УДК 517.544.8

ОДИН ИЗ СЛУЧАЕВ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ НА ПРЯМОЙ

В.М. Адуков[1], А.А. Патрушев[2]

Предложен метод явного решения трехэлементной краевой задачи линейного сопряжения в классе кусочно-аналитических функций. Краевое условие задано на прямой. Получено решение в замкнутой форме при некотором ограничении, наложенном на коэффициент *b*(*t*) задачи.

Ключевые слова: краевые задачи для аналитических функций, матричная краевая задача Римана, краевая задача Маркушевича.

Рассмотрим трехэлементную задачу линейного сопряжения

$$\psi_+(t) = a(t)\psi_-(t) + b(t)\overline{\psi_-(t)} + f(t) \tag{1}$$

на вещественной прямой $\Gamma: \operatorname{Im} z = 0$. Здесь $a(t), b(t), f(t) \in H(\Gamma)$ – гельдеровские функции, $a(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$, бесконечно удаленная точка включается в Γ.

Требуется найти функции $\psi_+(z), \psi_-(z)$, аналитические соответственно в верхней полуплоскости S_+ и нижней полуплоскости S_-, непрерывно продолжимые на прямую Γ, если граничные значения этих функций связаны линейным соотношением (1). Решение будем искать в классе функций, исчезающих в точке $z = -i$.

Пусть $\kappa = \operatorname{Ind}_\Gamma a(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\left[\ln a(t)\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}$, где под $\left[\ln a(t)\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ следует понимать приращение $\ln a(t)$, когда точка t пробегает прямую Γ от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

Для того, чтобы привести рассматриваемую задачу к граничной задаче для единичной окружности, рассмотренной в статье [1], применим следующее дробно-линейное преобразование:

$$z = -i\frac{\varsigma - i}{\varsigma + i},\ \varsigma = -i\frac{z - i}{z + i}. \tag{2}$$

При этом преобразовании прямая Γ плоскости z переходит в единичную окружность $L: |\tau| = 1$ плоскости ς.

Дробно-линейное преобразование (2) конформно преобразует область S_+ во внутренность единичного круга D_+, а область S_- − во внешность D_-; при этом точке $z = \infty$ соответствует точка $\varsigma = -i$, а точке $\varsigma = \infty$ − точка $z = -i$.

Для упрощения записи мы, следуя [5], будем обозначать функцию

$$\psi(z) = \psi\left(-i\frac{\varsigma - i}{\varsigma + i}\right)$$

просто через $\psi(\varsigma)$; аналогичное обозначение используется в дальнейшем для $a(t), b(t)$, $f(t)$ и других функций.

Тогда граничное условие (1) запишется в виде:

$$\psi_+(\tau) = a(\tau)\psi_-(\tau) + b(\tau)\overline{\psi_-(\tau)} + f(\tau),\ \tau \in L. \tag{3}$$

[1] Адуков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: vicmikhad@mail.ru
[2] Патрушев Алексей Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: patraleksej@yandex.ru

Наложим следующее дополнительное ограничение на коэффициент $b(t)$ краевой задачи (1): функция $b(t)$ есть граничное значение функции, мероморфной в верхней полуплоскости S_+. Очевидно, что в этом случае функция $b(\tau)$ краевой задачи (3) будет являться краевым значением функции, мероморфной в круге D_+.

Воспользуемся теперь результатами статьи [1]. В этой работе трехэлементная краевая задача линейного сопряжения для единичной окружности на основании аналитического продолжения по симметрии $\varphi^*(\varsigma)=\begin{cases}\varsigma^{-1}\overline{\varphi_-(\overline{\varsigma}^{-1})}, & \varsigma\in D_+,\\ \varsigma^{-1}\overline{\varphi_+(\overline{\varsigma}^{-1})}, & \varsigma\in D_-,\end{cases}$ где $\varphi_\pm(\tau)=\psi_\pm(\tau)a_\pm^{-1}(\tau)$, $a(\tau)=a_+(\tau)\tau^\kappa a_-(\tau)$, $a_\pm(\varsigma)=\exp B_\pm(\varsigma)$, $B(\varsigma)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\dfrac{\ln[\tau^{-\kappa}a(\tau)]d\tau}{\tau-\varsigma}$, сводится к матричной задаче Римана:

