УДК 519.63

ИТЕРАЦИОННАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ НА ФИКТИВНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

А.Л. Ушаков[1]

Рассматривается эллиптическое дифференциальное уравнение четвёртого порядка при смешанных краевых условиях. Его численное решение с помощью итерационной факторизации на фиктивном продолжении сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами, в которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более трёх.

Ключевые слова: итерационная факторизация, фиктивное продолжение.

Введение

Рассматривается эллиптическое дифференциальное уравнение четвёртого порядка в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат, на двух смежных сторонах прямоугольника заданы условия шарнирного опирания, а на остальной части границы условия симметрии. Для дискретного аналога этого уравнения в виде систем линейных алгебраических уравнений приводится факторизованный предобуславливатель квадратно попеременно треугольного вида. Исходная задача может быть получена в методах типа фиктивных компонент при решении эллиптических дифференциальных уравнений четвёртого порядка в плоских областях достаточно произвольного вида при однородных главных или естественных краевых условиях.

Малые деформации тонких пластин на упругом основании

Из линейной теории изгибания тонких пластин на упругом основании, основываясь на [1, 2] энергия деформированной пластины может быть записана в виде

$$E(\breve{u}) = \frac{1}{2} D \int\limits_{\Omega} ((\Delta\breve{u})^2 + 2(1-\sigma)(\breve{u}_{xy}^2 - \breve{u}_{xx}\breve{u}_{yy}))d\Omega + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} K\breve{u}^2 d\Omega - \int\limits_{\Omega} \breve{P}\breve{u}d\Omega\,,$$

где $\breve{P}$ – давление, K – коэффициент жёсткости упругого основания ($K \equiv 0$ в случае отсутствия упругого основания), $D = Eh^3/(12(1-\sigma^2))$ – цилиндрическая жёсткость пластины, h – толщина пластины, E – модуль Юнга (модуль растяжения), σ – коэффициент Пуассона (отношение поперечного сжатия к продольному растяжению), Ω – плоская область, $\breve{u}$ – искомое смещение. Если приравнять к нулю вариацию энергии

$$\delta E(\breve{u}) = D\int\limits_{\Omega} (\Delta\breve{u}\Delta\breve{v} + (1-\sigma)(2\breve{u}_{xy}\breve{v}_{xy} - \breve{u}_{xx}\breve{v}_{yy} - \breve{u}_{yy}\breve{v}_{xx}))d\Omega + \int\limits_{\Omega} K\breve{u}\breve{v}d\Omega - \int\limits_{\Omega} \breve{P}\breve{v}d\Omega = 0\,,$$

где $\breve{v} = \delta\breve{u}$, то при $a = K/D$, $\breve{f} = \breve{P}/D$ получается, что

$$\int\limits_{\Omega} (\sigma\Delta\breve{u}\Delta\breve{v} + (1-\sigma)(\breve{u}_{xx}\breve{v}_{xx} + 2\breve{u}_{xy}\breve{v}_{xy} + \breve{u}_{yy}\breve{v}_{yy}) + a\breve{u}\breve{v})d\Omega = \int\limits_{\Omega} \breve{f}\breve{v}d\Omega\,.$$

После интегрирования по частям устанавливается

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta^2\breve{u} + a\breve{u})\breve{v}d\Omega + \int\limits_{s} l_1\breve{u}\frac{\partial\breve{v}}{\partial n}ds - \int\limits_{s} l_2\breve{u}\breve{v}ds = \int\limits_{\Omega} \breve{f}\breve{v}d\Omega\,,$$

где

$$l_1\breve{u} = \Delta\breve{u} + (1-\sigma)n_1 n_2\breve{u}_{xy} - n_2^2\breve{u}_{xx} - n_1^2\breve{u}_{yy}\,,$$

$$l_2\breve{u} = \frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}(n_1 n_2(\breve{u}_{yy} - \breve{u}_{xx}) + (n_1^2 - n_2^2)\breve{u}_{xy})\,,$$

$s = \partial\Omega$, $n_1 = -\cos(n,x)$, $n_2 = -\cos(n,y)$.

