УДК 517.929

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Л.А. Минаждинова

В статье рассматривается непрерывная зависимость решения от параметров краевых задач для уравнения нейтрального типа. При этом краевая задача сводится к операторному уравнению. Функции, на которых определены операторы, заданы на локально компактном пространстве с мерами, определяемыми самими операторами.

Пусть T – локально компактное пространство в R, $\|\cdot\|$ – норма в R^n, λ – положительная мера на T. Через $L_p^n(\lambda,T)$, $p\in[1,\infty)$ будем обозначать банахово пространство суммируемых в степени p относительно меры λ функций $x:T\to R^n$ с нормой $\|x\|_{L_p^n(\lambda,T)}=(\int\|x(t)\|^p d\lambda(t))^{\frac{1}{p}}$, $D_p^n([a,b])$ – банахово пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ вектор – функций x, таких, что $\dot{x}\in L_p^n(m,[a,b])$, $\|x\|_{D_p^n(m,[a,b])}=\max\limits_{t\in[a,b]}\|x(t)\|+\|\dot{x}\|_{L_p^n(m,[a,b])}$, где m – мера Лебега.

Рассмотрим уравнение

$$y(t)=f(t,\alpha+(Hy)(t),(Sy)(t)),\qquad t\in T, \tag{1}$$

где $f:T\times R^n\times R^n\to R^n$, $\alpha\in R^n$, $H:R^n\to R^n$ – линейный оператор, $S:R^n\to R^n$ – оператор внутренней суперпозиции, заданный равенством

$$(Sy)(t)=\begin{cases} q(t)y(\tau(t)), & \tau(t)\in T;\\ 0, & \tau(t)\notin T,\end{cases}\quad \text{где } \tau:T\to T \text{ и } q:T\to R\ .$$

Пусть $E=\{t\in T:\tau(t)\in T\}$. Сужение функции /меры / f на множество A обозначим через f_A. Через $K(T)$ обозначено пространство функций $y:T\to R$ с компактным носителем. Придерживаясь обозначений и терминологии Н. Бурбаки [1], пару (π,g) будем называть λ - приспособленной (здесь $\pi:T\to T$, $g:T\to R$, $g\geq 0$, λ – положительная мера на T), если функции π и g λ-измеримы и для любой функции $f\in K(T)$ отображение $t\to g(t)f(\pi(t))$ λ-интегрируемо. Всякая λ-приспособленная пара (π,g) определяет на T меру μ, которая задается равенством

$$\int f(s)d\mu(s)=\int g(t)f(\pi(t))d\lambda(t),\ \ f\in K(T)$$

Меру μ будем обозначать через $\pi(g\lambda)$.

К уравнению вида (1) сводится ряд задач для функционально дифференциальных уравнений различных типов, в частности краевая задача для уравнения нейтрального типа на отрезке:

$$\dot{x}(t)=f(t,x(h(t)),\dot{x}(\tau(t))),\ \ t\in[a,b], \tag{2}$$

$$x(\xi)=\dot{x}(\xi)=0,\ \ \xi\notin[a,b],\ \ x\in D_p^n([a,b]),$$

где краевое условие задано равенством

$$lx=\psi x(a)+\int_a^b\varphi(s)\dot{x}(s)ds=\gamma \tag{3}$$

Здесь ψ – постоянная $(n\times n)$ матрица, $\det\psi\neq 0$, элементы $(n\times n)$ матрицы φ принадлежат пространству $L_q^1(m,[a,b])$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, $\gamma\in R^n$.

Обозначим $(Fy)(t)=f(t,\alpha+(Hy)(t),(Sy)(t))$ и рассмотрим уравнение

$$y = Fy \qquad (4)$$

Приведем теорему из [2], условия которой обеспечивают существование и единственность решения уравнения (4).

