давления, то в декартовых координатах  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) для произвольного заполненного газом и односкоростной и однотемпературной «сплошной средой частиц» независимого от времени  $t$  объема  $\Omega$  ИЗС имеют вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} A d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{B} n d\sigma = \int_{\Omega} C d\Omega. \quad (1)$$

Здесь  $\partial\Omega$  – поверхность, ограничивающая объем  $\Omega$ ,  $d\sigma$  – ее элемент,  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали,  $\rho_s$  – осредненная по физически бесконечно малому объему плотность второй («несомой») среды, а  $A$ ,  $\mathbf{B}$  и  $C$  – функции параметров потока, приведенные в таблице. В ней  $\mathbf{V}$  –

вектор скорости с проекциями  $V_k$  на оси декартовых координат;  $V = |\mathbf{V}|$ ;  $\mathbf{i}_k$  – орты осей  $x_k$ ;  $p, \rho, e$  и  $h$  – давление, плотность, удельные внутренняя энергия и энтальпия газа; индекс « $s$ » метит аналогичные параметры второй среды, а «градус» – истинную плотность частиц; наконец,  $q$  и вектор  $\mathbf{f}$  с компонентами  $f_k$  определяют тепловое и силовое взаимодействия сред. Законы сохранения (1) с  $A, \mathbf{B}$  и  $C$  из табл. 1 замыкаются уравнениями состояния обеих сред (для среды твердых частиц это связь их внутренней энергии и температуры) и выражениями для  $q$  и  $\mathbf{f}$ .

Таблица 1

Функции  $A, \mathbf{B}$  и  $C$  ИЗС для течений газа и инородных частиц

ИЗС	$A$	$\mathbf{B}$	$C$
массы газа	$\rho$	$\rho\mathbf{V}$	0
кол-ва дв. смеси	$\rho V_k + \rho_s V_{sk}$ ( $k = 1, 2, 3$ )	$\rho V_k \mathbf{V} + \rho_s V_{sk} \mathbf{V}_s + p \mathbf{i}_k$	0
энергии смеси	$\rho(2e + V^2) + \rho_s(2e_s + V_s^2)$	$\rho\mathbf{V}(2h + V^2) + \rho_s \mathbf{V}_s(2h_s + V_s^2),$ $h_s = e_s + p/\rho_s^\circ$	0 0
массы 2-й фазы	$\rho_s$	$\rho_s \mathbf{V}_s$	0
кол-ва дв. 2-й фазы	$\rho_s V_{sk}$ ( $k = 1, 2, 3$ )	$\rho_s V_{sk} \mathbf{V}_s + m_s p \mathbf{i}_k,$ $m_s = \rho_s / \rho_s^\circ$	$\rho_s f_k$
энергии 2-й фазы	$\rho_s(2e_s + V_s^2)$	$\rho_s \mathbf{V}_s(2h_s + V_s^2)$	$2\rho_s(q + \mathbf{fV}_s)$

ИЗС представляют собой математические формулировки соответствующих законов механики. Их следствия – дифференциальные уравнения, справедливые в подобластях непрерывности параметров, и соотношения на поверхностях разрыва. Анализ этих соотношений, в частности, позволяет установить, какие поверхности разрыва возможны в таких средах. При рассмотрении двухфазных течений в приближении механики взаимопроникающих континуумов особое внимание следует уделять ситуациям, которые возникают при пересечениях траекторий «сплошных сред частиц», возможных при пренебрежении «собственным давлением» в этой среде. Как показано в [5, 6, 8–11] и на рис. 1, такие пересечения в рассматриваемой модели требуют либо увеличения числа различающихся скоростями сплошных сред частиц (рис. 1, *a*), либо введения разрывов («пелен») с поверхностной плотностью  $R_s$  инородных частиц (рис. 1, *b*). Оба подхода обеспечивают корректность, на первый взгляд, «некорректной» (в рамках рассматриваемой модели) задачи Коши [12, 13]. Причину кажущейся некорректности задачи Коши и почему она в действительности корректна, для одномерной задачи с плоскими волнами поясняет рис. 2. На нем показано начальное синусоидальное возмущение скорости частиц  $V_{s0}$  и дальнейшее развитие течения без увеличения числа сред второй фазы.

Пусть все начальные параметры обеих сред не зависят от координаты  $x$  при  $-\infty < x < \infty$ . Решение такой задачи Коши сводится к интегрированию по времени обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся из (1), без каких-либо особенностей, по крайней мере, для конечного времени  $t$ . Другое дело, если все отличные от  $V_{s0}$  начальные параметры остались прежними, а начальная скорость частиц возмущена, как показано на рис. 2. Зафиксировав в этом случае малую амплитуду возмущения, начнем уменьшать его период  $\Delta$ . Можно показать, что при этом в некоторый момент времени  $t_*$  на каждом перио-

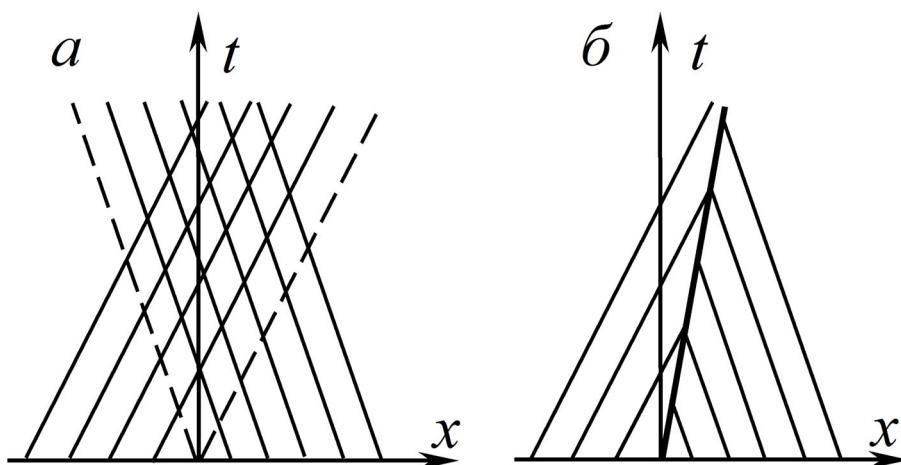


Рис. 1. Пересечение траекторий сплошной среды частиц: *а* – переход к двускоростной среде частиц, *б* – введение пелены без увеличения числа сплошных сред