[1] Ушаков Андрей Леонидович – старший преподаватель, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: ushakov_al@inbox.ru

Таким образом, возможно рассмотрение краевых условий жёсткой заделки, шарнирного опирания, симметрии и свободного опирания в отдельном или смешанном виде.

Непрерывная рассматриваемая задача в вариационной и классической постановках

Рассматривается задача

$$\breve{u}_1 \in \breve{V}_1 : \Lambda(\breve{u}_1, \breve{v}_1) = \breve{g}_1(\breve{v}_1) \ \forall \breve{v}_1 \in \breve{V}_1, \quad \breve{g}_1 \in \breve{V}_1', \tag{1}$$

где соболевское пространство функций

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Omega) = \left\{ \breve{v}_1 \in W_2^2(\Omega) : \breve{v}_1\big|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial \breve{v}_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$$

на области $\Omega = (0;b_1)\times(0;b_2)$, с границами $\Gamma_1 = \{b_1\}\times[0;b_2]\bigcup[0;b_1]\times\{b_2\}, \Gamma_2 = \Gamma\setminus\Gamma_1, \Gamma = \partial\Omega$, билинейная форма

$$\Lambda(\breve{u}_1, \breve{v}_1) = \int_\Omega (\sigma\Delta\breve{u}_1\Delta\breve{v}_1 + (1-\sigma)(\breve{u}_{1xx}\breve{v}_{1xx} + 2\breve{u}_{1xy}\breve{v}_{1xy} + \breve{u}_{1yy}\breve{v}_{1yy}) + a\breve{u}_1\breve{v}_1)d\Omega,$$

при этом $a = a_1$ на области Ω_1, $a = a_2$ на $\Omega\setminus\Omega_1$, области Ω_1, Ω_2: $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \bigcup \overline{\Omega}_2$, $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing$, $\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 \neq \varnothing$, заданы константы $\sigma \in (0;1)$, $b_1, b_2 \in (0;+\infty)$, $a_1, a_2 \in [0;+\infty)$, $a_1 \le a_2$.

Можно отметить, что

$$\exists c_1, c_2 \in (0;+\infty): \ c_1\|\breve{v}_1\|^2_{W_2^2(\Omega)} \le \Lambda(\breve{v}_1, \breve{v}_1) \le c_2\|\breve{v}_1\|^2_{W_2^2(\Omega)} \quad \forall \breve{v}_1 \in \breve{V}_1,$$

а, следовательно, решение задачи (1) существует и единственно. Если $\breve{u}_1$ – искомая, а $\breve{f}_1$ – заданная достаточно гладкая функция и

$$\breve{g}_1(\breve{v}_1) = (\breve{f}_1, \breve{v}_1), \text{ где } (\breve{f}_1, \breve{v}_1) = \int_\Omega \breve{f}_1\breve{v}_1 d\Omega,$$

то из задачи (1) получается неоднородное бигармоническое уравнение со свободным членом при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2\breve{u}_1 + a\breve{u}_1 = \breve{f}_1, \ \breve{u}_1\big|_{\Gamma_1} = \Delta\breve{u}_1\big|_{\Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial\breve{u}_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial\Delta\breve{u}_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{2}$$

Дискретная аппроксимация рассматриваемой задачи

Производится дискретизация задачи (1) по методу конечных элементов на параболических восполнениях:

$$\tilde{u}_1 \in \tilde{V}_1 \subset \breve{V}_1 : \Lambda(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) = \breve{g}_1(\tilde{v}_1) \ \forall \tilde{v}_1 \in \tilde{V}_1 \subset \breve{V}_1. \tag{3}$$

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений, соответствующая задаче (3):

$$\overline{u}_1 \in \mathbb{R}^N: \ \Lambda\overline{u}_1 = \overline{g}_1, \ \overline{g}_1 \in \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

