УДК 532.137.3

РАБОЧИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРУТИЛЬНОЙ ВИСКОЗИМЕТРИИ

И.В. Елюхина, Д.Ю. Никитин

Выполнены обзор и сравнение рабочих уравнений линейной крутильной вискозиметрии, составляющих основу аналитического метода расчета нелинейных свойств, в рамках прямой и обратной задач. Записаны реометрические уравнения для линейных комбинаций вязких и упругих составляющих.

Вязкость является структурно чувствительной характеристикой веществ, по которой судят, например, об изменениях материала, возникающих во время технологических процессов. Для ее измерения используется ряд приборов, описанных, в частности, в [1]. При высоких температурах t и давлениях круг инструментов сужен и часто применяется крутильный вискозиметр [2]. Математическое описание процессов, протекающих в нем, выполняется на основе общих теорем динамики: об изменении импульса объема жидкости в рамках подхода Эйлера или Лагранжа и об изменении момента импульса тигля, принимаемого абсолютно твердым телом, относительно оси вращения. Традиционно полагается ньютоновский характер жидкости, т.е. линейная зависимость между напряжением σ и скоростью сдвига D, когда $\sigma = 0$ при $D = 0$. Для практических приложений адекватны точные решения, получаемые при следующих допущениях: скольжение между средой и внутренней поверхностью тигля отсутствует, амплитуды колебаний малы, т.е. течение жидкости в цилиндре осесимметричное и существенной компонентой вектора скорости является азимутальная. При этом переходный режим затухающих колебаний не рассматривается.

Одно из таких решений получено Швидковским Е.Г. [2]. Здесь вязкость ν в прямой задаче вискозиметрии определяется из вискозиметрической системы уравнений:

$$\text{а) } \frac{L'}{K} = p\left(1+\frac{p_0^2+q_0^2}{p^2+q^2}\right) - 2p_0,\ \frac{L''}{K} = q\left(1-\frac{p_0^2+q_0^2}{p^2+q^2}\right) \text{ или б) } L' + L''\frac{p}{q} = 2K(p-p_0); \tag{1}$$

$$L' = \mathrm{Re}(L),\ L'' = \mathrm{Im}(L),\ L = -2\nu M\beta\frac{J_2(\beta)}{J_1(\beta)} + 4\frac{M}{H}\frac{k^2}{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{th}(\theta_n H)}{\mu_n^2\theta_n^3}, \tag{2}$$

где $\beta = R\sqrt{k/\nu}$, $\theta_n^2 = \mu_n^2 - k/\nu$, $k = p + iq$, $p = \delta/\tau$, $p_0 = \delta_0/\tau_0$, $q = 2\pi/\tau$, $i = \sqrt{-1}$; J_l – функции Бесселя первого рода l-го порядка; K – момент инерции пустой подвесной системы; L – функция трения; M – масса жидкости в вискозиметре полувысотой H и радиусом R; p, q – коэффициент затухания и циклическая частота колебаний; δ_0, τ_0 – логарифмический декремент затухания δ и период τ колебаний вискозиметра при $M = 0$; μ_n – корни уравнения $J_1(\mu_n R) = 0$. Принято число торцов $a = 2$: образец смачивает крышку вискозиметра или на его поверхности присутствует пленка.

Выражение (2) представляет одно из точных решений, полученных впоследствии в [3]:

$$(s+\Delta_0)^2 + 1 + D(s) = 0,\ s_{1,2} = \tau_0(-\Delta \pm i)/\tau, \tag{3}$$

где представленные соотношения для $D(s)$ являются математически эквивалентными, преобразуются из одной формы в другую и эффективны в различных ситуациях:

$$D(s) = s^2 A\frac{4I_2(\sqrt{s}\xi_0)}{\sqrt{s}\xi_0 I_1(\sqrt{s}\xi_0)} + \frac{8s^3 A}{\eta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{th}(s_\mu\eta_0)}{\mu_{1n}^2 s_\mu^3};$$

$$D(s) = s^2 A\frac{\mathrm{th}(\sqrt{s}\eta_0)}{\sqrt{s}\eta_0} + \frac{32s^3 A}{\pi^2\xi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2m+1)^2 s_m^3}\frac{I_2(s_m\xi_0)}{I_1(s_m\xi_0)}\right];$$

$$D(s) = s^2 A - 8s^3 A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s^2\mu_{1n}^2}\left[1 - \frac{\mathrm{th}(s_\mu\eta_0)}{s_\mu\eta_0}\right];$$

$$D(s)=s^2A-\frac{8s^3A}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\frac{I_3(s_m\xi_0)}{I_1(s_m\xi_0)s_m^2};$$

$$D(s)=s^2A-\frac{64s^3A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1n}^2(2m+1)^2(s-s_{nm})}. \quad (4)$$