Теорема 1: *Пусть существует положительная мера* ν *на* T *и число* $p \in [1,\infty)$ *такие, что:*

1) функция $f(\cdot,u,v): T \to R^n$ ν*-измерима при* $u, v \in R^n$, $\|f(\cdot,\alpha,0)\|^p$ ν*-интегрируема и при всех* $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R^n$ *и* ν *– почти всюду на* T *выполнено неравенство* $\|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)\| \le N\|u_1 - u_2\| + M(t)\|v_1 - v_2\|$, *где* $N \in R$, $M: T \to R$ ν*-измеримая, неотрицательная функция;*

2) пара $(\tau_E, |q_E|^p)$ ν*-приспособлена и существует число* $K > 0$ *такое, что* $\tau_E(|q_E|^p \nu_E) \le K\nu$*;*

3) оператор $H: L_p^n(\nu,T) \to L_p^n(\nu,T)$ *непрерывен;*

Тогда, если $N\|H\|_{L_p^n(\nu,T)\to L_p^n(\nu,T)} + K^{\frac{1}{p}} < 1$, *то существует единственное в пространстве* $L_p^n(\nu,T)$ *решение уравнения (4).*

Конструкция меры ν, которая обеспечивает выполнение условия 2 в теореме 1, приведена в [2]. В частности, показано, что меру ν можно задать сходящимся рядом $\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\beta^i}$, где $\beta > 1$, $\lambda_0 = \lambda$, $\lambda_{i+1} = \tau_E(q_E^p, \lambda_{iE})$, при условии, что $\lambda(\tau^{-1}(A) \cap \{t \in E : |q(t)| > 0\}) \le \alpha\lambda(A) + \Delta$, для любого λ-измеримого множества A и при некоторых $\alpha, \Delta \in R$, $\alpha, \Delta \ge 0$.

В условиях вышеприведенной теоремы ν – почти всюду на T выполняется $\frac{d\mu}{d\nu}(t) = \lim_{\nu(e)\to 0, t\in e} \frac{\mu(e)}{\nu(e)} \le K^* < \infty$, что является необходимым и достаточным условием непрерывности оператора внутренней суперпозиции $S: L_p^n(\nu,T) \to L_p^n(\nu,T)$.

Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости решения уравнения (4) от параметров. Обозначим $F = F_0$ и запишем уравнение (4) в виде

$$y = F_0 y. \qquad (5)$$

Наряду с уравнением (5) рассмотрим последовательность уравнений

$$y = F_k y = f_k(t, \alpha_k + (H_k y)(t), (S_k y)(t)), \qquad (6)$$

где операторы $S_k : L_p^n(\nu_k,T) \to L_p^n(\nu_k,T)$ заданы равенствами:

$$(S_k y)(t) = \begin{cases} q_k(t) y(\tau_k(t)), & \tau_k(t) \in T; \\ 0, & \tau_k(t) \notin T, \end{cases}$$ где $\tau_k : T \to T$ и $q_k : T \to R$.

Обозначим $E_k = \{t \in T : \tau_k(t) \in T\}$. Здесь будем предполагать, что для числа $p \in [1,\infty)$ и положительной меры λ пары $(\tau_{kE_k}, |q_{kE_k}|^p)$ λ_{E_k}-приспособлены и $|q_{k\,E_k}|^p$ ограничены. Далее, существуют такие числа α_k и Δ_k, что для любого λ-измеримого множества $A \subset T$ множество $\tau_k^{-1}(A) \cap \{t \in E_k : |q_k(t)| > 0\}$ λ-измеримо и

$$\lambda(\tau_k^{-1}(A) \cap \{t \in E_k : |q_{kE_k}(t)| > 0\}) \le \alpha_k \lambda(A) + \Delta_k, \quad k = 0,1,\ldots$$

Тогда, как следует из теоремы 1 для каждого $k = 1,2,\ldots$, существует мера ν_k такая, что оператор $S_k : L_p^{\nu_k}(T) \to L_p^{\nu_k}(T)$ непрерывен и существуют ограниченные в существенном относительно ν_k производные $\frac{d\mu_k}{d\nu_k}$, где $\mu_k = \tau_{E_k}(|q_{kE_k}|^p \nu_k)$.