где $\overline{v}_1 \in \mathbb{R}^N$: $\overline{v}_1 = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,N})'$, $N = m \cdot n$, m, $n \in \mathbb{N}$, а $v_{1,n(i-1)+j} = v_{1,i,j}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, и $v_{1,i,j}$ являются значениями функции дискретного аргумента соответствующего узлам сетки $(x_i, y_j) = ((i-0{,}5)h_1, (j-0{,}5)h_2)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, шаги сетки $h_1 = b_1/(m+0{,}5)$, $h_2 = b_2/(n+0{,}5)$, состоящей из указанных выше узлов, а матрицы Λ размерности $N \times N$, определяются следующим образом:

$$\langle \Lambda\overline{u}_1, \overline{v}_1 \rangle = \Lambda(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) \ \forall \tilde{u}_1, \tilde{v}_1 \in \tilde{V}_1 \subset \breve{V}_1,$$

здесь $\langle .,. \rangle$ – скалярное произведение векторов следующего вида:

$$\langle \overline{u}_1, \overline{v}_1 \rangle = (\overline{u}_1, \overline{v}_1)h_1h_2 = \sum_{k=1}^N u_{1,k}v_{1,k}h_1h_2 \quad \forall \overline{u}_1, \overline{v}_1 \in \mathbb{R}^N,$$

а подпространство $\tilde{V}_1 \subset \breve{V}_1$ определяется так, что

$$\tilde{V}_1 = \left\{ \tilde{v}_1 : \tilde{v}_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_{1,i,j}\Phi^{i,j}(x,y), v_{1,i,j} \in \mathbb{R}, \right\},$$

где базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x,y)=\Psi_{1,i}(x)\Psi_{2,j}(y),\ \Psi_{1,i}(x)=\mathrm{E}(1/i)\Psi(x/h_1-i+3)+\Psi(x/h_1-i+2)-\mathrm{E}(i/m)\Psi(x/h_1-i),$$

$$\Psi_{2,j}(y)=\mathrm{E}(1/j)\Psi(y/h_2-j+3)+\Psi(y/h_2-i+2)-\mathrm{E}(j/n)\Psi(y/h_2-j),\ i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

$$\Psi(z)=\begin{cases}0,5z^2, & z\in[0;1],\\ -z^2+3z-1,5, & z\in[1;2],\\ 0,5z^2-3z+4,5, & z\in[2;3],\end{cases}$$

$\Psi(z)=0,\ z\notin[0;3]$, $E(.)$ – функция целая часть числа, компоненты вектора $\overline{g}_1$ определяются следующим образом:

$$g_{1,n(i-1)+j}=g_{1,i,j}=h_1^{-1}h_2^{-1}g_1(\Phi^{i,j}(x,y)),\ i=1,...,m,\ j=1,...,n,\text{ т.е. }\langle\overline{g}_1,\overline{v}_1\rangle=\hat{g}_1(\tilde{v}_1),\ \forall\tilde{v}_1\in\tilde{V}_1.$$

Отметим, что решение задачи (4), как и (3) существует, единственно и известны оценки типа

$$1.\ \|\breve{u}_1-\tilde{u}_1\|_{W_2^k(\Omega)}\le c\left|\overline{h}\right|^{s-k}\|\breve{u}_1\|_{W_2^s(\Omega)},$$

$$2.\ \lim_{\overline{h}\to 0}\|\breve{u}_1-\tilde{u}_1\|_{W_2^2(\Omega)}=0,\ \overline{h}=(h_1,h_2),\ \left|\overline{h}\right|=\max\{h_1,h_2\}.$$

Фиктивное продолжение дискретной решаемой задачи и её решения

Выбирается фиктивное продолжение дискретной решаемой задачи из (4)

$$\overline{u}\in\mathbb{R}^{2N}:\ \hat{D}\overline{u}=\overline{g},\ \overline{g}\in\mathbb{R}^{2N},\ \overline{g}_2=\overline{0}, \tag{5}$$