$$\Phi_+(\tau)=G(\tau)\Phi_-(\tau)+F(\tau),\ \tau\in L. \tag{4}$$

Здесь

$$\Phi(\varsigma)=\begin{pmatrix}\varphi(\varsigma)\\ \varphi^*(\varsigma)\end{pmatrix},\ \varphi(\varsigma)=\begin{cases}\varphi_+(\varsigma),\varsigma\in D_+,\\ \varphi_-(\varsigma),\varsigma\in D_-,\end{cases}\ G(\tau)=\tau^\kappa\begin{pmatrix}1-|b_1(\tau)|^2 & \tau b_1(\tau)\\ -\tau\overline{b_1(\tau)} & 1\end{pmatrix},$$

$$b_1(\tau)=b(\tau)\overline{a_-(\tau)}a_+^{-1}(\tau),\ F(\tau)=\begin{pmatrix}f_1(\tau)-\tau^\kappa b_1(\tau)\overline{f_1(\tau)}\\ -\tau^{\kappa-1}\overline{f_1(\tau)}\end{pmatrix},\ f_1(\tau)=f(\tau)a_+^{-1}(\tau).$$

Решение задачи (4) ищется в классе симметричных, исчезающих на бесконечности вектор функций. При факторизации матрицы $G(\tau)$ используется метод существенных многочленов [2–4].

В итоге строится каноническая матрица

$$\chi(\varsigma)=\begin{pmatrix}\chi_{11}(\varsigma) & \chi_{12}(\varsigma)\\ \chi_{21}(\varsigma) & \chi_{22}(\varsigma)\end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\chi_{11}(\varsigma)=\begin{cases}[v(\varsigma)-u(\varsigma)\beta_+(\varsigma)]R_1(\varsigma)+\varsigma q(\varsigma)b_1(\varsigma)[\alpha_+(\varsigma)R_1(\varsigma)+\beta_1^+(\zeta)],\ \varsigma\in D_+,\\ \varsigma^{-\kappa}q^{-1}(\varsigma)R_1(\varsigma),\ \varsigma\in D_-,\end{cases}$$

$$\chi_{12}(\varsigma)=\begin{cases}-[v(\varsigma)-u(\varsigma)\beta_+(\varsigma)]R_2(\varsigma)-\varsigma q(\varsigma)b_1(\varsigma)[\alpha_+(\varsigma)R_2(\varsigma)+\beta_2^+(\zeta)],\ \varsigma\in D_+,\\ \varsigma^{-\kappa}q^{-1}(\varsigma)R_2(\varsigma),\ \varsigma\in D_-,\end{cases}$$

$$\chi_{21}(\varsigma)=\begin{cases}q(\varsigma)[\alpha_+(\varsigma)R_1(\varsigma)+\beta_1^+(\zeta)]-u(\varsigma)R_1(\varsigma),\ \varsigma\in D_+,\\ \varsigma^{-\kappa}q^{-1}(\varsigma)R_1(\varsigma)\overline{\beta_+(\overline{\varsigma}^{-1})}-\varsigma^{-\kappa}q(\varsigma)[\alpha_-(\varsigma)R_1(\varsigma)-\beta_1^+(\zeta)],\ \varsigma\in D_-,\end{cases}$$

$$\chi_{22}(\varsigma)=\begin{cases}-q(\varsigma)[\alpha_+(\varsigma)R_2(\varsigma)+\beta_2^+(\zeta)]+u(\varsigma)R_2(\varsigma),\ \varsigma\in D_+,\\ -\varsigma^{-\kappa}q^{-1}(\varsigma)R_2(\varsigma)\overline{\beta_+(\overline{\varsigma}^{-1})}-\varsigma^{-\kappa}q(\varsigma)[\alpha_-(\varsigma)R_2(\varsigma)-\beta_2^+(\zeta)],\ \varsigma\in D_-.\end{cases}$$

Здесь $\beta_+(\varsigma),p(\varsigma),q(\varsigma)$ определяются из равенства $\varsigma b_1(\varsigma)=\dfrac{p(\varsigma)}{q(\varsigma)}+\beta_+(\varsigma)$; функции $u(\varsigma),v(\varsigma)$ являются решением уравнения Безу $p(\varsigma)u(\varsigma)+q(\varsigma)v(\varsigma)=1$; $R_1(\varsigma),R_2(\varsigma)$ − существенные многочлены последовательности $\alpha_{2N-1},\dots,\alpha_1$:

$$P_{2N-1}(\tau)R_j(\tau)=\tau^{\mu_j}\alpha_j^-(\tau)+\tau^{2N}\beta_j^+(\tau),\ \ j=1,2,\ P_{2N-1}(\tau)=\sum_{k=1}^{2N-1}\alpha_{2N-k}\tau^k,$$