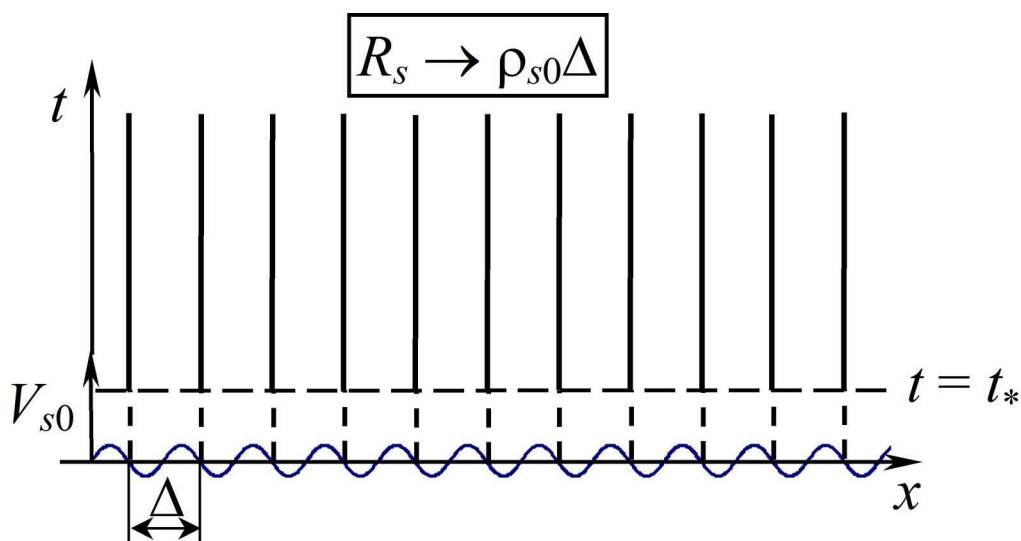


Рис. 2. К корректности задачи Коши

де по  $x$  возникнет пересечение траекторий частиц. В точках пересечения плотность частиц  $\rho_s$  обратится в бесконечность, а это, вроде бы, признак некорректности. В действительности обращение в бесконечность  $\rho_s$  – свидетельство возникновения пелен. Поверхностная плотность частиц на всех пеленах  $R_s$ , равная нулю при  $t = t_*$ , при  $t \rightarrow \infty$  стремится к  $\rho_{s0}\Delta$ , где  $\rho_{s0}$  – начальная объемная плотность частиц. Следовательно, при синусоидальном возмущении скорости частиц каждая пелена собирает частицы с отрезка оси  $x$ , равного длине периода возмущения. При  $\Delta \rightarrow 0$  количество пелен на любом малом, но фиксированном отрезке оси  $x$  растет неограниченно, на всех пеленах  $R_s \rightarrow 0$ , а осредненные по отрезку плотность частиц и прочие параметры обеих сред получаются такими же, как в исходной невозмущенной задаче Коши. Это и доказывает корректность указанной задачи.

## 2. Континуально-дискретная модель

Рост быстродействия и памяти компьютеров сделал перспективной развитую К.С. Пьянковым [14] «континуально-дискретную» модель с расчетом движения всех инородных частиц, каждая из которых, взаимодействуя с газом, сталкивается с другими частицами. Некоторое представление о возможностях этой модели дают рис. 3–5, рассчитанные автором [14]. На них показаны мгновенные распределения частиц, полученные в рамках континуально-дискретной модели при одновременном присутствии в расчетной области  $10^4$ ,  $6,5 \cdot 10^3$  и  $4,6 \cdot 10^4$  частиц.

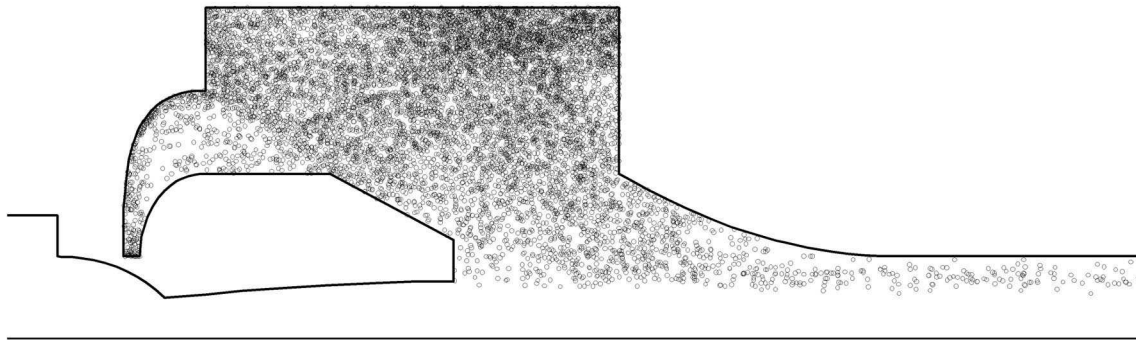


Рис. 3. Мгновенное распределение частиц диаметра 0,1 мм в эжекторном ускорителе с радиусом выхода 3 мм

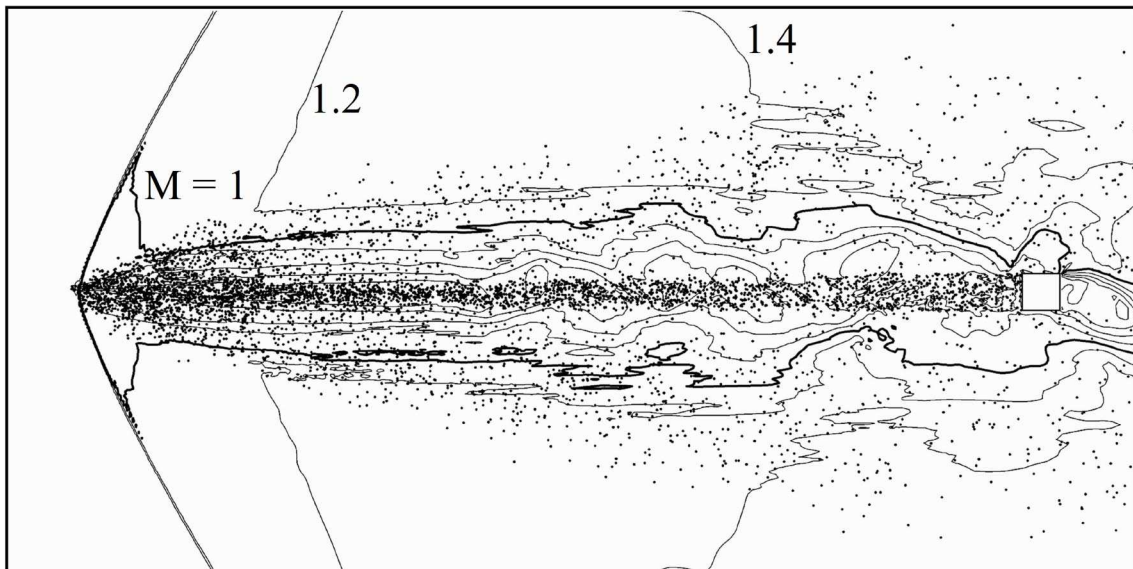
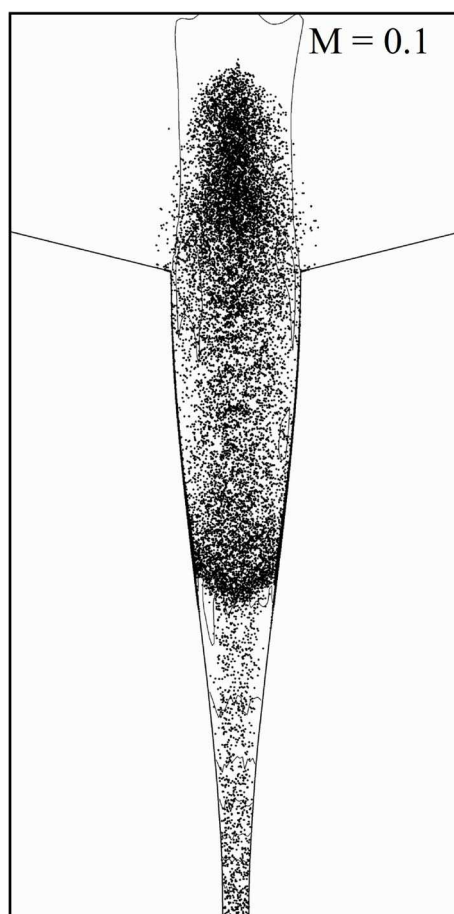