где векторы

$$\overline{v}\in\mathbb{R}^{2N}:\ \overline{v}=(\overline{v}_1',\overline{v}_2')',$$

блочная, нижнетреугольная матрица D размерности $2N\times 2N$ такова, что

$$\hat{D}_{11}=\Lambda,\ \hat{D}_{12}=0,\ \hat{D}_{21}=\theta_A,\ \hat{D}_{22}=M_\theta,$$

матрицы

$$\theta_A=A\theta+\theta A,\ M_\theta=A^2-\theta^2,\ \theta=\nabla_x'\nabla_y-\nabla_y'\nabla_x,\ A=\nabla_x'\nabla_x+\nabla_y'\nabla_y,$$

а матрицы ∇_x,∇_y размерности $N\times N$ определяются следующим образом $(\alpha=1,2)$:

$$\langle\nabla_x\overline{u}_\alpha,\overline{v}_\alpha\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{\alpha,i+1,j}-u_{\alpha,i,j})h_1^{-1}v_{\alpha,i,j})h_1h_2,\ u_{\alpha,m+1,j}=v_{\alpha,m+1,j}=0,\ j=1,...,n,$$

$$\langle\nabla_y\overline{u}_\alpha,\overline{v}_\alpha\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{\alpha,i,j+1}-u_{\alpha,i,j})h_2^{-1}v_{\alpha,i,j})h_1h_2,\ u_{\alpha,i,n+1}=v_{\alpha,i,n+1}=0,\ i=1,...,m.$$

Введём подпространства векторов:

$$\overline{V}_1=\left\{\overline{v}=(\overline{v}_1',\overline{v}_2')'\in\mathbb{R}^{2N}:\theta_A\overline{v}_1+M_\theta\overline{v}_2=\overline{0}\right\},\ \overline{V}_2=\left\{\overline{v}=(\overline{v}_1',\overline{v}_2')'\in\mathbb{R}^{2N}:\overline{v}_1=\overline{0}\right\}.$$

Утверждение 1. Решение задачи из (5) $\overline{u}=(\overline{u}_1',\overline{u}_2')'\in\overline{V}_1$ существует, единственно и $\overline{u}_1$ – решение задачи из (4).

Итерационная факторизация на фиктивном продолжении дискретной решаемой задачи

Определим блочную матрицу $\hat{C}$ размерности $2N\times 2N$ такую, что

$$\hat{C}_{11}=\hat{C}_{22}=M_\theta,\ \hat{C}_{12}=-\theta_A,\ \hat{C}_{21}=\theta_A.$$

Для решения задач из (5) предлагается итерационный процесс:

$$\overline{u}^k\in\mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}(\overline{u}^k-\overline{u}^{k-1})=-\tau_k(\hat{D}\overline{u}^{k-1}-\overline{g}),\ \tau_k>0,\ k\in\mathbb{N}\ \forall\overline{u}^0\in\overline{V}_1. \tag{6}$$

Заметим, что в итерационном процессе из (6) возникают задачи с факторизованным оператором следующего вида:

$$\overline{U}\in\mathbb{C}^N:\ (LL^*)^2\overline{U}=\overline{G},\ \overline{G}\in\mathbb{C}^N,$$

при этом возможно расщепление на более простые задачи

$$\overline{H}\in\mathbb{C}^N,\ L\overline{H}=\overline{G},\ \overline{G}\in\mathbb{C}^N,$$

$$\overline{W}\in\mathbb{C}^N,\ L^*\overline{W}=\overline{H},\ \overline{H}\in\mathbb{C}^N,$$

$$\bar{Q} \in \mathbb{C}^N, \ L\bar{Q} = \bar{W}, \ \bar{W} \in \mathbb{C}^N,$$
$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N, \ L^*\bar{U} = \bar{Q}, \ \bar{Q} \in \mathbb{C}^N,$$

