УДК 621.396.969.34 DOI: 10.14529/mmp140101

ОЦЕНИВАНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК НЕСКОЛЬКИХ РЛС ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ТРАЕКТОРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Д.А. Бедин

Рассматривается задача определения систематических ошибок нескольких РЛС по реальным данным измерений движущихся объектов (самолетов). В случае, когда модель пространственной зависимости систематических ошибок не известна полностью, их нахождение сводится к некорректно поставленной задаче оценивания. В работе предлагается подход, позволяющий в этих условиях получить разумную оценку. Его основу составляет локальная аппроксимация неизвестных систематических ошибок, рассматриваемых как функции геометрического положения. Пространство положений разбивается на систему достаточно малых областей. Внутри каждой области ищется вектор, локально приближающий сдвиг от систематических ошибок. Из-за некорректности задачи может быть определено только множество неопределенности, которое содержит все векторы сдвига, которые могли бы дать одинаковые измерения. Набор построенных множеств неопределенности можно рассматривать как многозначную функцию геметрического положения. Далее производится выборка однозначной функции систематических ошибок из многозначной на основе критерия, минимизация которого позволяет выделить наиболее «плавно» изменяющуюся функцию. Алгоритм опробован на реальных данных траекторного наблюдения.

Ключевые слова: статистическое оценивание; систематическая ошибка; РЛС.

Введение

В измерениях обзорных радиолокаторов (РЛС), применяемых для наблюдения за движением самолетов, присутствуют случайные и неслучайные ошибки. Последние принято называть *систематическими*. Систематическая ошибка представляет собой вектор, зависящий от положения наблюдаемого объекта относительно РЛС. С математической точки зрения о систематической ошибке можно говорить как о векторном поле (своем для каждого радиолокатора). Рассматривается задача оценивания таких векторных полей по результатам совместного наблюдения нескольких радиолокаторов в присутствии случайных ошибок.

Первоначально была сделана попытка [1, 2] решения задачи в рамках подхода параметрического оценивания. На основе из представлений о природе технической системы рассматривалось несколько моделей систематических ошибок. Однако получаемые по реальным данным оценки систематических ошибок для различных траекторий отличались между собой весьма сильно, так что это не могло быть объяснено влиянием случайных ошибок измерения. Подобрать модель, значительно улучшающую результаты в целом, не удалось.

Потребовался метод, который мог бы дать разумный ответ в ситуации не полностью известной модели систематических ошибок. Был предложен следующий подход. На основе самых простых представлений о том, как формируются измерения, в каждой точке некоторой сетки рассматриваемого геометрического пространства строятся множества всех возможных систематических ошибок, совместимых с измерениями. Затем из построенных множеств выбирается реализация, имеющая наиболее «плавное» изменение.

Задача определения систематических ошибок нескольких РЛС по их совместным измерениям рассматривалась ранее в исследованиях [3, 4] других авторов. В этих работах применялся подход параметрического оценивания.

1. Наблюдение за объектами при помощи нескольких РЛС

Опишем процесс наблюдения за движением объектов (самолетов) с помощью нескольких радиолокаторов. Количество РЛС обозначим символом m. Радиолокатор с номером i производит измерения в дискретные моменты времени t_i^k; пусть $T_i = \left\{t_i^k\right\}$ — совокупность всех таких моментов. Считаем, что моменты измерения одного и того же объекта разными РЛС не совпадают между собой.

Рассмотрим для простоты плоскую модель: все РЛС и движущиеся объекты предполагаем находящимися в плоскости $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ в некотором ограниченном множестве X — области наблюдения. Измерение $z_i(t)$ радиолокатора с номером i в момент $t \in T_i$, переведенное в декартову систему координат, формируется следующим образом:

$$z_i(t) = x(t) + s_i(x(t)) + w_i(t)\,, \qquad z_i(t), x(t) \in X, \quad s_i(x), w_i(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}\,. \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ — неизвестное положение объекта в момент t; s_i — сдвиг, вызванный систематическими ошибками i-ой РЛС; $w_i(t)$ — случайная ошибка, представляющая собой векторную случайную величину с неизвестным полностью законом распределения. Однако первые и вторые моменты случайной величины $w_i(t)$ известны: математическое ожидание равно нулю, а матрица ковариации есть заданная функция V_i от положения объекта: $\mathbf{E}\{w_i(t)\} = 0$, $\mathbf{Var}\{w_i(t)\} = V_i(x(t))$. На рис. 1 представлен участок траектории реального объекта, наблюдаемого несколькими РЛС. Измерения разных РЛС обозначены разными фигурами.