где $\mu_1,\mu_2=2N-r$ − индексы последовательности, $\alpha_j^-(\tau)$ − многочлены от τ^{-1}, $\beta_j^+(\tau)$ − многочлены от τ степени не выше μ_j-1, N − число полюсов функции $\varsigma b(\varsigma)$ в области D_+, $r=rank\,T_N$, $T_k=\left\|\alpha_{2N-i+j}\right\|_{\substack{i=k,\dots,2N-1\\ j=0,\dots,k-1}}$ $\left(\alpha_k=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\tau^{k-1}\alpha(\tau)d\tau\right)$, $1\le k\le 2N-1$, − последовательность теплицевых матриц; $\alpha(\varsigma)=\alpha_+(\varsigma)+\alpha_-(\varsigma)=u(\varsigma)q^{-1}(\varsigma)-\overline{p(\overline{\varsigma}^{-1})}\left(\overline{(q(\overline{\varsigma}^{-1})}\right)^{-1}q^{-2}(\varsigma)$.

При нахождении решения неоднородной задачи используются кусочно-аналитические функции

$$\Omega_j(\varsigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_j(\tau)d\tau}{\tau-\varsigma},\ j=1,2,$$

где $\omega_1(\tau)=\frac{1}{\sigma_0}\left[\chi_{22}^+(\tau)f_1(\tau)-\tau^{\kappa-1}q^{-1}(\tau)R_2(\tau)\overline{f_1(\tau)}\right],\omega_2(\tau)=-\frac{1}{\sigma_0}\left[\chi_{21}^+(\tau)f_1(\tau)-\tau^{\kappa-1}q^{-1}(\tau)R_1(\tau)\overline{f_1(\tau)}\right].$

Вернемся теперь к переменной z по формуле $\varsigma=-i\frac{z-i}{z+i}$. Результаты статьи [1] позволяют сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $\kappa\le r-N$, то однородная трехэлементная задача линейного сопряжения для полуплоскости допускает в классе исчезающих в точке $z=-i$ кусочно-аналитических функций только нулевое решение.*

Если $r-N<\kappa\le N-r$, то размерность над R пространства решений однородной задачи равна $\kappa+N-r$. Любое решение $\psi(z)$ этой задачи имеет вид

$$\psi(z)=a_1(z)\varphi(z),$$

$$a_1(z)=\begin{cases}a_+(z),\ z\in S_+,\\ a_-(z),\ z\in S_-,\end{cases}\ a_\pm(z)=\exp B_\pm(z),\quad B(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z+i}{t+i}\cdot\frac{\ln a_0(t)dt}{t-z},\ a_0(t)=\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k a(t),$$

$$\varphi(z)=\pi_1(z)\chi_{11}(z)+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\pi_1^*(z)\chi_{21}^*(z),$$

где $\pi_1(z)$ – произвольный полином относительно $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$ с комплексными коэффициентами степени не выше $\kappa+N-r-1$, а $\chi_{11}(z),\chi_{21}(z)$ – элементы канонической матрицы $\chi(z)$, определяемой формулой (5), в которой $\varsigma=-i\frac{z-i}{z+i}$.

При $\kappa>N-r$ пространство решений однородной задачи имеет размерность 2κ, и любое решение может быть представлено в виде

$$\psi(z)=a_1(z)\varphi(z),$$

$$\varphi(z)=\pi_1(z)\chi_{11}(z)+\pi_2(z)\chi_{12}(z)+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\pi_1^*(z)\chi_{21}^*(z)+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\pi_2^*(z)\chi_{22}^*(z).$$

Здесь $\pi_1(z),\pi_2(z)$ – произвольные полиномы относительно $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$ с комплексными коэффициентами степени не выше $\kappa+N-r-1,\kappa-N+r-1$ соответственно.

Теорема 2. *Неоднородная трехэлементная задача линейного сопряжения для полуплоскости имеет единственное решение при любой правой части тогда и только тогда, когда $\kappa=0,\ r=N$. Это решение находится по формуле*

$$\psi_0(z)=a_1(z)\varphi_0(z),$$

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2}\left[\chi_{11}(z)\Omega_1(z)+\chi_{12}(z)\Omega_2(z)+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\chi_{21}^*(z)\Omega_1^*(z)+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\chi_{22}^*(z)\Omega_2^*(z)\right],\tag{6}$$

$$\Omega_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{z+i}{t+i}\right)\frac{\omega_j(t)dt}{t-z},\ j=1,2.$$

Задача имеет не более одного решения при $\kappa\le r-N$. При $\kappa<0$ решение существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие $2|\kappa|$ условия разрешимости:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{j-1}\frac{\omega_1(t)dt}{(t+i)^2}=0,\ j=1,2,\dots,|\kappa+N-r|,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{j-1}\frac{\omega_2(t)dt}{(t+i)^2}=0,\ j=1,2,\dots,|k-N+r|.$$

Единственное решение в данном случае строится по формуле (6).