Рис. 4. Мгновенные изомахи и распределения частиц диаметра 0,3 мм, вылетающих со скоростью 170 м/с навстречу потоку воздуха с  $M_0 = 1,5$ ,  $p_0 = 1$ ,  $T_0 = 288$  К

Рис. 3 дает распределения частиц диаметра 0,1 мм в эжекторном ускорителе с равным 3 мм радиусом выходного патрубка. Плотность частиц  $\rho_s^0$  в 1000 раз больше плотности



**Рис. 5.** Мгновенное распределение частиц диаметра 0,1 мм, ускоряемых потоком воздуха против силы тяжести ( $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ), ширина канала на входе 2 мм, на выходе 10 мм, высота 50 мм

газа. На рис. 4 представлено взаимодействие частиц диаметра 0,3 мм, вылетающих из плоского насадка высоты 2 мм со скоростью 170 м/с навстречу потоку воздуха с  $M_0 = 1,5$ ,  $p_0 = 1$  атм. и  $T_0 = 288 \text{ К}$ . При  $\rho_s^0/\rho_0 = 200$  плотность тока частиц  $\rho_s V_s$  на выходе из насадка в шесть раз больше, чем  $\rho_0 V_0$ . На рис. 5 поток газа разгоняет частицы против силы тяжести с  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ . На входе в плоский расширяющийся канал  $\rho_s V_s$  в 8 раз меньше, чем  $\rho_0 V_0$ ,  $M_0 = 0,8$ , а прочие параметры такие же, как в предыдущем примере. После вылета из канала частицы, разлетаясь влево и вправо, под действием силы тяжести возвращались в канал и до окончания расчета, образовав две пелены, «текли» вниз по его стенкам. В приведенных примерах одновременно рассчитывалось движение  $10^4 - 10^5$  частиц, что значительно меньше предела, определяемого даже одним современным персональным компьютером.

В континуально-дискретной модели [14] громадное число пространственных столкновений частиц приводит к временной и пространственной хаотизации их траекторий. При значительной массовой доле частиц движение взаимодействующей с частицами сплошной среды (газа или жидкости), сохраняя плоскую, цилиндрическую или сферическую симметрию (если она была при отсутствии частиц) также становится нестационарным и хаотичным. В то же время для описания влияния такой хаотизации на турбулизацию потока двумерные уравнения Эйлера, Навье–Стокса или Рейнольдса (с учетом взаимодействия с инород-

ными частицами) непригодны. В связи этим следующим шагом в развитии континуально-дискретной модели может стать одновременное численное решение уравнений движения частиц и нестационарных пространственных уравнений течения взаимодействующего с ними газа. На современном этапе в качестве адекватного континуально-дискретной модели метода интегрирования уравнений турбулентного течения газа представляется перспективным метод крупных вихрей – «LES» [15, 16].

### 3. Упрощенные модели нестационарной фильтрации жидкости и газа

При расчетах нестационарной фильтрации жидкости в пористой среде наряду с достаточно сложными математическими моделями высокого уровня может оказаться полезной более простая «поршневая модель» [17] она же – «модель мгновенного насыщения» [18–21]. В этой модели в согласии с [22–24] при фильтрации в пористой среде есть две жидкости – «связанная» и «несвязанная», причем связанная жидкость покоится, а движение именно несвязанной жидкости подчиняется закону Дарси или его обобщениям и происходит только при полном заполнении порового пространства. Коэффициент фильтрации в законе Дарси определяет силовое взаимодействие несвязанной жидкости с пористой средой и со связанной жидкостью. Поровое пространство, включающее все хотя бы частично открытые поры, на «переднем фронте насыщения»  $\Gamma_+$  целиком заполняется жидкостью.

В отличие от реального процесса заполнения жидкостью капиллярных и глухих пор в модели мгновенного насыщения этот процесс происходит мгновенно и характеризуется одним коэффициентом  $0 < n \leq 1$ . За передним фронтом насыщения  $n$  и  $(1 - n)$  определяют доли порового пространства, занятые несвязанной и связанной жидкостями. Нормальная скорость переднего фронта насыщения по сухой (или частично сухой) пористой среде меньше нормальной к фронту насыщения компоненты скорости несвязанной жидкости  $V_N$ . При фильтрации в сухую пористую среду она равна  $nV_N$  (рис. 6). Нормальная скорость «заднего фронта насыщения»  $\Gamma_-$  равна нормальной к нему компоненте скорости несвязанной жидкости  $V_N$ . В рамках модели мгновенного насыщения за ним в пористой среде остается только связанная жидкость, занимающая  $(1 - n)$ -ую часть порового пространства.

Взятые из [20, 21] примеры применения модели мгновенного насыщения в задачах полива из одной и из периодической последовательности борозд приведены на рис. 7 и 8. На них в плоскости  $xu$  наряду с границей борозды  $x = 2,5y^2$  и уровнями воды в ней (горизонтальные отрезки:  $x = H$ ) показаны фронты насыщения для разных безразмерных времен  $\tau$ . Фильтрации при постоянном уровне воды ( $H \equiv 1$ ) для  $\tau > 0$  в одиночной борозде отвечает рис. 7, а, а из периодической системы борозд с расстоянием между ними  $\Delta y = 2$  – рис. 7, б. Рис. 7, в соответствует подъему воды в борозде. Сначала (при  $\tau = 0$ ) уровень воды от  $H = 0$  скачком поднялся до  $H = 0,1$ , до  $\tau = 0,25$  оставался постоянным, а затем при  $\tau > 0,25$  рос по закону:  $H(\tau) = 0,1 + \sin^2[0,45(\tau - 0,25)]$ . Соответствие значений  $\tau$  и номеров кривых на рис. 7, а-в одинаковое.

Рис. 8 отвечает одиночной борозде, в которой после мгновенного наполнения при  $\tau = 0$  уровень воды сначала оставался постоянным:  $H \equiv 1$  при  $0 < \tau < 0,25$ , а при  $\tau = 0,25$  мгновенно снижался либо до  $H = 0,1$  (рис. 8, а), либо до  $H = 0$  (рис. 8, б). В отличие от рис. 7 на рис. 8 есть не только передние, но и задние фронты насыщения, отмеченные одинаковыми цифрами.