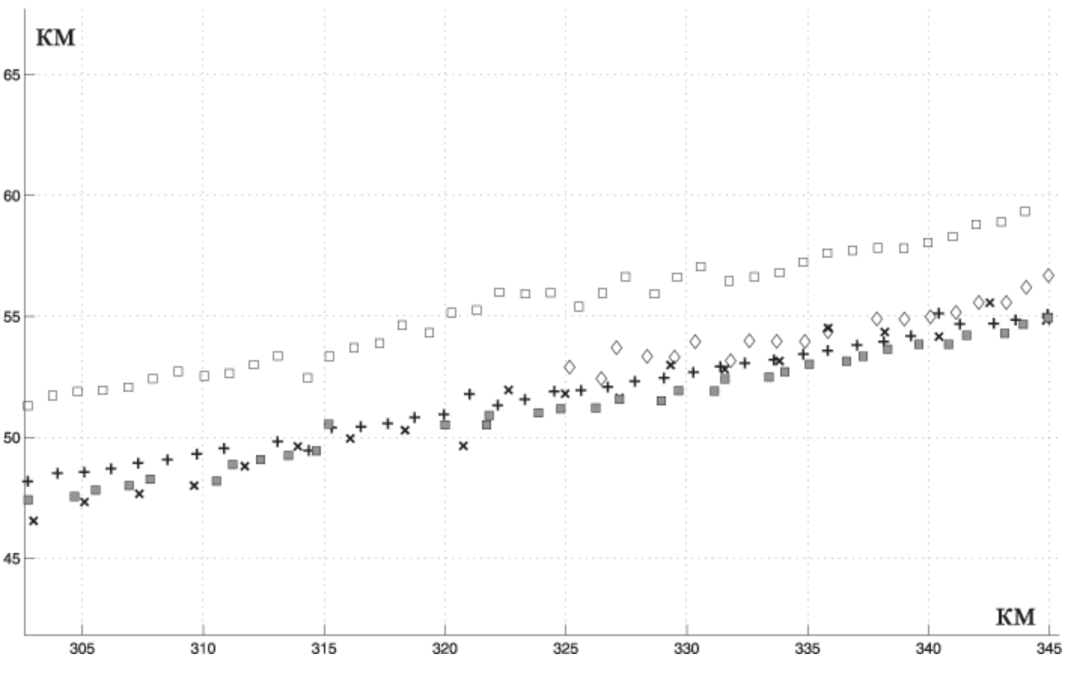

Рис. 1. Пример реальных измерений несколькими РЛС траектории одного объекта

Сдвиги s_i предполагаются зависящими только от положения x и, таким образом, представляют собой неизвестные векторные поля $x \mapsto s_i(x)$. Считаем, что зависимость от x «плавная»: функции $s_i(x)$ непрерывны и имеют малые по величине частные производные на множестве X, за исключением некоторой окрестности B_i радиолокатора i. Цель настоящей работы — предложить метод восстановления систематических ошибок РЛС в виде векторных полей $s_i(x)$.

В дальнейшем потребуется представление сдвига $s_i(x)$ в виде пары: смещение по дальности, смещение по азимуту. Для этого рассмотрим преобразование p_i из декартовой системы координат в собственную полярную систему радиолокатора i, соответствующую измерению дальности r и азимута α:

$$p_i : \ x \mapsto \begin{bmatrix} r(x) & \alpha(x) \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} ; \qquad x \in X, \quad r(x) \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha(x) \in S^{\mathbf{1}} .$$

Символ $S^{\mathbf{1}}$ здесь обозначает одномерную сферу. Преобразование p_i имеет обратное, обозначим его символом $p_i^{-\mathbf{1}}$. Полю сдвигов $s_i(x)$ в декартовой системе координат отвечает поле $f_i(x)$ в полярной системе координат:

$$f_i(x) = \begin{bmatrix} f_i^r(x) & f_i^\alpha(x) \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}, \qquad f_i(x) = p_i(s_i(x) + x) - p_i(x) , \qquad s_i(x) = p_i^{-\mathbf{1}}(p_i(x) + f_i(x)) - x .$$

Связь между $s_i(x)$ и $f_i(x)$ схематично показана на рис. 2; РЛС находится в точке 0.

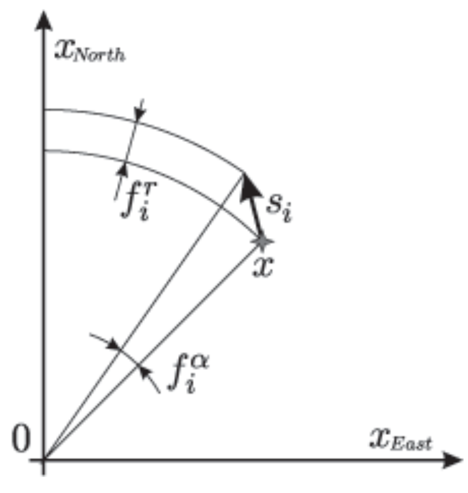

Рис. 2. Связь между смещениями s_i, f_i в декартовой и полярной системах координат

2. Оценивание в рамках параметрического подхода

В работах [1, 2] анализировалась возможность восстановления систематических ошибок в рамках параметрического подхода. Гипотезы, выдвигаемые относительно структуры функции $s_i(x)$, сводились к простой модели

$$s_i(x) = s_i^\alpha(x, \Delta_{\alpha i}) \approx \tfrac{\partial}{\partial \Delta_{\alpha i}} s_i^\alpha(x, 0) \Delta_{\alpha i} \qquad (2)$$

с известной функцией $s_i^\alpha(x, \Delta_{\alpha i})$, зависящей от параметра $\Delta_{\alpha i} \in \mathbb{R}$, который имеет смысл систематической ошибки по азимуту i-го радиолокатора. Выражение (2) следует понимать как равенство для зафиксированного (хотя и неизвестного) параметра $\Delta_{\alpha i}$ в правой части.

В собственной полярной системе координат радиолокатора i модель (2) соответствует постоянному смещению $\Delta_{\alpha i}$ угловой координаты положения объекта $x(t)$ и нулевому смещению радиальной координаты: $f_i^\alpha(x) = f_i^\alpha = [\,0 \quad \Delta_{\alpha i}\,]^{\mathbf{T}}$.