В [3] доказана теорема, обеспечивающая сходимость последовательности операторов $\{S_k\}$ в пространстве $L_p^n(\nu_0,T)$:

Теорема 2: *Пусть существуют положительные числа* g_{*k} g_k^*, g_*, g^* *такие, что для мер* ν_k, $k=0,1,\ldots$ *выполнены неравенства*

$$g_*\nu_0 \le g_{*n}\nu_0 \le \nu_n \le g_n^*\nu_0 \le g^*\nu_0 . \tag{7}$$

Последовательность $\operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in T}\dfrac{d\mu_k}{d\nu_k}(t)$ *ограничена числом* K^* *и* $\lim\limits_{k\to\infty}\nu_0(E_k\Delta E_0)=0$. *Тогда, если последовательность* $\{q_k\}$ *сходится в пространстве* $L_p^n(\nu_0,T)$ *к* q_0, *а последовательность* $\{\tau_k\}$ *сходится по мере* ν_0 *к* τ_0, *то для любого* $y\in L_p^n(\nu_k,T)$ $\lim\limits_{k\to\infty}\|S_k y-S_0 y\|_{L_p^n(\nu_0,T)}=0$.

Условия (7) означают, что меры ν_k абсолютно непрерывны относительно ν_0 и классы эквивалентности в пространствах $L_p^{\nu_k}(T)$ совпадают для всех $k=0,1,\ldots$; нормы в $L_p^{\nu_k}(T)$ эквивалентны.

Докажем теорему:

Теорема 3: *Пусть для каждого* $k=0,1,\ldots$ *выполнены условия теоремы 1. Тогда, если:*

1) *выполнены условия теоремы 2;*
2) $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k(\cdot,u,v)-f_0(\cdot,u,v)\|_{L_p^n(\nu_0,T)}=0$, $u,v\in R^n$;
3) *последовательность чисел* $\{N_k\}$ *ограничена;*
4) *последовательность операторов* $\{H_k\}$ *сходится равномерно к оператору* H_0, *т.е.* $\|H_k-H_0\|_{L_p^n(\nu_0,T)\to L_p^n(\nu_0,T)}\to 0$ *при* $k\to\infty$;
5) *существуют числа* $P_k>0$, *такие, что* $\|H_k y\|_{L_p^n(\nu_k,T)}\le P_k\|y\|_{L_p^n(\nu_k,T)}$, $k=0,1,\ldots$ *и число* L, *такое, что* $N_kP_k+(K_k^*g_k^*g_{*k}^{-1})^{\frac{1}{p}}\le L<1$;
6) $\lim\limits_{k\to\infty}\|\alpha_k-\alpha_0\|=0$;
7) $\nu_0(T)<\infty$,

то последовательность решений $\{y_k\}$ *уравнений (6) сходится в пространстве* $L_p^n(\nu_0,T)$ *к решению уравнения (5).*

Доказательство. Для краткости норму $L_p^n(\nu_0,T)$ обозначим $\|\cdot\|_{\nu_0}$.

Имеет место неравенство:

$$\|y_k-y_0\|_{\nu_0}=\|F_ky_k-F_0y_0\|_{\nu_0}\le\|F_ky_0-F_0y_0\|_{\nu_0}+\|F_ky_k-F_ky_0\|_{\nu_0} \tag{8}$$

Справедливы оценки:

$$\begin{aligned}\|F_ky_0-F_0y_0\|_{\nu_0}&=\|f_k(\cdot,\alpha_k+H_ky_0,S_ky_0)-f_0(\cdot,\alpha_0+H_0y_0,S_0y_0)\|_{\nu_0}\le\\&\le\|f_k(\cdot,\alpha_k+H_ky_0,S_ky_0)-f_k(\cdot,\alpha_0+H_0y_0,S_0y_0)\|_{\nu_0}+\\&+\|f_k(\cdot,\alpha_0+H_0y_0,S_0y_0)-f_0(\cdot,\alpha_0+H_0y_0,S_0y_0)\|_{\nu_0}.\end{aligned}$$