где матрицы L и L^* удовлетворяют следующим соотношениям $(\dot{e}^2 = -1)$:

$$L = \nabla_x{}' - \dot{e}\nabla_y{}', \ L^* = \bar{L}' = \nabla_x + \dot{e}\nabla_y, \ LL^* = (\nabla_x{}' - \dot{e}\nabla_y{}')(\nabla_x + \dot{e}\nabla_y) = A + \dot{e}\theta,$$
$$(LL^*)^2 = (A + \dot{e}\theta)^2 = M_\theta + \dot{e}\theta_A,$$

тогда

$$(M_\theta + \dot{e}\theta_A)(\bar{u}_1 + \dot{e}\bar{u}_2) = \bar{g}_1 + \dot{e}\bar{g}_2,$$

что равносильно системе:

$$\begin{cases} M_\theta \bar{u}_1 - \theta_A \bar{u}_2 = \bar{g}_1, \ \ \bar{u}_1 + \dot{e}\bar{u}_2 = \bar{U}, \\ \theta_A \bar{u}_1 + M_\theta \bar{u}_2 = \bar{g}_2, \ \ \bar{g}_1 + \dot{e}\bar{g}_2 = \bar{G} \end{cases}$$

и действительно на каждом шаге итерационных процессов из (6) возникают задачи типа

$$\hat{C}\bar{u} = \bar{g}, \ \bar{u} = (\bar{u}_1', \bar{u}_2')', \ \bar{g} = (\bar{g}_1{}', \bar{g}_2{}')'.$$

Утверждение 2. Если в итерационном процессе из (6) $\exists k \in \mathbb{N}: \ \bar{u}^{k-1} = \bar{u}$, то и $\bar{u}^k = \bar{u}$.

Пусть $\bar{u}^k = \bar{u} + \bar{\psi}^k, \ \forall k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Утверждение 3. Для итерационного процесса из (6) выполняется

$$\theta_A \bar{\psi}_1^k + M_\theta \bar{\psi}_2^k = (1 - \tau_k)\left(\theta_A \bar{\psi}_1^{k-1} + M_\theta \bar{\psi}_2^{k-1}\right), \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \bar{\psi}^k \in \bar{V}_1 \ \ \forall k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Замечание 1. Имеют место неравенства

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): \ c_1 M_\theta \le \Lambda \le c_2 M_\theta \ \ [3, 4].$$

Утверждение 4. Имеет место равенство

$$\left\langle \hat{C}\bar{\psi}, \bar{\psi} \right\rangle = \left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle M_\theta \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \right\rangle \ \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_1,$$

где также $\left\langle \bar{u}, \bar{v} \right\rangle = (\bar{u}, \bar{v}) h_1 h_2 = \sum_{k=1}^{2N} u_k v_k h_1 h_2 \ \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^{2N}$.

Доказательство. Учитывая, что

$$\theta_A \bar{\psi}_1 + M_\theta \bar{\psi}_2 = \bar{0}, \ \theta_A' = -\theta_A,$$

получается

$$\left\langle \hat{C}\bar{\psi}, \bar{\psi} \right\rangle = \left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle \theta_A \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \bar{\psi}_2 \theta_A \bar{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle M_\theta \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle M_\theta \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_2 \right\rangle.$$

Предположение 1. (О фиктивном продолжении действительной части на мнимую часть) Имеет место неравенство

$$\exists \alpha_2 \in (0; 1): \ \left\langle M_\theta \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \right\rangle \le \alpha_2 \left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle \ \ \forall \psi \in \bar{V}_1.$$

Можно отметить ($\gamma = (1 - \alpha_2)^{-1}$ или $\alpha_2 = 1 - \gamma^{-1}$), что

$$\exists \gamma \in (1; +\infty): \ \left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle \le \gamma \left\langle \hat{C}\bar{\psi}, \bar{\psi} \right\rangle = \gamma \left(\left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle M_\theta \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \right\rangle \right) \ \ \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_1,$$