При описании течений в пористом материале жидкости часто можно пренебречь в уравнениях движения ускорением жидкости, что существенно, как в [20, 21], упрощает решение. При описании нестационарных течений газа в пористой среде («материале») такие упрощения нередко оказываются неоправданными, в частности, при рассмотрении отражений

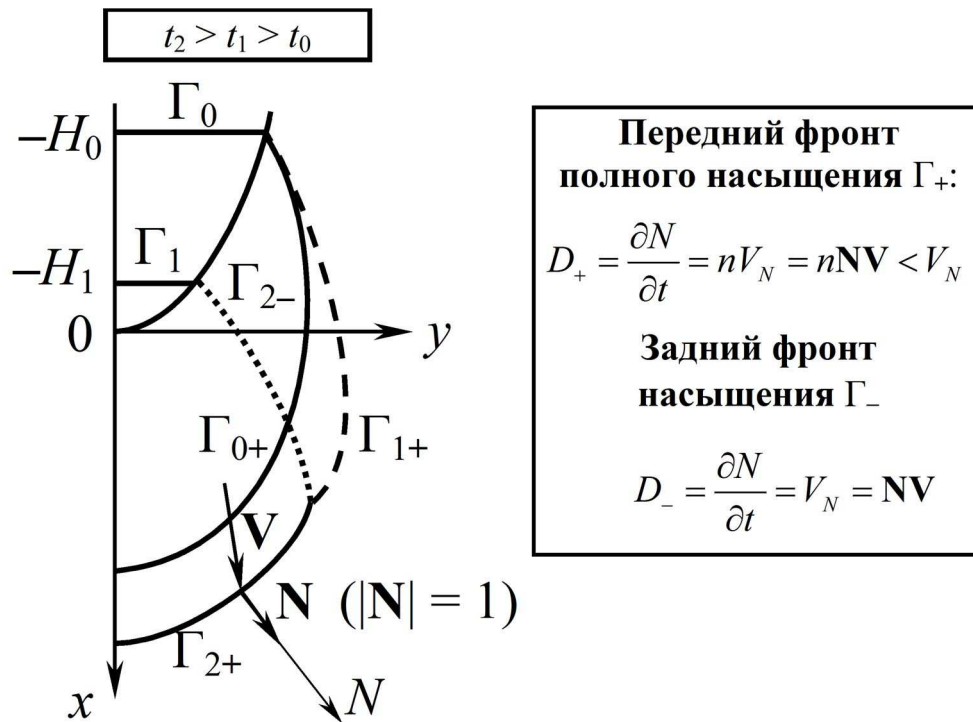


Рис. 6. Движение переднего и заднего фронтов – поверхностей разрыва в модели мгновенного насыщения

ударных волн от объектов из пористых материалов. В таких случаях необходимо опираться на интегральные законы сохранения (1) с соответствующим образом определенными подынтегральными функциями  $A$ ,  $\mathbf{V}$  и  $C$ . Ограничиваясь одной из простейших моделей, будем считать, что пористый материал абсолютно жесткий и изотропный, не содержит глухих пор и его тепловым расширением можно пренебречь. Кроме того, примем, что вязкость и теплопроводность газа важны только при его взаимодействии с пористым материалом. В такой модели течение газа описывается интегральными законами сохранения массы, количества движения и энергии, а тепловое состояние материала – его уравнением энергии.

Пусть  $m$  – пористость (относительный объем пор) материала,  $\rho$  и  $\rho_p$  – истинные плотности газа и материала,  $e_p$  – удельная внутренняя энергия материала,  $m(1 - m)\mathbf{f}$  – сила, с которой материал, находящийся в единице объема, действует на газ, а  $m(1 - m)\rho q$  – тепловой поток от этого материала к газу. Тогда перечисленные выше интегральные законы сохранения запишутся в форме (1) с  $A$ ,  $\mathbf{V}$  и  $C$ , приведенными в табл. 2.

Для замыкания уравнений (1) с  $A$ ,  $\mathbf{V}$  и  $C$  из табл. 2 наряду с уравнениями состояния газа:  $\rho = \rho(p, T)$ ,  $e = e(p, T)$  и материала:  $e_p = e_p(T_p)$ , в которых  $T$  и  $T_p$  – температуры, задаются выражения для  $\mathbf{f}$  и  $q$ :

$$\mathbf{f} \equiv m(1 - m)\mathbf{f} = p\nabla m - m(1 - m)\varphi_f \mathbf{V}, \quad q = \varphi_q(T_p - T). \quad (2)$$

Здесь  $\varphi_f$  и  $\varphi_q$  – известные положительно определенные функции скалярных параметров газа, включая  $V$ , и материала, но не их производных. В формуле для  $\mathbf{f}$  первое слагаемое дает силу, обусловленную изменением «проходного сечения» пор. Ее смысл легко понять из сопоставления с уравнениями квазиодномерного течения в канале переменной площади  $S = S(x)$ . В таком канале сила, действующая на газ со стороны стенок на участке канала, на котором  $S$  меняется на  $\Delta S = (dS/dx)\Delta x$ , равна  $p(dS/dx)\Delta x$ . Второе слагаемое той же