Из условия 1 теоремы 1 следует, что

$$\begin{aligned}&\|f_k(\cdot,\alpha_k+H_ky_0,S_ky_0)-f_k(\cdot,\alpha_0+H_0y_0,S_0y_0)\|_{\nu_0}\le N_k\|\alpha_k-\alpha_0+(H_k-H_0)y_0\|_{\nu_0}+\\&+M_k(t)\|S_ky_0-S_0y_0\|_{\nu_0}\le N_k\Big(\int_T\|\alpha_k-\alpha_0\|^pd\nu_0(t)\Big)^{\frac{1}{p}}+N_k\|H_k-H_0\|_{\nu_0\to\nu_0}\cdot\|y_0\|_{\nu_0}+\\&+M_k(t)\|S_ky_0-S_0y_0\|_{\nu_0}=N_k\|\alpha_k-\alpha_0\|(\nu_0(T))^{\frac{1}{p}}+N_k\|H_k-H_0\|_{\nu_0\to\nu_0}\cdot\|y_0\|_{\nu_0}++M_k(t)\|S_ky_0-S_0y_0\|_{\nu_0},\end{aligned}$$

и с учетом условий данной теоремы получим, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\|f_k(\cdot,\alpha_k+H_ky_0,S_ky_0)-f_k(\cdot,\alpha_0+H_0y_0,S_0y_0)\right\|_{\nu_0}=0.$$

Из условия 2 данной теоремы, следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\|f_k(\cdot,\alpha_0+H_0y_0,S_0y_0)-f_0(\cdot,\alpha_0+H_0y_0,S_0y_0)\right\|_{\nu_0}=0.$$

Значит

$$\lim_{k\to\infty}\left\|F_ky_0-F_0y_0\right\|_{\nu_0}=0 \tag{9}$$

Оценим $\left\|F_ky_k-F_ky_0\right\|_{\nu_0}$.

$$\left\|F_ky_k-F_ky_0\right\|_{\nu_0}=\left\|f_k(\cdot,\alpha_k+H_ky_0,S_ky_k)-f_k(\cdot,\alpha_k+H_ky_0,S_ky_0)\right\|_{\nu_0}\le N_k\left\|H_k(y_k-y_0)\right\|_{\nu_0}+$$
$$\left\|S_k(y_k-y_0)\right\|_{\nu_0}\le N_kP_k\left\|y_k-y_0\right\|_{\nu_0}+\left\|S_k\right\|_{\nu_0\to\nu_0}\cdot\left\|(y_k-y_0)\right\|_{\nu_0}.$$

$\left\|S_k\right\|_{\nu_0\to\nu_0}\le(K^*g^*g_*^{-1})^{\frac{1}{p}}$, $k=0,1,\ldots$, так как

$$\left\|S_ky\right\|_{\nu_0}=\Big(\int_T\left\|(S_ky)(t)\right\|^pd\nu_0\Big)^{\frac{1}{p}}=\Big(\int_T\left\|\chi_{E_k}q_k(t)y(\tau_k(t))\right\|^pd\nu_0\Big)^{\frac{1}{p}}\le\le\Big(\int_T\left\|\chi_{E_k}q_k(t)y(\tau_k(t))\right\|^p\frac{1}{g_*}d\nu_k\Big)^{\frac{1}{p}}=$$
$$=\frac{1}{(g_*^{\frac{1}{p}})}\Big(\int_T\left\|y(s)\right\|^pd\mu_k\Big)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{(g_*^{\frac{1}{p}})}\Big(\int_T\left\|y(s)\right\|^p\frac{d\mu_k}{d\nu_k}d\nu_k\Big)^{\frac{1}{p}}\le\Big(\frac{K^*}{g_*}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_T\left\|y(s)\right\|^pd\nu_k\Big)^{\frac{1}{p}}\le$$
$$\le\Big(\frac{K^*g^*}{g_*}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_T\left\|y(s)\right\|^pd\nu_0\Big)^{\frac{1}{p}}=\Big(\frac{K^*g^*}{g_*}\Big)^{\frac{1}{p}}\left\|y\right\|_{\nu_0}.$$