В (3), (4) величины

$$A=MR^2/2K,\ \xi_0=R/d,\ \eta_0=H/d,\ d=\sqrt{\nu/q_0},\ \Delta=\delta/(2\pi),\ \mu_{1n}=\mu_nR,$$

$$s_\mu^2=\mu_{1n}^2/\xi_0^2+s,\ s_m^2=s+[(2m+1)\pi/(2\eta_0)]^2,\ s_{nm}=-[(2m+1)\pi/(2\eta_0)]^2-\mu_{1n}^2/\xi_0^2;$$

A - отношение моментов инерции замороженной жидкости в тигле и K; d - толщина пограничного слоя; H - полувысота образца при $a=2$ и высота при $a=1$; I_1 - модифицированные функции Бесселя 1 -го порядка.

Выделенные решения (1)-(4) найдены без дополнительных к отмеченным ранее предположениям и их можно рекомендовать для обработки опытных данных. Обзор основных упрощенных зависимостей для расчета вязкости ньютоновских жидкостей выполнен, например, в [4]. Часто на практике используются формулы Швидковского Е.Г. для слабовязкого приближения, которые при низких t из исследуемого диапазона при реализуемых в эксперименте условиях могут приводить к некорректной картине свойств. Вместо традиционного решения методом последовательных приближений [2] здесь можно осуществить минимизацию по ν значений функции

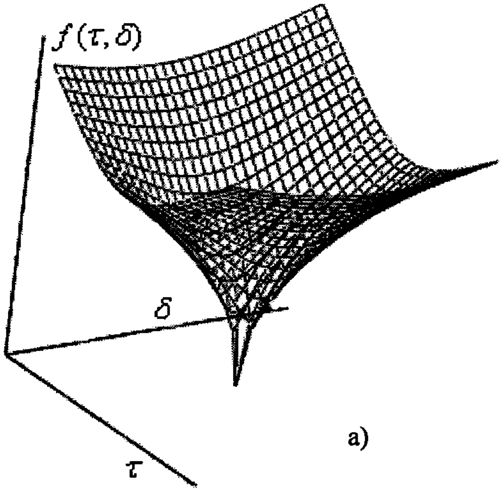
$$\varphi(\nu)=\left|\frac{1}{\pi}\left(\frac{K}{MR}\right)^2\frac{(\delta-\tau\delta_0/\tau_0)}{\tau\sigma(\nu)^2}-\nu\right|\to\min, \quad (5)$$

$$\sigma(\nu)=1-\frac{3p}{2q}-\frac{3}{8}\left(\frac{p}{q}\right)^2-\frac{3}{R\sqrt{4\pi/(\tau\nu)}}+\frac{2R}{H}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R\sqrt{\pi/(\tau\nu)}}\left\{\mathrm{Re}\left(\frac{k^2R^4}{\nu^2\mu_n^2R^2\theta_n^3}\right)+\frac{p}{q}\mathrm{Im}\left(\frac{k^2R^4}{\nu^2\mu_n^2R^2\theta_n^3}\right)\right\}.$$

Сумма ряда в последнем слагаемом обычно заменяется выражением ($b-cp/q$) [2], где дискретные значения коэффициентов b и c даны в таблице 1 в [2] и могут быть интерполированы на весь интервал, например, кубическими сплайнами. Результаты по вязкости, получаемые из (1а), (2) и (5), тогда совпадают в пределах 0,1 % в рассматриваемой области $\xi_0>10$, т.е. при вычислениях по такому варианту существенно понижается их трудоемкость без потери точности.

Система (1а), (2) предпочтительна для обратной задачи вискозиметрии. Очевидно, что при использовании и мнимой Im, и действительной Re частей вискозиметрических уравнений минимум некоторой целевой функции f, являющейся критерием соответствия экспериментальных и расчетных данных, на множестве двух параметров τ и δ более выражен (рис. 1а). При расчетах только по Re или Im на оси возникающего, как и на рис. 1б, оврага появляются локальные минимумы. В модели (1б), (2) не содержится период τ_0, зависящий от нагрузки на нить и t, т.е. подлежащий измерению во всем рабочем интервале t с опытной нагрузкой на нить, и требуемый при расчете по (1а), в связи с чем модель обладает преимуществом в прямой задаче. Функция качества, построенная по Re от уравнения (1а), (2), более пологая, т.е. влияние ошибок в наблюдаемых параметрах на оценку ν выше, а более выраженный минимум $\mathrm{Im}(f)$ смещается сильнее вследствие ошибок в τ. На рис. 1 отмечены интервалы $\tau'\pm(\tau'-\tau_0)$ и $\delta'\pm(\delta'-\delta_0)$, где τ', δ' отвечает минимуму $f(\tau,\delta)$; расчеты проводились при $R=1$ см, $\rho=6$ г/см^3, $\tau_0=5$ с, $A=0{,}15$, $2H/R=2{,}5$, $\xi_0\sim 11$; моделирование закона колебаний тигля выполнено по (1а), (2).