Движение $x(t)$ объекта приближалось в [1, 2] либо отрезком прямолинейного равномерного движения на коротких участках [2], либо ломаной [1] с узлами, соответствующими фиксированным моментам времени. Оба варианта можно записать в виде

$$x(t) = g(t)\theta\,, \tag{3}$$

где $g(t)$ — заданная матричная функция времени, а θ — столбец неизвестных параметров либо прямолинейного равномерного движения, либо ломаной линии.

В силу сделанных предположений и упрощения $s_i^\alpha(x, \Delta_{\alpha i}) \approx \frac{\partial}{\partial \Delta_{\alpha i}} s_i^\alpha(x, 0)\Delta_{\alpha i}$, уравнение наблюдения (1) становится линейным относительно неизвестных параметров:

$$z_i(t) = g(t)\theta + \tfrac{\partial}{\partial \Delta_{\alpha i}} s_i^\alpha(\widetilde{x}(t), 0)\Delta_{\alpha i} + w_i(t)\,. \tag{4}$$

Здесь $\widetilde{x}(t)$ — некоторая «предварительная» аппроксимирующая траектория, грубо приближающая неизвестную траекторию $x(t)$. Замена $x(t)$ на $\widetilde{x}(t)$ обусловлена слабой зависимостью функций $s_i^\alpha(x, \Delta_{\alpha i})$ и их производных $\frac{\partial}{\partial \Delta_{\alpha i}} s_i^\alpha(\widetilde{x}(t), \Delta_{\alpha i})$ от пространственной переменной x при фиксированном $\Delta_{\alpha i}$. В работе [2] вместо $\widetilde{x}(t)$ брались непосредственно измерения $z_i(t)$.

Задача оценивания неизвестных $\Delta_{\alpha i}$, характеризующих набор полей $s_i(x)$, решалась далее обобщенным методом наименьших квадратов с использованием данных совместных наблюдений одного и того же объекта разными РЛС. Были выявлены следующие проблемы: оценки $\hat{\Delta}_{\alpha i}$, полученные по разным траекториям объектов из разных частей области наблюдения X, отличались настолько сильно, что это нельзя было объяснить влиянием случайных ошибок измерения. Кроме того, уровень ошибки, не объясняемой моделью (4), оставался очень большим.

С другой стороны, приближение треков (последовательности измерений) от одной РЛС по модели (3) было хорошим в следующем смысле. Введем вектор $\xi_i(t) = x(t) + s_i(x(t))$ смещенного i-й РЛС положения объекта. Учитывая «плавность» изменения функций $s_i(x)$, для $\xi_i(t)$ предположим такую же структуру движения (3), что и для $x(t)$. В рамках такой модели измерения каждой РЛС приближаются хорошо: уровень отклонений измерений от восстановленного на рассматриваемом промежутке времени движения $\hat{\xi}_i(t)$ соответствует свойствам случайной величины $w_i(t)$, а именно, эмпирическое среднее по отклонениям близко к нулю, а эмпирическая матрица ковариации близка к $V_i(\hat{\xi}_i(t))$.

Таким образом, модель движения (3) можно признать удовлетворительной, в то время как модель (2) сдвигов $s_i(x)$ явно не соответствует их реальной структуре.

Было сделано несколько попыток улучшить оценку полей $s_i(x)$ введением более сложных параметрических моделей вида

$$s_i(x) = \sum_{j=1}^{k} s_i^j(x, \Delta_{ji}) \approx \sum_{j=1}^{k} \tfrac{\partial}{\partial \Delta_{ji}} s_i^j(x, 0)\Delta_{ji}\,. \tag{5}$$

Здесь равенство в левой части следует понимать в том же смысле, что и ранее в (2): равенство при некоторых неизвестных, но зафиксированных Δ_{ji}. Используемые варианты функций $s_i^j(x, \Delta_{ji})$ выбирались на основе представлений об устройстве технической системы РЛС. Однако удовлетворительного оценивания $s_i(x)$ в рамках моделей вида (5) не было получено. Это связано, по-видимому, с большим количеством неучтенных факторов, действующих в реальной технической системе.

3. Множества неопределенности

Для оценивания значений неизвестных векторных полей $s_i(x)$ применим подход близкий к методу локальной аппроксимации (метод описан в [5]). Пользуясь тем, что искомые функции $s_i(x)$ слабо зависят от пространственной переменной x, будем заменять $s_i(x)$ локально в окрестности какой-либо точки $x' \in X$ на значение $s_i(x')$. Последнее будем восстанавливать по измерениям внутри окрестности.

Для $\varepsilon > 0$ положим $O_i^\varepsilon(x) = \{y: \ \|s_i(y) - s_i(x)\| \ \leqslant \varepsilon\}$. Условимся, что окрестности $O_i^\varepsilon(x)$ являются достаточно большими для малого ε при $x \in X \setminus B_i$ и их размер таков, что значительные участки движения наблюдаемого объекта находятся в одной окрестности. Следовательно, с заданной точностью ε можно подменять значение функции $s_i(x(t))$ в точке $x(t)$ значением $s_i(\check{x})$ в некоторой другой точке $\check{x} \in O_i^\varepsilon(x(t))$.