Таким образом,

$$\left\|F_ky_k-F_ky_0\right\|_{\nu_0}\le\big(N_kP_k+(K^*g^*g_*^{-1})^{\frac{1}{p}}\big)\left\|y_k-y_0\right\|_{\nu_0}\le L\left\|y_k-y_0\right\|_{\nu_0}. \tag{10}$$

Из (8), (10) получим $\left\|y_k-y_0\right\|_{\nu_0}\le\left\|F_ky_0-F_0y_0\right\|_{\nu_0}+L\left\|y_k-y_0\right\|_{\nu_0}$,

$$\left\|y_k-y_0\right\|_{\nu_0}\le\frac{1}{1-L}\left\|F_ky_0-F_0y_0\right\|_{\nu_0},$$

и из (9) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|y_k-y_0\right\|_{\nu_0}=0$.

Теорема доказана.

ПРИМЕР

Рассмотрим уравнение нейтрального типа

$$y'(t)=\frac{1}{100}y(t)+y'(\tau_0(t)), \tag{11}$$

где $\tau_0(t)=\begin{cases}4t, t\in\left[0;\frac{1}{12}\right],\\ \frac{1}{3}, t\in\left(\frac{1}{12};\frac{11}{12}\right),\\ 4t-\frac{10}{3}, t\in\left[\frac{11}{12};1\right],\end{cases}$ при $T=[0,1]$.

Краевое условие зададим равенством

$$y(1)+y(0)=0. \tag{12}$$

Краевая задача (11), (12) сводится к операторному уравнению

$$x(t)=\frac{1}{100}\int_0^1 K(t,s)x(s)ds+x(\tau_0(t)),$$

где $K(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le s\le t\le 1,\\ -\frac{1}{2}, & 0\le t<s\le 1.\end{cases}$ и их решения связаны равенством $y(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$.

Рассмотрим последовательность возмущенных уравнений нейтрального типа

$$y'(t)=\frac{k+1}{100k}y(t)+y'(\tau_k(t)),$$

где $\tau_k(t)=\begin{cases}\frac{4k+1}{k}t-\frac{1}{12k}, t\in\left[0;\frac{1}{12}\right],\\ \frac{1}{3}, t\in(\frac{1}{12};\frac{11}{12}),\\ \frac{4k+1}{k}t-\frac{40k+1}{12k}, t\in\left[\frac{11}{12};1\right],\end{cases}$

с краевыми условиями

$$y(1)+y(0)=\frac{1}{k}\ ,\ k=1,2,\ldots. \tag{15}$$

Краевые задачи (14), (15) сводятся к операторному уравнению

$$x(t)=\frac{k+1}{100k}(\frac{1}{2k}+\int_0^1 K(t,s)x(s)ds)+x(\tau_k(t)) \tag{16}$$

и их решения связаны равенством $y(t)=\frac{1}{2k}+\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$.

Проверим для уравнений (13) и (16) выполнение условий теоремы 3.

$E_0=[0;1]$, $E_k=[\frac{1}{12(4k+1)};1]$, $E_0\Delta E_k=[0;\frac{1}{12(4k+1)}]$.

$$\nu_0=\frac{4\beta}{4\beta-1}m+\frac{10}{12}\varepsilon(\frac{1}{3})\frac{\beta}{(\beta-1)^2} \text{ и } \nu_k=\frac{\frac{4k+1}{k}\beta}{\frac{4k+1}{k}\beta-1}m+\frac{10}{12}\varepsilon(\frac{1}{3})\frac{\frac{k+1}{k}\beta}{(\beta-1)(\frac{\beta(k+1)}{k}-1)}.$$

Здесь $\varepsilon(t)$ – единичная атомическая мера, сосредоточенная в точке t и $\beta>1$.