Для линейных жидкостей при наличии упругости характеристики, входящие в реологический закон, также, как и для ньютоновских сред, представляются вне переходных процессов функциями, изменяющимися по закону $\exp(-kt)$, а вместо ньютоновской динамической вязкости η в уравнения, в частности, (1), (2) вводится комплексная вязкость η_*. При заданных допущениях теории метода, например, для модели Олдройда $\eta_*=\eta(1-k\lambda_2)/(1-k\lambda_1)$, где λ_1 и λ_2 – время релаксации и запаздывания. Для простейших моделей вязкоупругих жидкости и твердого тела, т.е. моделей Максвелла и Фойгта, выражения для вискозиметрических функций отмечены в [5,



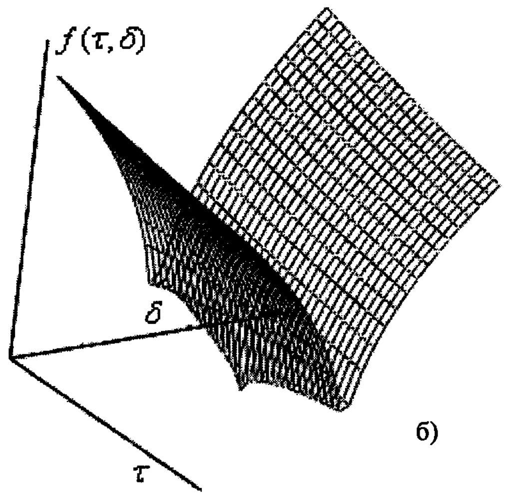


Рис. 1. Поверхность функции качества $f(\tau,\delta)$ при расчетах по моделям (1а), (2) (а) и (1б), (2) (б)

6]. Пусть имеем последовательное соединение двух элементов: вязкого элемента Ньютона и параллельной комбинации вязкого и упругого элементов Фойгта. Тогда, например, для простого сдвигового течения $\sigma_1 = \eta_1 D_1$, $\dot{\sigma}_2 / G_2 + \sigma_2 / \eta_2 = D_2$, где G – модуль сдвига, *1, 2* – номера элементов, точкой обозначена производная по времени. Для такого соединения $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, $D = D_1 + D_2$, и получаем, что $\sigma = \eta_1 D - \eta_1 (\dot{\sigma}/G_2 + \sigma/\eta_2)$, т.е. $\eta_* = \eta_1 / [1 + \eta_1 (1/\eta_2 - k/G_2)]$. Часто для описания используется модель Бюргера с последовательным соединением моделей Максвелла и Фойгта, т.е. механическая схема которой включает две пружины и два поршня.

Отмеченные особенности представляют интерес при выборе точного решения для аналитических расчетов свойств нелинейных, в общем случае упругих вязкопластичных, жидкостей с различной комбинацией элементарных моделей. Построение и аппаратное приложение подобных решений целесообразно сопроводить детальным анализом их чувствительности [5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-02-96016_урал).

Литература

1. Шрам, Г. Основы практической реологии и реометрии / Г. Шрамм. - М.: КолосС, 2003. - 312с.

2. Швидковский, Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов / Е.Г. Швидковский. - М: ГИТТЛ, 1955. - 206 с.

3. Kestin, J. Theory of oscillating type viscometers: The oscillating cup. Part I / J. Kestin, G.F. Newell // Z. Angew. Math. Phys. - 1957. - V. 8. - P. 433-449.

4. Шпильрайн, Э.Э. Исследование вязкости жидких металлов / Э.Э. Шпильрайн, В.А. Фомин, С.Н. Сковородько, Г.Ф. Сокол. - М.: Наука, 1983. - 243 с.

5. Елюхина, И.В. Исследование неньютоновских свойств высокотемпературных жидкостей / И.В. Елюхина. - Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. - 140 с.

6. Kleiman, R.N. Analysis of the oscillating-cup viscometer for the measurement of viscoelastic properties / R.N. Kleiman // Phys. Rev. - 1987. - V. 35, № 1. - P. 261-275.

Поступила 17января 2008г.