Разобьем область наблюдения X на систему подобластей $\left\{X_{(k)}\right\}_{k=1}^K$, внутренности которых не пересекаются. Введем «центры» $\check{x}_{(k)}$ этих множеств так, чтобы $X_{(k)} \subset O_i^\varepsilon(\check{x}_{(k)})$, $i \in \overline{1,m}$. Точки $\check{x}_{(k)}$ не обязательно должны образовывать равномерную сетку. Более выгодно располагать центры областей ближе к местам сосредоточения траекторий объектов. Задачу нахождения векторных полей $s_i(x)$ подменим дискретной задачей определения векторов $s_i(\check{x}_{(k)})$ для набора $\chi = \{\check{x}_{(k)}\}_{k=1}^K$.

Важной особенностью рассматриваемой задачи оказалось то, что уравнение наблюдения (1) не дает возможности получить точечную оценку (наподобие МНК-оценок) для неизвестных $s_i(\check{x})$ вблизи какой-либо фиксированной точки $\check{x} \in X$. В качестве примера рассмотрим задачу нахождения векторов смещения $s_1(\check{x})$, $\ldots$, $s_m(\check{x})$ по короткому участку прямолинейного равномерного движения наблюдаемого объекта в окрестности положения $\check{x}$. Измерение в момент $t \in T_i$ от радиолокатора с номером i запишем следующим образом (измененная модель (1)):

$$z_i(t) = x(t) + s_i(\check{x}) + w_i(t) = G(t)\Theta + w_i(t)\,,$$

$$G(t) = \Big[\ \underset{1\,2}{I_2}\quad \underset{3\,4}{t\,I_2}\quad \underset{5\,6}{O_2}\ \cdots\ \underset{3+2i\ 4+2i}{I_2}\ \cdots\ \underset{3+2m\ 4+2m}{O_2}\ \Big]\,, \quad \Theta = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \\ s_1(\check{x}) \\ \vdots \\ s_m(\check{x}) \end{bmatrix}.$$

Символами I_2 и O_2 обозначены единичная и нулевая матрицы 2×2. Снизу каждого блока матрицы $G(t)$ подписаны номера столбцов, которые блок занимает в ней. Для отдельной траектории объекта можно считать номер i наблюдающей РЛС функцией времени: $i = i(t)$, $t \in \cup_{i=1}^m T_i$. В очередной дискретный момент наблюдения сменится номер наблюдающей РЛС и, следовательно, положение ненулевого блока в правой части матрицы $G(t)$.

Составляя столбцы Z, W из измерений и случайных ошибок, взятых во все дискретные моменты наблюдения $t \in \cup_{i=1}^m T_i$, приходим к уравнению

$$Z = G\Theta + W\,,$$

где матрица G получена вертикальным объединением матриц $G(t)$ для всех $t \in \cup_{i=1}^m T_i$. Нетрудно проверить, что ранг G равен $2 + 2m$, в то время как столбец Θ содержит $4 + 2m$ неизвестных переменных. Первый столбец матрицы G является суммой столбцов G с номерами $3 + 2i$, $i \in \overline{1,m}$, второй столбец — с номерами $4 + 2i$, $i \in \overline{1,m}$. Следовательно, значение $G\Theta$ зависит не от всех $4 + 2m$ переменных, входящих в Θ, а от некоторых их линейных комбинаций, определяемых зависимостью между столбцами, число которых $2 + 2m$. В данном примере такими комбинациями являются смещенные положения $\xi_i = x_0 + s_i(\check{x})$ объектов и скорость v_0.

Рассмотренный пример показывает, что в рамках уравнения (1) в какой-либо неизвестной точке $x \in X$ возможно определение только выражений вида $\xi_i(x) = x + s_i(x)$. Для значений $s_i(x)$ можно указывать лишь множества в пространстве $\mathbb{S}$ векторов $s = [s_1^{\mathbf{T}} \dots s_m^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}}$, которым они принадлежат. Будем называть такие множества *множествами неопределенности.* Далее излагается способ получения оценочных множеств неопределенности по измерениям.

В нашей задаче ведется длительное наблюдение за несколькими объектами. Введем дополнительный верхний индекс, который будет обозначать идентификатор объекта. Смещенное положение $\xi_i^a(t)$ объекта a связано с измерением $z_i^a(t)$ соотношением $z_i^a(t) = \xi_i^a(t) + w_i(t)$. Для $\xi_i^a(t)$ $(i \in \overline{1,m})$ используем модель движения в виде ломаной (3) и, применяя обобщенный метод наименьших квадратов, восстановим смещенное движение $\hat{\xi}_i^a(\cdot)$ объекта a. Таким образом, в каждый момент t из промежутка наблюдения доступны оценка $\hat{\xi}_i^a(t)$ и сведения об ошибке оценивания. Рассмотрим область наблюдения $X_{(k)}$ с центром $\check{x}_{(k)}$. Выделим среди всех объектов группу $\mathfrak{A}_{(k)}$ объектов, имеющих измерения от всех m радиолокаторов в этой области. Внутри группы для каждого $a \in \mathfrak{A}_{(k)}$ рассмотрим промежуток времени $\tau_{(k)}^a$, в течение которого объект наблюдался в области $X_{(k)}$ всеми РЛС. Для любого $t \in \tau_{(k)}^a$ имеем

$$\hat{\xi}_i^a(t) = x^a(t) + s_i(x^a(t)) + w_i'^a(t) = x^a(t) + s_i(\check{x}_{(k)}) + e_i^a(t) + w_i'^a(t)\,. \tag{6}$$

Здесь $w_i'^a(t)$ — ошибка оценивания $\xi_i^a(t)$ посредством $\hat{\xi}_i^a(t)$, а $e_i^a(t)$ — неизвестная ошибка приближения вектора $s_i(x^a(t))$ вектором $s_i(\check{x}_{(k)})$, для которой справедливо неравенство $\|e_i^a(t)\| \leqslant \varepsilon$.