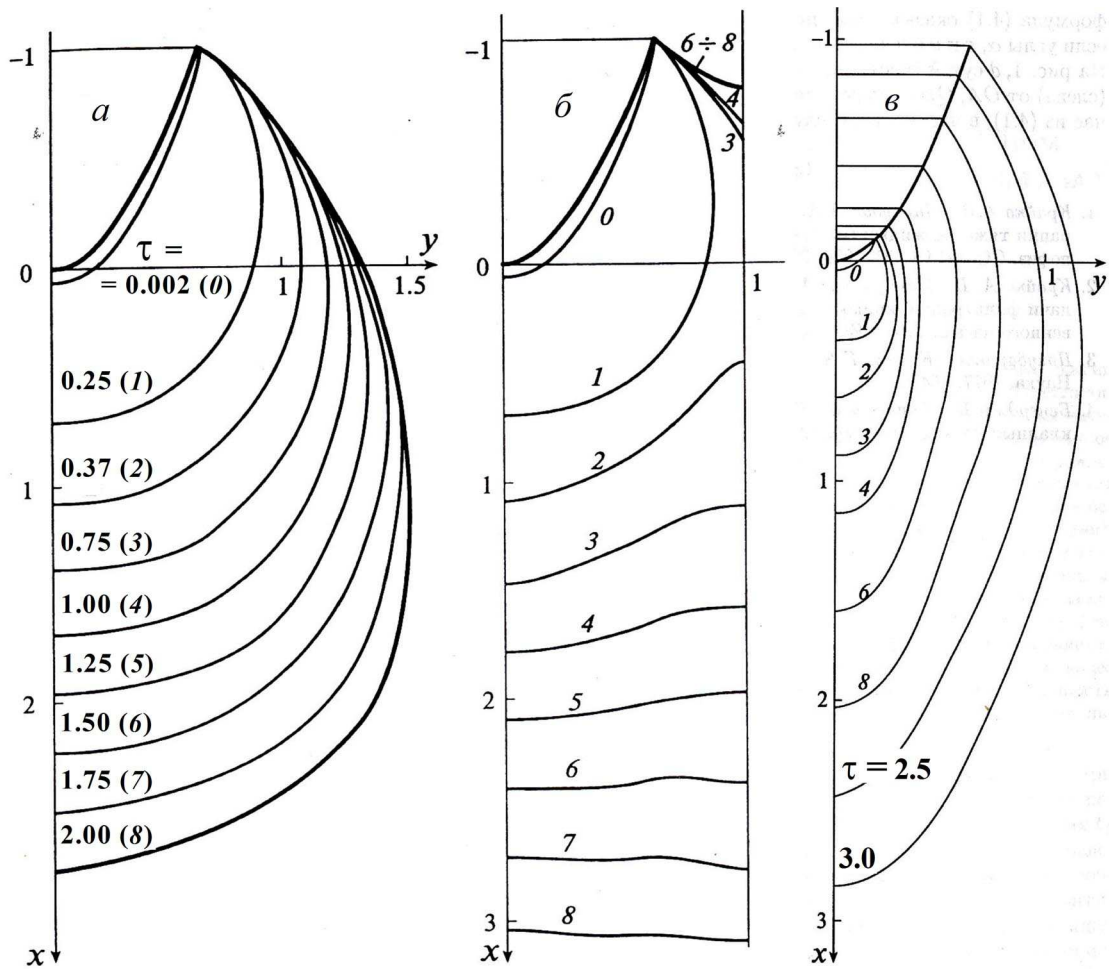


Рис. 7. Передние фронты насыщения при поливе из одиночной борозды (а и в), и из периодической системы борозд (б)

формулы связано с трением между газом и пористым материалом. При малых скоростях газа  $\varphi_f$  не зависит от  $V$  и для однородного материала ( $\nabla m \equiv 0$ ) первая формула (2) сводится к закону Дарси:  $\mathbf{f} = -k\mathbf{V}$  с положительной константой  $k$ .

Дифференциальные уравнения, вытекающие из законов сохранения (1) с  $A, \mathbf{B}$  и  $C$  из табл. 2 в подобластях непрерывности параметров, и соотношения на поверхностях разрыва, отличных от поверхностей разрыва пористости, получаются стандартным путем и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \nabla(m\rho V) &= 0, & \rho \frac{dV}{dt} + \nabla p + m(1-m)\rho f &= 0, \\ \frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} &= (1-m)(q - \mathbf{fV}), & \frac{\partial e_p}{\partial t} &= -m\rho q, & \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla; \\ [\rho(V_n - D)] &= 0, & [p + \rho(V_n - D)^2] &= 0, & [\rho(V_n - D)V_\tau] &= 0, \\ [\rho(V_n - D)\{2h + (V_n - D)^2 + V_\tau^2\}] &= 0, & D[e_p] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В выполняющихся на разрывах пяти конечных соотношениях квадратные скобки означают разность заключенных в них величин,  $D$  – скорость разрыва по нормали к себе,  $V_n$  – проекция скорости газа  $\mathbf{V}$  на ту же нормаль, а  $\mathbf{V}_\tau$  – вектор ее касательной к разрыву со-



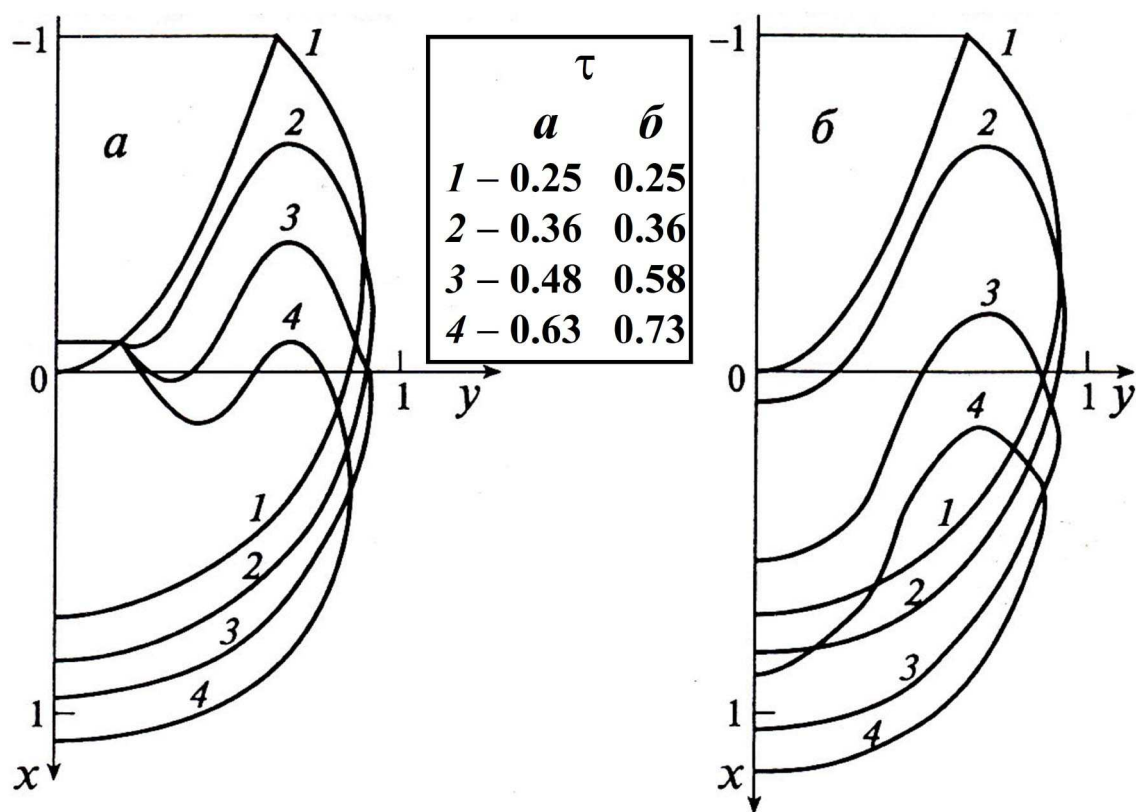


Рис. 8. Передние и задние фронты насыщения при двух режимах полива из одиночной борозды

Таблица 2

Функции *A*, *B* и *C* ИЗС для течений газа в пористом материале

ИЗС	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
массы газа	$m\rho$	$m\rho\mathbf{V}$	0
кол-ва дв. газа	$\rho V_k$ ( $k = 1, 2, 3$ )	$m(\rho V_k \mathbf{V} + p \mathbf{i}_k)$	$m(1 - m)f_k$
энергии газа	$m\rho(2e + V^2)$	$m\rho\mathbf{V}(2h + V^2)$ , $h = e + p/\rho$	$2m(1 - m)\rho q$
энергии материала	$(1 - m)\rho_p e_p$	0	$-(1 - m)m\rho q$

ставляющей. Согласно последнему равенству внутренняя энергия и температура материала в принятой модели, не учитывающей его теплопроводности, могут рваться только на неподвижных поверхностях. При учете теплопроводности пористого материала такие разрывы невозможны. Наряду с поверхностями разрыва, на которых (при непрерывном  $m$ ) выполняются конечные соотношения из (3), возможны поверхности разрыва пористости. При их рассмотрении будем следовать работам [7, 25].