т.к. матрица $M_\theta > 0$ потому, что $\forall \bar{\psi}_1 \ne \bar{0}$

$$\left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle (A^2 - \theta^2) \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle A^2 \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle \theta^2 \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle A\bar{\psi}_1, A\bar{\psi}_1 \right\rangle + \left\langle \theta\bar{\psi}_1, \theta\bar{\psi}_1 \right\rangle > 0$$

и матрица $\hat{C} > 0$, в нашем случае при $\psi \in \bar{V}_1$, т.к. выводится, что

$$(\hat{C}\bar{\psi}, \bar{\psi}) = (M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1) - (\theta_A \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_1) = ((A^2 - \theta^2)\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1) - ((A\theta + \theta A)\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_1) =$$
$$= (A\bar{\psi}_1)^2 + (\theta\bar{\psi}_1)^2 - (\theta\bar{\psi}_2, A\bar{\psi}_1) + (A\bar{\psi}_2, \theta\bar{\psi}_1) = (A\bar{\psi}_1 - \theta\bar{\psi}_2)^2 + (A\bar{\psi}_2 + \theta\bar{\psi}_1)^2 > 0, \ \forall \bar{\psi} \ne \bar{0},$$

последнее потому, что $(\nabla_x{}' - \dot{e}\nabla_y{}')(\nabla_x + \dot{e}\nabla_y)(\bar{\psi}_1 + \dot{e}\bar{\psi}_2) \ne \bar{0} \ \forall \bar{\psi} \ne \bar{0}$.

Также можно отметить, что для $\bar{\psi} \in \bar{V}_1$, т.е. для функций из соответствующего подпространства

$$\exists\lambda^{-2}\in(0;+\infty):\ 0\le\left\langle M_\theta\bar\psi_2,\bar\psi_2\right\rangle=\left\langle M_\theta^{-1}\theta_A\bar\psi_1,\theta_A\bar\psi_1\right\rangle\le\left\langle A^{-2}\theta_A\bar\psi_1,\theta_A\bar\psi_1\right\rangle=$$

$$=\left\langle(\theta+A^{-1}\theta A)\bar\psi_1,(\theta+A^{-1}\theta A)\bar\psi_1\right\rangle\le 2\left\langle\theta\bar\psi_1,\theta\bar\psi_1\right\rangle+2\left\langle A^{-1}\theta A\bar\psi_1,A^{-1}\theta A\bar\psi_1\right\rangle\le$$

$$\le 2\left\langle\theta\bar\psi_1,\theta\bar\psi_1\right\rangle+2\lambda^{-2}\left\langle\theta A\bar\psi_1,\theta A\bar\psi_1\right\rangle\le 2\left\langle\theta\bar\psi_1,\theta\bar\psi_1\right\rangle+2\lambda^{-2}\left\langle\theta\bar\varphi_1,\theta\bar\varphi_1\right\rangle\to 0\text{, при } h_1,h_2\to 0,$$

где $\bar\varphi_1=A\bar\psi_1$, т.е. $\left\langle M_\theta\bar\psi_2,\bar\psi_2\right\rangle\to 0$, $\bar\psi_2\to\bar 0$, при $h_1,h_2\to 0$, т.к.

$$\theta\bar\psi_1=\left(\nabla_x{}'\nabla_y-\nabla_y{}'\nabla_x\right)\bar\psi_1\to\bar 0,\ \theta\bar\varphi_1=\left(\nabla_x{}'\nabla_y-\nabla_y{}'\nabla_x\right)\bar\varphi_1\to\bar 0\text{, при } h_1,h_2\to 0,$$

по формуле Тейлора, если $\bar\varphi_1$, $\bar\psi_1$ – дискретные аналоги достаточно гладких функций.