Сделаем усреднение в равенстве (6) вначале по моментам $t \in \tau_{(k)}^a$, а затем по объектам $a \in \mathfrak{A}_{(k)}$:

$$\hat{\xi}_{i(k)} = x_{(k)} + s_i(\check{x}_{(k)}) + e_{i(k)} + w'_{i(k)}\,. \tag{7}$$

Величина $e_{i(k)}$ представляет собой усредненную по траекториям объектов в области $X_{(k)}$ ошибку приближения вектора $s_i(x^a(t))$ вектором $s_i(\check{x}_{(k)})$. Для нее справедливо неравенство $\|e_{i(k)}\| \leqslant \varepsilon$. Вектор $w'_{i(k)}$ обусловлен ошибками приближения $\xi_i^a(t)$ посредством $\hat{\xi}_i^a(t)$ и является случайной величиной с близким к нулю математическим ожиданием и малой матрицей ковариации. Неизвестный вектор $x_{(k)}$ есть результат усреднения неизвестных истинных положений объектов $x^a(t)$, $a \in \mathfrak{A}_{(k)}$.

Процедура усреднения схематично изображена на рис. 3. Множество объектов $\mathfrak{A}_{(k)}$ для простоты содержит единственный элемент a. Показаны смещенные траектории объекта, соответствующие измерениям трех разных РЛС. Видно, что различие между смещенными траекториями, обусловленное сдвигами $s_i(x)$, полностью переносится на средние точки $\hat{\xi}_{i(k)}$.

В случае, если на всем множестве $X_{(k)}$ значения $s_i(x)$ были бы одинаковыми и равными $s_i(\check{x}_{(k)})$, а в измерениях не было бы случайных ошибок, из анализа смещенных треков $\xi_i^a(t)$ извлекалась бы информация об «истинном» множестве неопределенности $S_\xi(\check{x}_{(k)})$, которому принадлежат неизвестные значения вектора $s(\check{x}_{(k)})$ из пространства $\mathbb{S}$:

$$S_\xi(\check{x}_{(k)}) = \left\{y \in \mathbb{S}\colon\ y = [(\xi_{1(k)} - x_{(k)})^{\mathbf{T}} \dots (\xi_{m(k)} - x_{(k)})^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}}\,,\ x_{(k)} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}\right\}\,.$$

Здесь $\xi_{i(k)}$ обозначает результат операции усреднения по моментам и траекториям, полностью аналогичной операции вычисления $\hat{\xi}_{i(k)}$. Отсутствие символа «крышка» подчеркивает «идеальный» характер наблюдения без ошибок измерения.

Для каждого $\check{x}_{(k)}$ уравнение (7) задает в $\mathbb{S}$ аффинное множество $S_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)})$, которое можно рассматривать как естественную оценку (производимую по измерениям) неизвестного множества $S_\xi(\check{x}_{(k)})$:

$$S_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)}) = \left\{y \in \mathbb{S}\colon\ y = [(\hat{\xi}_{1(k)} - x_{(k)})^{\mathbf{T}} \dots (\hat{\xi}_{m(k)} - x_{(k)})^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}}\,,\ x_{(k)} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}\right\}\,.$$

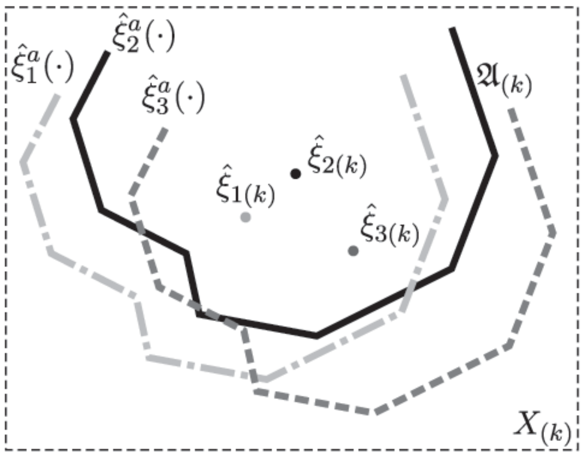

Рис. 3. Иллюстрация процедуры усреднения для получения $\hat{\xi}_{i(k)}$

Для полей $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, заданных в полярных координатах, рассмотрим пространство $\mathbb{F}$ векторов

$$f = [f_1^{\mathbf{T}} \dots f_m^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}}, \qquad f_j = [f_j^1 \ f_j^2]^{\mathbf{T}}.$$

Множество $S_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)})$ при проектировании в пространство $\mathbb{F}$ имеет образ

$$\widetilde{F}_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)}) = \Big\{ y \in \mathbb{F}\colon\ y = [(p_1(\hat{\xi}_{1(k)}) - p_1(x_{(k)}))^{\mathbf{T}} \dots (p_m(\hat{\xi}_{m(k)}) - p_m(x_{(k)}))^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}},\ x_{(k)} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \Big\}.$$