На поверхностях разрыва пористости  $\partial\Omega_m$  обращается в бесконечность нормальная к  $\partial\Omega_m$  компонента градиента  $\nabla m$ , а вместе с ней согласно (2) – нормальная компонента силы

взаимодействия газа и материала  $\mathbf{F}$ . Обращение в бесконечность любой объемной величины (здесь – нормальной компоненты силы  $F_n$ ) – свидетельство необходимости введения ее поверхностного аналога  $F_n^\sigma$ . Ограничившись случаем нормального втекания, при котором  $\mathbf{V}_{\tau-} = 0$ , примем, что  $F_n^\sigma = p_\sigma[m]$ . Здесь и далее, как и в (3),  $[m] = m_+ - m_-$ , где индексы «минус» («плюс») метят параметры до (после)  $\partial\Omega_m$  в направлении потока, а  $p_\sigma$  пока неопределенная величина с размерностью давления. Учтя в ИЗС наличие на  $\partial\Omega_m$  нормальной поверхностной силы, найдем, что в рамках принятой модели при  $\mathbf{V}_{\tau-} = 0$  для изотропного материала на  $\partial\Omega_m$  должны выполняться соотношения

$$[m\rho V_n] = 0, \quad [m(p + \rho V_n^2)] = p_\sigma[m], \quad [m\rho V_n(2h + V_n^2)] = 0. \quad (4)$$

Отличие этих уравнений от соответствующих равенств из (3), записанных для неподвижных разрывов ( $D = 0$ ), в наличии множителя  $m$  в квадратных скобках и правой части во втором уравнении.

Из-за наличия дополнительной переменной  $p_\sigma$  для замыкания уравнений (4) нужны дополнительные предположения. При этом для  $(m\rho V_n)_+ = (m\rho V_n)_- > 0$  есть две возможности:  $m_+ < m_-$  – газ втекает в область с меньшей пористостью, и  $m_+ > m_-$  – газ вытекает из области с меньшей пористостью. Пусть газ втекает в область меньшей пористости с дозвуковой нормальной компонентой скорости втекания ( $M_{n-} < 1$ ,  $M_n = V_n/a$ , а  $a$  – скорость звука в газе), что наиболее часто встречается в приложениях. При этом почти во всей «зоне втекания» скорость газа растет, а давление падает. Поэтому, как и в [7, 25, 26], естественно принять, что втекание происходит изэнтропически, т.е.

$$[s] = 0, \quad (5)$$

где  $s$  – удельная энтропия газа (или любая ее функция, например, для совершенного газа  $p/\rho^\gamma$ ,  $\gamma$  – его показатель адиабаты). Условие (5) вместе с первым и последним условиями (4) в каждом конкретном случае образуют замкнутую систему. Ее решение определяет все неизвестные параметры газа до и после разрыва, а затем при необходимости из второго условия (4) позволяет найти силу, действующую на газ (или равную ей по модулю – на пористый материал).

В случаях истечения газа из области с меньшей пористостью, в согласии с [7, 25], возможны три разных режима. При полностью дозвуковом режиме ( $M_{n\pm} < 1$ ) расширение потока сопровождается ростом давления, что не позволяет принять предположение об отсутствии значительных отрывов и о сохранении энтропии. Обратившись в этом случае вслед за [7, 25, 26] к отрывной схеме «удар Борда», в качестве замыкающего условия положим

$$p_\sigma = p_-. \quad (6)$$

Для звукового и сверхзвукового истечения ( $M_{n-} \geq 1$ ) последнее условие не выполняется, а поток, прошедший сечение разрыва пористости, может стать и до-, и сверхзвуковым. В этом случае все параметры с индексом «минус» известны, и при  $M_{n+} < 1$  параметры с индексом «плюс», как в [7, 25], определяются из решения задачи в области большей пористости с привлечением только первого и третьего условий (4). После определения всех параметров с индексом «плюс»  $p_\sigma$  и силы, действующие на газ и материал, находятся из второго уравнения (4). Торможение до  $M_{n+} < 1$  осуществляется в косых скачках, в близком к прямому «замыкающем» скачке, и в слоях смешения на границах отрывных зон. При этом, как и на других режимах, указанные особенности потока располагаются в слое, протяженность которого по нормали к  $\partial\Omega_m$  имеет порядок характерного размера пор (или расстояний между ними), и определяют внутреннюю структуру разрыва в газе.

В противоположность предыдущему случаю при сверхзвуковом потоке с обеих сторон от разрыва ( $M_{n-} \geq 1$ ,  $M_{n+} > 1$ ) все параметры с индексом «плюс» должны однозначно определяться параметрами с индексом «минус». Согласно [7, 25] это достигается добавлением к условиям (4) либо условия (5), либо равенства

$$p_{\sigma} = p_{+}. \quad (7)$$

В свете выполненных в [25] сравнений с результатами многочисленных экспериментов по отражению ударных волн от перфорированных перегородок последнее условие представляется предпочтительным.

Условия (4)–(7), как и уравнения и условия (3), описывают течения газа в изотропном материале, который обладает рядом других оговоренных выше свойств. При отличии свойств материала от принятых необходимы соответствующие коррективы. При этом, в отличие от предыдущего, получение условий на поверхностях разрыва может потребовать рассмотрения микроструктуры течения в окрестности разрыва. Такое рассмотрение возможно на разных уровнях, в том числе, в рамках более полных моделей газа и материала. Подобное положение имеет место не только в задачах фильтрации, но и при моделировании протекания газа через перфорированные перегородки, границы свободного пространства и бесконечно густой решетки профилей и т.п. – всегда, когда разрывом заменяется область, в которой на поток действуют неизвестные из «глобальной» модели силы или источники энергии. Попытки обойти проблему определения указанных воздействий в рамках глобальных моделей без привлечения дополнительных допущений, как сделано выше и в [7, 25, 26], или без детального анализа микроструктуры разрыва в приближении более полных моделей необоснованны.

Данная статья – расширенный вариант доклада автора на XIII Всероссийском семинаре «Динамика Многофазных Сред» (Новосибирск, 8–10 октября 2013 г., ИТПМ СО РАН).

*Автор благодарит Х.Ф. Валиева, К.С. Пьянкова и Н.И. Тильяеву за помощь в работе, а Г.В. Долголеву – за полезный совет. Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00668-а).*

## Литература

1. Рахматулин, Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред / Х.А. Рахматулин // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 184–195.
2. Крайко, А.Н. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами / А.Н. Крайко, Л.Е. Стернин // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т. 29, № 3. – С. 418–429.
3. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. – М: Наука, 1978.
4. Нигматулин, Р.И. Динамика многофазных сред / Р.И. Нигматулин. – М: Наука, 1987.
5. Крайко, А.Н. К двухжидкостной модели течений газа и диспергированных в нем частиц / А.Н. Крайко // Прикладная математика и механика. – 1982. – Т. 46, № 1. – С. 96–106.
6. Крайко, А.Н. Двухжидкостная модель течений газа и диспергированных в нем частиц / А.Н. Крайко // Газовая динамика. Избранное. В 2 т. Т. 2 / ред.-сост. А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин, А.Н. Секундов. – Изд. 2-е, испр. – М.: Физматлит, 2005. – С. 471–484.
7. Крайко, А.Н. О течениях газа в пористой среде с поверхностями разрыва пористости / А.Н. Крайко, Л.Г. Миллер, И.А. Ширковский // Прикладная механика и техническая физика. – 1982. – № 1. – С. 111–118.