Утверждение 5. Имеют место неравенства

$$c_1\left\langle\hat C\bar\psi,\bar\psi\right\rangle\le\left\langle\hat D\bar\psi,\bar\psi\right\rangle\le\gamma c_2\left\langle\hat C\bar\psi,\bar\psi\right\rangle,\ \forall\bar\psi\in\bar V_1.$$

Доказательство. Заметим, что

$$c_1\left\langle\hat C\bar\psi,\bar\psi\right\rangle=c_1(\left\langle M_\theta\bar\psi_1,\bar\psi_1\right\rangle-\left\langle M_\theta\bar\psi_2,\bar\psi_2\right\rangle)\le c_1\left\langle M_\theta\bar\psi_1,\bar\psi_1\right\rangle\le\left\langle\Lambda\bar\psi_1,\bar\psi_1\right\rangle=\left\langle\hat D\bar\psi,\bar\psi\right\rangle.$$

С другой стороны,

$$\gamma c_2\left\langle\hat C\bar\psi,\bar\psi\right\rangle=\gamma c_2(\left\langle M_\theta\bar\psi_1,\bar\psi_1\right\rangle-\left\langle M_\theta\bar\psi_2,\bar\psi_2\right\rangle)\ge\gamma c_2(1-\alpha_2)\left\langle M_\theta\bar\psi_1,\bar\psi_1\right\rangle\ge\left\langle\Lambda\bar\psi,\bar\psi\right\rangle=\left\langle\hat D\bar\psi,\bar\psi\right\rangle.$$

Утверждение 6. Если в итерационном процессе из (6)

$$\tau_k=\tau=2/(c_1+\gamma c_2)\ \text{ и }\ q=(\gamma c_2-c_1)/(\gamma c_2+c_1),$$

то

$$\left\langle\hat C\bar\psi^k,\bar\psi^k\right\rangle\le q^2\left\langle\hat C\bar\psi^{k-1},\bar\psi^{k-1}\right\rangle,\ k\in\mathbb N.$$

Доказательство. Из итерационного процесса получается, что

$$\hat C(\bar\psi^k-\bar\psi^{k-1})=-\tau\hat D\bar\psi^{k-1},\ \bar\psi^k=T\bar\psi^{k-1},\ T=E-\tau\hat C^{-1}\hat D,\ T=T'>0,$$

тогда

$$\left\langle\hat C\bar\psi^k,\bar\psi^k\right\rangle=\left\langle\hat CT\bar\psi^{k-1},T\bar\psi^{k-1}\right\rangle\le\sup_{\bar\psi\in\bar V_1}\frac{\left\langle\hat CT\bar\psi,T\bar\psi\right\rangle}{\left\langle\hat C\bar\psi,\bar\psi\right\rangle}\left\langle\hat C\bar\psi^{k-1},\bar\psi^{k-1}\right\rangle=$$

$$=\sup_{\bar\psi\in\bar V_1}\left(\frac{\left\langle\hat CT\bar\psi,\bar\psi\right\rangle}{\left\langle\hat C\bar\psi,\bar\psi\right\rangle}\right)^2\left\langle\hat C\bar\psi^{k-1},\bar\psi^{k-1}\right\rangle=\sup_{\bar\psi\in\bar V_1}\left(\frac{\left\langle(\hat C-\tau\hat DT)\bar\psi,\bar\psi\right\rangle}{\left\langle\hat C\bar\psi,\bar\psi\right\rangle}\right)^2\left\langle\hat C\bar\psi^{k-1},\bar\psi^{k-1}\right\rangle=$$

$$=\sup_{\bar\psi\in\bar V_1}\left(1-\tau\frac{\left\langle\hat D\bar\psi,\bar\psi\right\rangle}{\left\langle\hat C\bar\psi,\bar\psi\right\rangle}\right)^2\left\langle\hat C\bar\psi^{k-1},\bar\psi^{k-1}\right\rangle=\max\left\{(1-\tau c_1)^2,\,(1-\tau\gamma c_2)^2\right\}\left\langle\hat C\bar\psi^{k-1},\bar\psi^{k-1}\right\rangle=q^2\left\langle\hat C\bar\psi^{k-1},\bar\psi^{k-1}\right\rangle.$$

Введём норму

$$\|\bar v_1\|_\Lambda=\sqrt{\left\langle\Lambda\bar v_1,\bar v_1\right\rangle}.$$