Учитывая, что на практике значения $f_i(x)$ не могут быть большими, следует ввести дополнительное условие

$$f(x) \in F^0 = \big\{ f \in \mathbb{F}\colon\ |f_j^1| \leqslant K^1,\ |f_j^2| \leqslant K^2,\ j \in \overline{1, m} \big\} \tag{8}$$

в виде покоординатных неравенств. Пусть $\hat{\xi}_{(k)}$ — вектор, полученный усреднением $\hat{\xi}_{i(k)}$ ($i = \overline{1, m}$). Ввиду свойств функций p_i, множество $\widetilde{F}_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)})$ в точках $f \in F^0$ удобно аппроксимировать аффинным множеством $F_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)})$ (которое также будем называть множеством неопределенности, но связанным с пространством $\mathbb{F}$):

$$F_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)}) = \Big\{ y \in \mathbb{F}\colon\ y = [(p_1(\hat{\xi}_{1(k)}) - p_1(\hat{\xi}_{(k)}) - \nabla p_1(\hat{\xi}_{(k)})(x_{(k)} - \hat{\xi}_{(k)}))^{\mathbf{T}} \dots \\ \dots (p_m(\hat{\xi}_{m(k)}) - p_m(\hat{\xi}_{(k)}) - \nabla p_m(\hat{\xi}_{(k)})(x_{(k)} - \hat{\xi}_{(k)}))^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}},\ x_{(k)} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \Big\}.$$

Здесь символами ∇ обозначены матрицы частных производных от соответствующих функций.

4. Оценивание полей с учетом их функциональных свойств

Условие принадлежности полей $s_i(x)$ (или $f_i(x)$) некоторому параметрическому семейству (5) является важным дополнением к уравнению (1) и позволяет оценивать их значения. Однако такие оценки зависят от того, какое семейство выбрано или, что то же самое, какая взята модель наблюдения. В нашей ситуации нет уверенности в правильном выборе модели вида (5).

Если не использовать параметрический подход, то на основании уравнения (1) локально в точках $\check{x}_{(k)}$ для $s_i(\check{x}_{(k)})$ можно строить лишь оценки в виде множеств неопределенности $S_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)})$, которые содержат все возможные варианты значений $s_i(\check{x}_{(k)})$, одинаково хорошо совместимые с наблюдениями. Какое значение $s_i(\check{x}_{(k)})$ из множества $S_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)})$ следует предпочесть, не может быть определено из анализа измерений вблизи точки $\check{x}_{(k)}$.

Выделение каких-либо предпочтительных значений $s_i(\check{x}_{(k)})$ возможно исходя из предположений о том, как должны вести себя функции $s_i(x)$ в целом на множестве X. При этом такие дополнительные условия не обязательно должны иметь вид (5). В нашей задаче, несмотря на то, что не удалось подобрать удовлетворительную модель (5), осталось условие на плавное изменение полей $s_i(x)$ при изменении x. Исходя из природы технической системы, плавность изменения более правильно приписывать полям $f_i(x)$, соответствующим $s_i(x)$, но заданным в полярных системах координат. Далее будем рассматривать «общее» поле $f(x)$ всех РЛС.

Один из вариантов формализации условия «плавности» — принадлежность поля $f(x)$ классу функций $\mathcal{F}^L$ с константой Липшица L. Другой вариант условия — более «слабый» — как можно меньшее значение функционала

$$J(f(\cdot)) = \sum_{x,y\in\chi} \frac{\|f(x)-f(y)\|_F^{\mathbf{2}}}{\|x-y\|_X^{\mathbf{2}}}\, c(x,y)\,,$$

где $c\colon \chi\times\chi \to \{0,1\}$ — функция, регулирующая, какие пары x и y нужно брать в общую сумму (предполагаем $c(x,x)=0$); $\|\cdot\|_X$ — норма в пространстве аргументов X; $\|\cdot\|_F$ — норма в пространстве значений $\mathbb{F}$. Функционал $J(f(\cdot))$ задает «средний квадрат от константы Липшица» для тестируемой функции $f(\cdot)$ на дискретном множестве точек χ.

Итак, сформулируем задачу: найти функцию $f^*(x)$, которая на дискретном множестве χ принимает значения из множеств неопределенности $F_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)})$ (совместима с измерениями) и доставляет минимальную величину функционалу J. В некотором смысле, функция $f^*(\cdot)$ является «наиболее характерным представителем» всех функций, совместимых с измерениями. На множестве $X\setminus\chi$ доопределим функцию произвольным разумным способом, например, с помощью кусочно-линейной интерполяции.

Рассмотрим матрицу Q размерности $K\times K$, заданную следующим образом:

$$Q = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j\neq 1} a_{1j} & -a_{12} & \cdots & -a_{1k} \\ -a_{21} & \sum\limits_{j\neq 2} a_{2j} & \cdots & -a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \cdots & \sum\limits_{j\neq k} a_{kj} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x_{(i)}-x_{(j)}\|_X^{\mathbf{2}}}, & \text{если } c(x_{(i)},x_{(j)}) = 1\,, \\ 0\,, & \text{если } c(x_{(i)},x_{(j)}) = 0\,. \end{cases}$$