Задача разрешима при любой правой части только при $\kappa \ge N-r$. *Общее решение в этом случае имеет вид*

$$\psi(z)=\psi_0(z)+a_1(z)\left[\pi_1(z)\chi_{11}(z)+\pi_2(z)\chi_{12}(z)+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\pi_1^*(z)\chi_{21}^*(z)+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\pi_2^*(z)\chi_{22}^*(z)\right],$$

где $\psi_0(z)$ *определяется формулой (6), а* $\pi_1(z),\pi_2(z)$ *− произвольные полиномы относительно* $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$ *с комплексными коэффициентами степени не выше* $\kappa+N-r-1, \kappa-N+r-1$ *соответственно.*

Наконец, при $r-N<\kappa<N-r$ *формула*

$$\psi(z)=\psi_0(z)+a_1(z)\left[\pi_1(z)\chi_{11}(z)+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\pi_1^*(z)\chi_{21}^*(z)\right],$$

где $\pi_1(z)$ *− произвольный полином относительно* $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$ *с комплексными коэффициентами степени не выше* $\kappa+N-r-1$, *дает общее решение неоднородной задачи (1) при выполнении следующих* $|\kappa-N+r|$ *условий разрешимости*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{j-1}\frac{\omega_2(t)dt}{(t+i)^2}=0,\ j=1,2,\ldots,|k-N+r|.$$

Литература

1. Адуков, В.М. О явном и точном решениях задачи Маркушевича на окружности / В.М. Адуков, А.А. Патрушев // Известия Саратовского университета. Новая серия «Математика. Механика. Информатика». – 2011. – Т. 11. – Вып. 2. – С. 9–20.

2. Адуков, В.М. Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц функций / В.М. Адуков // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 54–57.

3. Adukov, V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices / V.M. Adukov // Linear Algebra Appl. – 1998. – Vol. 274. – P. 85–124.

4. Адуков, В.М. Факторизация Винера-Хопфа кусочно мероморфных матриц функций / В.М. Адуков // Мат. сб. – 2009. – Т. 200, № 8. – С. 3–24.

5. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 542 с.

Поступила в редакцию 8 декабря 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 5–9

ONE CASE OF THE GENERALIZED THREE-ELEMENT BOUNDARY PROBLEM ON THE LINE

***V.M. Adukov*[1], *A.A. Patrushev*[2]**

In the article an explicit method for the solution of generalized three-element boundary value problem in the class of piecewise analytic functions is given. The boundary condition of the problem is given on the straight line. The problem is solved in a closed form under certain constraints on the coefficient $b(t)$ of the problem.

Keywords: boundary problems for analytic functions, Riemann matrix boundary problem, Markushevich boundary problem.

References

1. Adukov V.M., Patrushev A.A. O yavnom i tochnom resheniyakh zadachi Markushevicha na okruzhnosti (On explicit and exact solutions of the Markushevich boundary problem for circle). *Izvestya Saratovskogo gosudarstvennogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Mathematica. Mechanica. Informatica.* 2011. Vol. 11. Issue 2. pp. 9–20. (in Russ.).

2. Adukov V.M. Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *St. Petersburg Mathematical Journal.* 1993. Vol. 4. Issue 1. pp. 51–69.

3. Adukov V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices. *Linear Algebra Appl*. 1998. Vol. 274. pp. 85–124. http://dx.doi.org/10.1016/S0024-3795(97)00304-2

4. Adukov V.M. Faktorizatsiya Vinera–Khopfa kusochno meromorfnykh matrits funktsiy (Wiener–Hopf factorization of piecewise meromorphic matrix-valued functions). *Sbornik*: *Mathematics*. 2009. Vol. 200, no. 8. pp. 1105–1126. (in Russ.).

5. Mucshelischvili N.I. *Singulayrnye integralnye uravneniya* (Singular integral equations). Moscow: Nauka, 1968. 542 p. (in Russ.).

Received 8 December 2013

[1] Adukov Victor Michaylovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: vicmikhad@mail.ru

[2] Patrushev Alexey Alexeevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Differential Stochastic Equations, South Ural State University.
E-mail: patraleksej@yandex.ru