$\lim\limits_{k\to\infty}\nu_0(E_0\Delta E_k)=0$, $k=1,2,\ldots$

Имеют место оценки $\frac{1}{2}\nu_0\le\nu_k\le\nu_0$, $k=1,2,\ldots$, отсюда $g_*=\frac{1}{2}$, $g^*=2$.

$$\frac{d\mu_k}{d\nu_k}(t)=\begin{cases}\dfrac{2\beta}{\frac{4k+1}{k}\beta+1}, & t\ne\frac{1}{3},\\ \beta, & t=\frac{1}{3}.\end{cases}\qquad K^*=\underset{t\in T}{vrai\sup}\frac{d\mu_k}{d\nu_k}(t)=\frac{2\beta}{4\beta+1}.$$

Последовательность $\{\tau_k\}$ сходится к τ_0 в каждой точке $t\in[0;1]$, значит, последовательность $\{\tau_k\}$ сходится по мере ν_0 к τ_0.

Таким образом, последовательность операторов $S_k:L_p^{\nu_\kappa}(E)\to L_p^{\nu_k}(T)$, заданных равенством $(S_kx)=x(\tau_k(t))$, $t\in\left[0,1\right]$ сходится по норме к оператору $(S_0x)=x(\tau_0(t))$.

$(H_0x)(t)=\int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds=(H_kx)(t)$, $k=1,2,\ldots$, т.е. последовательность операторов $\{H_k\}$ сходится равномерно к оператору H_0.

Справедливы оценки $\|H_kx\|_{v_k}\le\|H_k\|_{v_k\to v_k}\|x\|_{v_k}\le\frac{1}{2}\|x\|_{v_k}$, т.е. линейные операторы H_k ограничены, а следовательно и непрерывны и $P_k=\frac{1}{2}$, $k=1,2,\ldots$

$|f_k(t,u_1,v_1)-f_k(t,u_2,v_2)|\le\frac{k+1}{100k}|u_1-u_2|+|v_1-v_2|$.

Последовательность $N_k=\frac{k+1}{100k}$ ограничена, $M_k(t)=1$.

Таким образом, для уравнений (13) и (16) выполнены условия существования и единственности решений.

Далее имеем

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k(\cdot,u,v)-f_0(\cdot,u,v)\|_{v_0}=\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{k+1}{200k^2}+\frac{1}{100k}\int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds+x(\tau_k(t))-x(\tau_0(t))\right\|_{v_0}=0.$$

$$N_kP_k+(K^*g^*g_*^{-1})^{\frac{1}{p}}=\frac{k+1}{200k}+\left(\frac{4\beta}{4\beta+1}\right)^{\frac{1}{p}}<1,\ k=1,2,\ldots,\ \beta>1,\ p>1.$$

$$\lim_{k\to\infty}|\alpha_k-\alpha_0|=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}=0,\ v_0(T)<\infty.$$

Все условия теоремы 3 выполнены и, следовательно, последовательность решений $\{x_k\}$ уравнения (16) сходится в пространстве $L_p^n(v_0,[0,1])$ к решению x_0 уравнения (13). Значит последовательность решений $\{y_k\}$ задач (14), (15) сходится в пространстве $D_p^n(v_0,[0,1])$ к решению y_0 краевой задачи (11), (12).

Литература

1. Бурбаки, Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер / Н. Бурбаки. - М.: Наука, 1967. -396 с.

2. Плышевская, Т.К. О разрешимости функционально-дифференциальных уравнений в лебеговых пространствах / Т.К. Плышевская. - Магнитогорск: Магнитогорский горно-металлургический институт, 1988. - Деп. в ВИНИТИ 22.02.89. - № 1186. - В 89.

3. Минаждинова, Л.А. О сходимости последовательности операторов внутренней суперпозиции / Л.А. Минаждинова // Вестник ЮУрГУ, Серия «Математика, физика, химия». - 2007. - Вып. 9. - №19(91). - С. 42-47.

Поступила в редакцию 13 декабря 2007 г.