Пусть скалярное произведение в $\mathbb{F}$ задается с помощью симметричной матрицы $P>0$:

$$\|f(x)-f(y)\|_F^{\mathbf{2}} = (f(x)-f(y))^{\mathbf{T}}\, P\,(f(x)-f(y))\;.$$

Соберем в один вектор φ значения функции $f(\cdot)$ во всех точках дискретного набора χ и запишем функционал $J(f(\cdot))$ в новых обозначениях:

$$J(f(\cdot)) = J(\varphi) = \varphi^{\mathbf{T}} R\varphi\,, \qquad R = Q\otimes P\,, \qquad \varphi = [f(\check{x}_{(1)})^{\mathbf{T}}\ldots f(\check{x}_{(K)})^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}}\,. \tag{9}$$

Здесь символом $\otimes$ обозначено кронекерово произведение матриц. Условие принадлежности значений $f(\check{x}_{(k)})$ множествам $F_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)})$ после переобозначений имеет вид

$$\varphi = \Phi^0 + \Phi^1\,\eta\,, \qquad \eta \in \mathbb{R}^{\mathbf{2K}}\,, \tag{10}$$
$$\Phi^0 = \begin{bmatrix} F^0_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(1)}) \\ \vdots \\ F^0_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(K)}) \end{bmatrix}, \qquad \Phi^1 = \begin{bmatrix} F^1_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(1)}) \\ \vdots \\ F^1_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(K)}) \end{bmatrix},$$
$$F^0_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)}) = \begin{bmatrix} p_1(\hat{\xi}_{1(k)}) - p_1(\hat{\xi}_{(k)}) \\ \vdots \\ p_m(\hat{\xi}_{m(k)}) - p_m(\hat{\xi}_{(k)}) \end{bmatrix}, \qquad F^1_{\hat{\xi}}(\check{x}_{(k)}) = \begin{bmatrix} \nabla p_1(\hat{\xi}_{(k)}) \\ \vdots \\ \nabla p_m(\hat{\xi}_{(k)}) \end{bmatrix}.$$

Матрица R, вообще говоря, вырожденная. Критерий (9) не является строго выпуклой функцией переменной φ. Однако введение условия (10) позволяет обойти эту трудность: на практике свойства функций $p_i(\cdot)$ таковы, что матрица $(\Phi^1)^{\mathbf{T}} R \Phi^1$ уже является невырожденной. Таким образом, минимизация (9) на множестве (10) дает однозначный ответ:

$$\eta^* = \left((\Phi^1)^{\mathbf{T}} R \Phi^1\right)^{-\mathbf{1}} (\Phi^1)^{\mathbf{T}} R \Phi^0\,, \tag{11}$$
$$\varphi^* = \Phi^0 + \Phi^1\,\eta^*\,, \qquad \varphi^* = [f^*(\check{x}_{(1)})^{\mathbf{T}} \ldots f^*(\check{x}_{(K)})^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}}.$$

В общем случае при решении задачи минимизации нужно использовать ограничения (8). Но зачастую при работе с реальными данными решение $f^*(\cdot)$, полученное без учета ограничений (8), удовлетворяет им, и нет нужды использовать более сложные алгоритмы.

Заключение

Задача оценивания систематических ошибок радиолокаторов представляет собой задачу оценивания неизвестных векторных полей $f_i(x)$ в условиях их «локальной ненаблюдаемости». По измерениям вблизи некоторой точки x возможна лишь оценка в виде «наиболее вероятного» или «среднего» множества неопределенности $F_{\hat{\xi}}(x)$ для возможных значений $f_i(x)$ (в случае полей $s_i(x)$ — аффинного множества $S_{\hat{\xi}}(x)$). Задача относится к классу некорректных задач.

Полученное в работе решение связано с поиском «характерного представителя» из множеств $F_{\hat{\xi}}(x)$, наилучшим образом соответствующего предполагаемым функциональным свойствам. По сути, это является одним из естественных вариантов регуляризации задачи. В то же время способ получения решения достаточно простой и позволяет учесть дополнительные ограничения, вносимые в постановку. Оптимальная функция $f^*(\cdot)$ дает возможность судить о «проблемных местах» в области наблюдения: даже если «наиболее плавно меняющееся» (из всех совместимых с измерениями) поле $f^*(\cdot)$ претерпевает значительную вариацию в каком-либо месте, то и реальная реализация полей $f_i(\cdot)$ в этом месте имеет значительные изменения.

Методы, описанные в работе, опробованы на реальных данных радиолокационной системы Новосибирской зоны наблюдения. Данные предоставлены фирмой «НИТА», г. Санкт-Петербург. При разработке алгоритмов, работающих с реальными данными, учитывалось, что наблюдения производятся в трехмерном пространстве, возможен разный состав наблюдающих радиолокаторов в различных местах области наблюдения, могут быть сбои в процессе измерения.

На рис. 4 представлено поле систематической ошибки по азимуту для РЛС Кемерово. Заливка показывает область наблюдения X, черными кружками отмечены точки $\check{x}_{(k)}$ из набора χ. Масштаб по осям задан в километрах. Оттенки серого соответствуют различным уровням систематической ошибки: темные — отрицательным, а светлые — положительным значениям. Шкала значений приведена на рисунке справа, величина ошибки задается в градусах. Положение РЛС отмечено крестиком.