Теорема 1. В итерационном процессе из (6), при $\tau_k=\tau=2/(c_1+\gamma c_2)$, $k\in\mathbb N$, будет

$$\left\|\bar u_1{}^k-\bar u_1\right\|_\Lambda\le\varepsilon\left\|\bar u_1{}^0-\bar u_1\right\|_\Lambda,$$

где

$$0\le\varepsilon\le\sqrt{\gamma c_2/c_1}\,q^k.$$

Доказательство. Из утверждения 5 получается

$$\left\|\bar\psi^k\right\|_\Lambda^2=\left\langle\Lambda\bar\psi^k,\bar\psi^k\right\rangle\le\gamma c_2\left\langle\hat C\bar\psi^k,\bar\psi^k\right\rangle\le\gamma c_2q^{2k}\left\langle\hat C\bar\psi^0,\bar\psi^0\right\rangle\le$$

$$\le(\gamma c_2/c_1)q^{2k}\left\langle\Lambda\bar\psi^0,\bar\psi^0\right\rangle=(\gamma c_2/c_1)q^{2k}\left\|\bar\psi^0\right\|_\Lambda^2.$$

Вывод. Учитывая вид матриц L, L^*, можно отметить, что для решения задачи из (4) с N неизвестными, на основании приведенной теоремы 1, предложенными итерационным процессом из

(6) с относительной погрешностью ε , требуется не более чем $O(N \ln \varepsilon^{-1})$ арифметических операций. Для выбора итерационных параметров τ_k не требуется точного знания констант γ, c_1 и c_2, т.к. для ускорения сходимости итерационного процесса из (6) можно использовать известные вариационные методы и рекомендовать, например, метод скорейшего спуска.

Литература

1. Ландау, Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.

2. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. – 235 с.

3. Ушаков, А.Л. Модификация итерационной факторизации для численного решения двух эллиптических уравнений второго порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Том. 5, № 2. – С. 88–93.

4. Ушаков, А.Л. О приближённом решении одной эллиптической краевой задачи четвёртого порядка / А.Л. Ушаков. – Челябинск: Челябинский государственный технический университет, 1997. – 30 с. (Деп в ВИНИТИ 21.04.97, № 1346 – В97).

Поступила в редакцию 21 февраля 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 2, pp. 17–22

ITERATIVE FACTORIZATION ON FICTITIOUS CONTINUATION FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF ELLIPTIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER

A.L. Ushakov[1]

The elliptic differential equation of the fourth order is considered under the mixed boundary conditions. The numerical solution is reduced to the solution of the system of linear algebraic equations with triangular matrices, in which quantity of nonzero elements in every line is less than three, by means of iterative factorization on fictitious continuation.

Keywords: iterative factorization, fictitious continuation.

References

1. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoriya uprugosti* (Theory of Elasticity). Moscow, Nauka Publ., 1965. 204 p. (in Russ.).

2. Oganesyan L.A., Rukhovets L.A. *Variatsionno-raznostnye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* (Variational-difference methods for solving elliptic equations). Erevan: AN ArmSSR Publ., 1979. 235 p. (in Russ.).

3. Ushakov A.L. Modifikatsiya iteratsionnoy faktorizatsii dlya chislennogo resheniya dvukh ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka v pryamougol'noy oblasti (Updating iterative factorization for the numerical solution of two elliptic equations of the second order in rectangular area). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"*. 2013. Vol. 5, no. 2. pp. 88–93. (in Russ.).

4. Ushakov A.L. *O priblizhyennom reshenii odnoy ellipticheskoy kraevoy zadachi chetvyertogo poryadka* (An approximate solution of elliptic boundary value problem of fourth order). Chelyabinsk: Chelyabinskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiy universitet Publ., 1997. 30 p. (in Russ.).

Received 21 February 2014

[1] Ushakov Andrei Leonidovich is Senior Lecturer, Differential and Stochastic Equations Department, South Ural State University.
E-mail: ushakov_al@inbox.ru