8. Зельдович, Я.Б. Элементы математической физики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. – М: Наука, 1973.
9. Крайко, А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной собственного давления / А.Н. Крайко // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43, № 3. – С. 500–510.
10. Крайко, А.Н. К теории двухжидкостных течений газа и диспергированных в нем частиц / А.Н. Крайко // Гидродинамика и теплообмен в двухфазных средах. – Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981. – С. 42–52.
11. Крайко, А.Н. Двухжидкостные течения смеси газа и твердых частиц с «пеленами» и «шнурками», возникающими при обтекании непроницаемых поверхностей / А.Н. Крайко, С.М. Сулайманова // Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47, № 4. – С. 619–630.
12. Крайко, А.Н. О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами / А.Н. Крайко // Прикладная математика и механика. – 1982. – Т. 46, № 3. – С. 420–428.
13. Крайко, А.Н. Корректность задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами / А.Н. Крайко // Газовая динамика. Избранное. В 2 т. Т. 2 / ред.-сост. А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин, А.Н. Секундов. – Изд. 2-е, испр. – М.: Физматлит, 2005. – С. 485–495.
14. Пьянков, К.С. Численное моделирование особенностей течений идеального газа и двухфазных смесей газа с частицами: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук / К.С. Пьянков. – М.: ЦИАМ-МФТИ, 2011.
15. Любимов, Д.А. Разработка и применение эффективного RANS/ILES метода для расчета сложных турбулентных струй / Д.А. Любимов // Теплофизика высоких температур. – 2008. – Т. 46, № 2. – С. 271–282.
16. Любимов, Д.А. Разработка и применение метода высокого разрешения для расчета струйных течений методом моделирования крупных вихрей / Д.А. Любимов // Теплофизика высоких температур. – 2012. – Т. 50, № 3. – С. 450–466.
17. Kochina, I.N. Groundwater mound damping / I.N. Kochina, N.N. Mikhailov, M.V. Filinov // Int. J. Engineering Sci. – 1983. – V. 21, № 4. – P. 413–421.
18. Крайко, А.Н. О моделировании нестационарной фильтрации тяжелой жидкости / А.Н. Крайко, А.А. Махмудов. – Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1988. – Препринт 168-88.
19. Крайко, А.Н. Решение двумерной задачи фильтрации жидкости в пористый грунт в рамках модели мгновенного насыщения / А.Н. Крайко, А.А. Махмудов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1989. – № 4. – С. 103–110.
20. Крайко, А.Н. Решение плоских задач нестационарной фильтрации тяжелой жидкости в ненасыщенный пористый грунт в рамках модели мгновенного насыщения / А.Н. Крайко, Ш. Саломов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1992. – № 1. – С. 86–94.
21. Крайко, А.Н. Решение плоских задач нестационарной фильтрации тяжелой жидкости в ненасыщенный пористый грунт в рамках модели мгновенного насыщения / А.Н. Крайко, Ш. Саломов // Механика жидкости и газа. Избранное / ред.-сост. А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин, Г.А. Любимов. – М.: Физматлит, 2003. – С. 300–310.
22. Лейбензон, Л.С. Собрание трудов. Т. 2: Подземная гидрогазодинамика / Л.С. Лейбензон – М: Изд-во АН СССР, 1953.
23. Веригин, Н.Н. Движение влаги в почве / Н.Н. Веригин // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 89, № 2. – С. 229–232.

24. Веригин, Н.Н. Промачивание почвы при орошении посредством дождевания / Н.Н. Веригин // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 89, № 4. – С. 627–630.
25. Гринь, В.Т. К распаду произвольного разрыва на перфорированной перегородке / В.Т. Гринь, А.Н. Крайко, Л.Г. Миллер // Прикладная механика и техническая физика. – 1981. – № 3. – С. 95–103.
26. Ильин, Ю.П. Взаимодействие ударной волны с полубесконечной пористой средой. Вып. 2 / Ю.П. Ильин // Прикладная математика: сб. – Тула: Изд-во ТПИ, 1975. – Вып. 2. – С. 33–40.

Александр Николаевич Крайко, доктор физико-математических наук, профессор, отдел теоретической газовой динамики, аэроакустики, численных методов и математического эксперимента, Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова (г. Москва, Российская Федерация), akraiko@ciam.ru.

---

**Bulletin of the South Ural State University.**  
**Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",**  
**2014, vol. 7, no. 1, pp. 34–48.**

---

MSC 76N15

DOI: 10.14529/mmp140104

## The Mathematical Models for Description of Flow of Gas and Foreign Particles and for Non-Stationary Filtration of Liquids and Gas in Porous Medium

*A.N. Kraiko*, Central Institute of Aviation Motors named after P.I. Baranov, Moscow, Russian Federation, akraiko@ciam.ru

The author discusses different mathematical models of different levels used and developed for the description of the flow of gas or liquid mixtures with foreign "macroparticles" (solid or liquid) of a size of a micron or bigger and the non-stationary filtration of liquids and gas in porous medium. In approximation of interpenetrating continua (continua) the author points out the role of "sheets" – the breaks lines with the surface density of particles along them. The continuous-discrete model is considered alongside with the approximation of interpenetrating continua for the problems of gas and particles flows. In this model the discrete set of individual macroparticles interacts with the continuous medium of gas or a liquid. In many problems the number of such particles is great enough but much less than the number of atoms interacting with them, as well as molecules of gas or a liquid, and in modern computing conditions the integration of equations describing the movement and collisions of all particles in the computational region becomes possible. It is important that in continuous-discrete model it is done not on the analogy with the kinetic theory of gases (such approaches also are known) with functions of distribution according to particle parameters (sizes, speeds, etc.) but strictly individually. With reference to a non-stationary filtration of liquids the model of instant saturation with attached and free liquids and with features of forward and back fronts of saturation of movement is considered. The opportunities of the phenomenological description of non-stationary gas flow through the surfaces of porosity break are marked.

*Keywords: the integral conservation laws; "the sheets" in models of interpenetrating continua; the continuous-discrete model; the model of instant saturation; gas flows through surfaces of porosity break.*

