

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕКОТОРЫХ КРУЖЕВНЫХ УЗЛОВ¹

В.В. Таркаев², Е.А. Фоминых³

Находятся точные значения и верхние оценки сложности дополнительных пространств некоторых кружевных узлов с тремя нитями.

Ключевые слова: кружевной узел; сложность.

1. Введение

Пусть M – компактное трехмерное многообразие с непустым краем. Напомним [1], что подполиэдр $P(M)$ называется спайном многообразия M , если многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $(M \times (0,1))$. Спайн P называется почти простым, если линк каждой его точки вкладывается в полный граф K_4 с четырьмя вершинами. Точки, линки которых гомеоморфны графу K_4 , называются истинными вершинами спайна P . Сложность $c(M)$ многообразия M определяется как минимальное возможное число истинных вершин почти простого спайна многообразия.

Табулирование трехмерных многообразий заданной сложности и получение точных значений сложности для больших классов многообразий дают естественный подход к проблеме их классификации. Задача вычисления сложности многообразий является весьма трудной. К настоящему времени точные значения сложности известны только для конечного числа табулированных многообразий [2, 3], для нескольких бесконечных семейств многообразий с краем [4–7] и замкнутых многообразий [8, 9]. Оценки сложности дополнительных пространств торических узлов получены в [10].

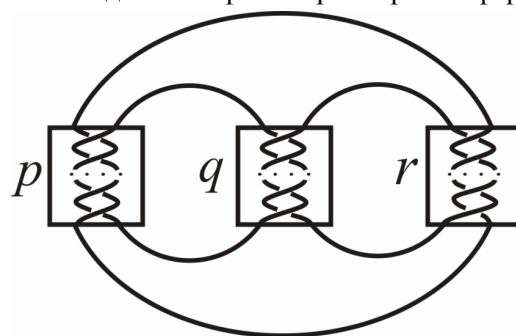
В работе находятся точные значения и верхние оценки сложности дополнительных пространств некоторых кружевных узлов с тремя нитями.

2. Основной результат

Кружевное зацепление (*pretzel link*) с тремя нитями $K(p, q, r)$ (см. рисунок), лежащее в трехмерной сфере, определяется тройкой (p, q, r) целых ненулевых чисел. Зацепление $K(p, q, r)$ не изменится при любой перестановке чисел p, q, r местами. Поэтому можно считать, что $p \leq q \leq r$. Хорошо известно, что зацепление $K(p, q, r)$ является узлом тогда и только тогда, когда среди чисел p, q, r как минимум два нечетны.

Следующая теорема устанавливает точные значения и верхние оценки сложности дополнительных пространств некоторых кружевных узлов с тремя нитями вида $K(1, q, r)$. Здесь под дополнительным пространством узла понимается компактное подмногообразие трехмерной сферы S^3 , получающееся вырезанием из S^3 открытой трубчатой окрестности узла. Для каждой пары натуральных чисел q, r , где $q \leq r$, определим целое число $f(q, r)$ следующим образом:

$$f(q, r) = \begin{cases} 0, & \text{если } q = r = 1, \\ 2, & \text{если } q = 1, r = 2, \\ \lfloor r/2 \rfloor + 2, & \text{если } q = 1, r > 2, \\ \lfloor (q+r)/2 \rfloor + 3, & \text{если } q > 1, r \geq q. \end{cases}$$



Кружевное зацепление с тремя нитями

¹ Исследования были поддержаны грантом РФФИ 14-01-00441, грантом НШ-1015.2014.1 по государственной поддержке ведущих научных школ, а также грантом 12-Т-1-1003/2 ОМН РАН

² Таркаев Владимир Викторович – научный сотрудник, Челябинский государственный университет и Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург.

E-mail: trk@csu.ru

³ Фоминых Евгений Анатольевич – старший научный сотрудник, Челябинский государственный университет и Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург.

E-mail: fominykh@csu.ru

Теорема. Пусть $1 \leq q \leq r \leq 15$ и зацепление $K(1, q, r)$ является узлом. Тогда сложность $c(q, r)$ дополнительного пространства узла $K(1, q, r)$ удовлетворяет условию $c(q, r) \leq f(q, r)$. Более того, если $f(q, r) \leq 8$, то $c(q, r) = f(q, r)$.

3. Доказательство теоремы

Опираясь на метод, описанный в доказательстве предложения 2.1.11 из [1], строим почти специальный спайн $P(1, q, r)$ дополнительного пространства узла $K(1, q, r)$. При помощи преобразований из [1, параграф 7.2] упрощаем спайн $P(1, q, r)$ до тех пор пока это возможно. Число истинных вершин полученного почти простого спайна $Q(1, q, r)$ и дает нам искомую верхнюю оценку сложности $f(q, r)$ дополнительного пространства узла.