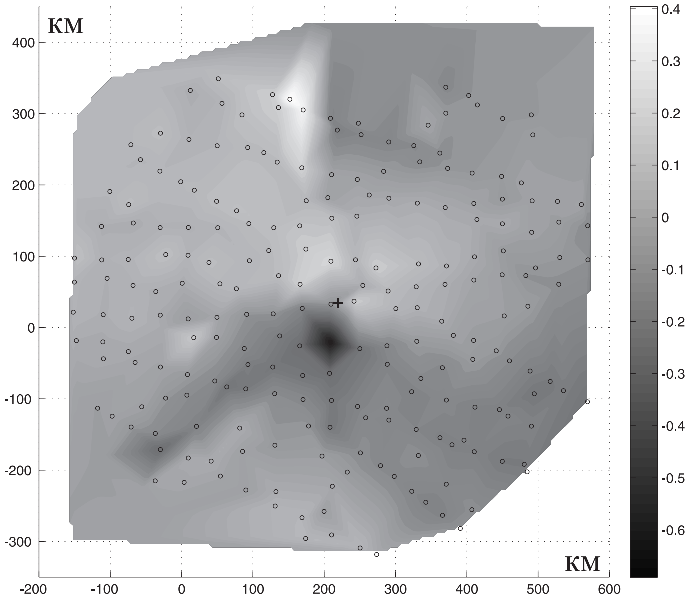

Рис. 4. Результат расчета — поле систематической ошибки для РЛС Кемерово

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, проект №13-01-96055 р_урал_а.

Литература

1. Идентификация систематических ошибок нескольких РЛС по азимуту / А.Г. Иванов, Д.А. Бедин, А.А. Федотов и др. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4, ч. 2. – С. 147–148.
2. Бедин, Д.А. Алгоритм идентификации систематических ошибок РЛС по азимуту на основе фильтрации Калмана / Д.А. Бедин // Тезисы XVIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 30 мая – 1 июня 2011 г. – СПб., 2011. – С. 202–204.
3. Renes, J.J. Flightpath Reconstruction and Systematic Radar Error Estimation from Multi-Radar Range-Azimuth Measurements / J.J. Renes, P. v.d. Kraan, C. Eymann / 24th IEEE Conference on Decision and Control. – 1985. – V. 24, Part 1. – P. 1282–1285.
4. Кирсанов, А.П. Оценивание систематических ошибок измерений подвижной РЛС при одновременном определении координат воздушных объектов двумя РЛС / А.П. Кирсанов // Радиотехника. – 2011. – № 8. – С. 105–110.
5. Катковник, В.Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации / В.Я. Катковник. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 336 с.

Дмитрий Александрович Бедин, младший научный сотрудник, отдел динамических систем, ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация), bedin@imm.uran.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 1, pp. 5–15.

MSC 62P30 **DOI: 10.14529/mmp140101**

Estimation of Vector Field of Systematic Errors of Radars Based on Multi-Tracking Data

D.A. Bedin, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciencies, Ekaterinburg, Russian Federation

The problem of identification of systematic errors of several radars based on multi-tracking data from moving objects (aircrafts) is considered. In case the model of spatial dependence of systematic errors is not completely known the identification leads to an ill-posed estimation problem. The author suggests an approach which provides a good estimate under these conditions. The basis of the approach is the local approximation of the unknown systematic errors as a function of geometric position. Position space is divided into the system of sufficiently small parts. In each part the vector of the local value of the systematic errors is estimated. Due to the ill-posedness of the problem only an uncertainty set can be identified; this set contains all possible vectors that can provide identical measurements. These uncertainty sets can be considered as a multivalued function of geometric position. Then the selection of a single-valued function of systematic errors out of a multivalued function is done on the basis of criterion the minimization of which enables to define the most "flat" function. The algorithm was tested on real trajectory tracking data.

Keywords: statistic estimation; systematic error; radar.

References

1. Bedin D.A., Fedotov A.A., Belyakov A.V., Strokov K.S. Identification of Azimuth Systematic Errors for Few Radars [Identifikatsiya sistematicheskikh oshibok neskol'kikh RLS po azimutu]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo* [The Bulletin of Nizhniy Novgorod University Named by N.I. Lobachevskiy], 2011, no. 4, part 2, pp. 147–148.
2. Bedin D.A. Algorithm of Identification of Radar Azimuth Systematic Errors Based on Kalman Filtration [Algoritm identifikatsii sistematicheskikh oshibok RLS po azimutu na osnove filtratsii Kalmana]. *XVIII Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [XVIII Saint-Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems], Saint-Petersburg, 2011, pp. 202–204.
3. Renes J.J., v.d. Kraan P., Eymann C. Flightpath Reconstruction and Systematic Radar Error Estimation from Multi-radar Range-azimuth Measurements. *24th IEEE Conference on Decision and Control,* 1985, vol. 24, part 1, pp. 1282–1285. DOI: 10.1109/CDC.1985.268714
4. Kirsanov A.P. Estimating Systematic Errors in the Mobile Radar Using Simultaneous Measurement of the Coordinates of Aerial Objects by Two Radar [Otsenivanie sistematicheskikh oshibok izmereniy podvizhnoy RLS pri odnovremennom opredelenii koordinat vozdushnykh ob'ektov dvumya RLS]. *Radiotekhnika* [Radioengineering], 2011, no. 8, pp. 105–110.
5. Katkovnik V.Ya. *Neparametricheskaya identifikatsiya i sglazhivanie dannykh: metod lokal'noy approksimatsii* [Nonparametric Identification and Data Smoothing: Method of Local Approximation]. Moscow, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1985. 336 p.

Поступила в редакцию 22 июля 2013 г.