## References

1. Rakhmatulin Kh.A. Basics of Gas Dynamics of Interpenetrating Motions of Compressible Media [Osnovy gazodinamiki vzaimopronikayushhikh dvizheniy szhimaemykh sred]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1956, vol. 20, no. 2, pp. 184–195.
2. Kraiko A.N., Sternin L.E. On the Theory of Two-Velocity Flows of a Continuous Medium with Solid or Liquid Particles [K teorii techeniy dvuskorostnoy sploshnoy sredy s tverdymi ili zhidkimi chastitsami]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, no. 3, pp. 418–429.
3. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of mechanics of heterogeneous media]. Moscow, Science, 1978.
4. Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of Multiphase Media]. Moscow, Science, 1987.
5. Kraiko A.N. To the Two-Fluid Model of Flows of Gas and Particles Dispersed Therein [K dvukhzhidkostnoy modeli techeniy gaza i dispergirovannykh v nem chastits]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, vol. 46, no. 1, pp. 96–106.
6. Kraiko A.N. The Two-Fluid Model of Gas Flow and Particles Dispersed Therein [Dvukhzhidkostnaya model' techeniy gaza i dispergirovannykh v nem chastits]. *Gazovaya dinamika. Izbrannoe. T. 2* [Gas Dynamics. Selected. Vol. 2]. Editors-compilers A.N. Kraiko, A.B. Vatazhin, A.N. Sekundov. Moscow, Fizmatlit, 2005, pp. 471–484.
7. Kraiko A.N., Miller L.G., Shirkovskiy I.A. About Gas Flow in Porous Media with Surfaces of Porosity Discontinuity [O techeniyakh gaza v poristoy srede s poverkhnostyami razryva poristosti]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1982, no. 1, pp. 111–118.
8. Zel'dovich Ya.B., Myshkis A.D. *Elementy matematicheskoy fiziki* [Elements of Mathematical Physics]. Moscow, Science, 1973.
9. Kraiko A.N. About the Surfaces of Discontinuity in a Medium Devoid of Its Own Pressure [O poverkhnostyakh razryva v srede, lishennoy sobstvennogo davleniya]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1979, vol. 43, no 3, pp. 500–510.
10. Kraiko A.N. On the Theory of Two-Fluid Flows of Gas and Particles Dispersed Therein [K teorii dvuzhidkostnykh techeniy gaza i dispergirovannykh v nem chastits]. *Gidrodinamika i teploobmen v dvukhfaznykh sredakh* [Hydrodynamics and Heat Transfer in Two-Phase Media]. Novosibirsk, ITF SO AN SSSR, 1981, pp. 42–52.
11. Kraiko A.N., Sulajmanova S.M. Two-Fluid Flows Mixture of Gas and Solid Particles with the "Sheets" and "Filaments" that Arise when Flow Impermeable Surfaces [Dvuzhidkostnyye techeniya smesi gaza i tverdyykh chastits s "pelenami" i "shnurami", vznikayushhimi pri obtekanii neproniatsaemykh poverkhnostey]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1983, vol. 47, no 4, pp. 619–630.
12. Kraiko A.N. About the Correctness of Cauchy Problem for a Two-Fluid Model of Flow of the Mixture of Gas-Particle [O korrektnosti zadachi Koshi dlya dvukhzhidkostnoy modeli techeniya smesi gaza s chastitsami]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, vol. 46, no 3, pp. 420–428.
13. Kraiko A.N. Correctness of Cauchy Problem for a Two-Fluid Model of Flow of the Mixture of Gas-Particle [Korrektnost' zadachi Koshi dlya dvukhzhidkostnoy modeli techeniya smesi gaza s chastitsami] *Gazovaya dinamika. Izbrannoe. T. 2* [Gas Dynamics. Selected. Vol. 2]. Editors-compilers A.N. Kraiko, A.B. Vatazhin, A.N. Sekundov. Moscow, Fizmatlit, 2005, pp. 485–495.

14. P'yankov K.S. Numerical Modeling of Specialty of a Ideal Gas Flows and Two-Phase Gas-Particle Mixtures. [Chislennoe modelirovanie osobennostey techeniy ideal'nogo gaza i dvukhfaznykh smesey gaza s chastitsami: avtoref. dis. fiz.-mat. nauk]. Moscow, TSIAM-MFTI, 2011.
15. Lyubimov D.A. Development and Applications of the Efficient Hybrid RANS/ILES Approach for the Calculation of Complex Turbulent Jets. *High Temperature*, 2008, vol. 46, no. 2, pp. 243–253. DOI: 10.1134/s10740-008-2014-x
16. Lyubimov D.A. Development and Application of a High-Resolution Technique for Jet Flow Computation Using Large Eddy Simulation. *High Temperature*, 2012, vol. 50, no. 3, pp. 420–436. DOI: 10.1134/S0018151X12020101
17. Kochina I.N., Mikhailov N.N., Filinov M.V. Groundwater Mound Damping. *Int. J. Engineering Sci*, 1983, vol. 21, no. 4, pp. 413–421.
18. Kraiko A.N., Makhmudov A.A. *O modelirovanii nestatsionarnoy fil'tratsii tyazheloy zhidkosti* [About Modeling of Unsteady Filtration of Heavy Fluid]. Novosibirsk, ITF SO AN SSSR, 1988, preprint no. 168–88.
19. Kraiko A.N., Makhmudov A.A. Solution of Two-Dimensional Problem of Fluid Filtration in Porous Soil in the Model of Instantaneous Saturation [Reshenie dvumernoy zadachi fil'tratsii zhidkosti v poristy grunt v ramkakh modeli mgnovennogo nasyshheniya]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 1989, no. 4, pp. 103–110.
20. Kraiko A.N., Salomov Sh. Solution of the Two-Dimensional Problems of Unsteady Filtration of Heavy Liquid in Unsaturated Porous Soil in the Model of Instantaneous Saturation [Reshenie ploskikh zadach nestatsionarnoy fil'tratsii tyazheloy zhidkosti v nenasyshchenny poristy grunt v ramkakh modeli mgnovennogo nasyshcheniya]. *Izvestiya RAN. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 1992, no. 1. pp. 86–94.
21. Kraiko A.N., Salomov Sh. Solution of the Two-Dimensional Problems of Unsteady Filtration of Heavy Liquid Unsaturated Porous Soil in the Model of Instantaneous Saturation [Reshenie ploskikh zadach nestatsionarnoy fil'tratsii tyazheloy zhidkosti v nenasyshchenny poristy grunt v ramkakh modeli mgnovennogo nasyshcheniya]. *Mekhanika zhidkosti i gaza. Izbrannoe* [Fluid Mechanics. Selected]. Editors-compilers A.N. Kraiko, A.B. Vatazhin, G.A. Lyubimov. Moscow, Fizmatlit, 2003, pp. 300–310.
22. Leibenson L.S. *Sobranie trudov. T. 2. Podzemnaya gidrogazodinamika* [Collected Papers. Vol. 2. Underground Fluid Dynamics]. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1953.
23. Verigin N.N. Dvizhenie vlagi v pochve [Movement Moisture in the Soil], *Dokl. AN SSSR*, 1953, vol. 89, no. 2. pp. 229–232.
24. Verigin N.N. Wetting the Soil under Irrigation by Sprinkling [Promachivanie pochvy pri oroshenii posredstvom dozhdevaniya], *Dokl. AN SSSR*, 1953, vol. 89, vol. 4, pp. 627–630.
25. Grin' V.T., Kraiko A.N., Miller L.G. To Decay of an Arbitrary Discontinuity on a Perforated Septum [K raspadu proizvol'nogo razryva na perforirovannoy peregorodke]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1981, no. 3, pp. 95–103.
26. Il'in Yu.P. Interaction of Shock Waves with a Semi-Infinite Porous Medium [Vzaimodeystvie udarnoy volny s polubeskonechnoy poristoy sredoy]. *Prikladnaya matematika* [Applied Mathematics], Tula, izd. TPI, 1975, issue 2, pp. 33–40.

Поступила в редакцию 5 декабря 2013 г.