Поскольку узел $K(1, 1, 1)$ является трилистником, то сложность его дополнительного пространства равна 0 (см. [10]). Если спайн $Q(1, q, r)$ имеет не более 8 истинных вершин, то дополнительное пространство узла $K(1, q, r)$ содержится в списке многообразий из [11, 12], сложность которых известна.

Литература

1. Matveev, S. Algorithmic topology and classification of 3-manifolds / S. Matveev // Algorithms and Computation in Mathematics: сб. науч. тр. – Springer, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2007. – Vol. 9. – 492 p.
2. Матвеев, С.В. Табулирование трехмерных многообразий / С.В. Матвеев // Успехи матем. наук. – 2005. – Т. 60, № 4. – С. 97–122.
3. Frigerio, R. Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary / R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio // Experimental Mathematics. – 2004. – Vol. 13, No. 2. – P. 171–184.
4. Anisov, S. Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds / S. Anisov // Moscow Math. J. – 2005. – Vol. 5, No. 2. – P. 305–310.
5. Frigerio, R. Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds / R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio // Pacific J. Math. – 2003. – Vol. 210, No. 2. – P. 283–297.
6. Веснин, А.Ю. Точные значения сложности многообразий Паолоцци–Циммермана / А.Ю. Веснин, Е.А. Фоминых // Докл. Акад. наук. – 2011. – Т. 439, № 6. – С. 727–729.
7. Веснин, А.Ю. О сложности трехмерных гиперболических многообразий с геодезическим краем / А.Ю. Веснин, Е.А. Фоминых // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53, № 4. – С. 781–793.
8. Jaco, W. Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // J. Topology. – 2009. – Vol. 2, No. 1. – P. 157–180.
9. Jaco, W. Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // Algebraic & Geometric Topology. – 2011. – Vol. 11, No. 3. – P. 1257–1265.
10. Fominykh, E. Upper bounds for the complexity of torus knot complements / E. Fominykh, B. Wiest // Journal of Knot Theory and its Ramifications. – 2013. – Vol. 22, No. 10. (article number 1350053).
11. Callahan, P. A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. With microfiche supplement / P. Callahan, M. Hildebrand, J. Weeks // Math. Comp. – 1999. – Vol. 68, No. 225. – P. 321–332.
12. Morwen Thistlethwaite's homepage [site]: Cusped hyperbolic manifolds with 8 tetrahedra. – URL: <http://www.math.utk.edu/~morwen/8tet/>, (дата обращения: 11.03.2014).

Поступила в редакцию 6 июня 2014 г.

UPPER BOUNDS FOR THE COMPLEXITY OF SOME PRETZEL KNOTS COMPLEMENTS

V.V. Tarkaev¹, E.A. Fominykh²

Exact values and upper bounds for the complexity of some 3-strand pretzel knot complements are established.

Keywords: pretzel knot; complexity.

References

1. Matveev, S. Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2007. Vol. 9. 492 p.
2. Matveev, S.V. *Russian Mathematical Surveys*. 2005. Vol. 60, no. 4. pp. 673–698. DOI: 10.4213/rm1446
3. Frigerio R., Martelli B., Petronio C. Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary. *Experimental Mathematics*. 2004. Vol. 13, No. 2. pp. 171–184.
4. Anisov S. Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds. *Moscow Math. J.* 2005. Vol. 5, No. 2. pp. 305–310.
5. Frigerio R., Martelli B., Petronio C. Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds. *Pacific J. Math.* 2003. Vol. 210, No. 2. pp. 283–297.
6. Vesnin A.Yu., Fominykh E.A. *Doklady Akademii nauk*. 2011. Vol. 439, no. 6. pp. 727–729. (in Russ.).
7. Vesnin A.Yu., Fominykh E.A. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*. 2012. Vol. 53, no. 4. pp. 781–793. (in Russ.).
8. Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S. Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces. *J. Topology*. 2009. Vol. 2, no. 1. pp. 157–180.
9. Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S. Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds. *Algebraic & Geometric Topology*. 2011. Vol. 11, no. 3. pp. 1257–1265.
10. Fominykh E., Wiest B. Upper bounds for the complexity of torus knot complements. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*. 2013. Vol. 22, no. 10. (article number 1350053). DOI: 10.1142/S0218216513500533
11. Callahan P., Hildebrand M., Weeks J. A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. With microfiche supplement. *Math. Comp.* 1999. Vol. 68, no. 225. pp. 321–332.
12. Morwen Thistlethwaite's homepage [site]: Cusped hyperbolic manifolds with 8 tetrahedra. URL: <http://www.math.utk.edu/~morwen/8tet/> (date: 11.03.2014).

Received 6 June 2014

¹ Tarkaev Vladimir Viktorovich is Research Fellow, Chelyabinsk State University and Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg.

E-mail: trk@csu.ru

² Fominykh Evgeny Anatol'evich is Senior Staff Scientist, Chelyabinsk State University and Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg.

E-mail: fominykh@csu.ru