УДК 517.948

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА

В.Ф. Мирасов[1], А.И. Сидикова[2]

Приведено приближенное решение задачи теплообмена методом регуляризации А.Н. Тихонова 2-го порядка, а также получена оценка погрешности этого приближенного решения.

Ключевые слова: операторное уравнение, регуляризация, оптимальный метод, оценка погрешности, некорректная задача.

Введение

Хорошо известно, что обратные задачи теплообмена обладают целым рядом характерных особенностей, а их решение и практическое использование сопряжено с определенными трудностями, обусловленными с одной стороны их некорректностью, а с другой высокими требованиями, предъявляемыми к точности решения этих задач. Однако, при надлежащей разработке теории и создании эффективных алгоритмов, методы решения обратных задач теплообмена являются достаточно эффективными и открывают новые возможности в тепловых исследованиях. Широкое практическое распространение данные задачи получили в таких отраслях науки и техники, как машиностроение, авиационная и космическая техника, энергетика, металлургия.

Настоящая статья посвящена исследованию и решению обратной граничной задачи теплообмена [1, с. 33] методом регуляризации А.Н. Тихонова 2-ого порядка [2]. Получено приближенное решение данной задачи, а также оценка погрешности приближенного решения.

Постановка прямой задачи

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<1,\ 0<t\le t_0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=0;\ 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t)=h(t),\ t\in[0,t_0], \tag{3}$$

где $h(t)\in W_2^2[0,t_0],\ \|h(t)\|^2_{W_2^2}=\int_0^{t_0}h^2(t)dt+\int_0^{t_0}|h''(t)|^2\,dt,$

$$h(0)=h'(0)=h(t_0)=h'(t_0)=0, \tag{4}$$

и

$$\int_0^{t_0}h^2(t)dt+\int_0^{t_0}|h''(t)|^2\,dt\le r_1^2, \tag{5}$$

где r_1 – некоторое известное число,

$$u(1,t)=0,\ t\in[0,t_0]. \tag{6}$$

Рассмотрим классическое решение $u(x,t)$ задачи (1)–(6), то есть $u(x,t)\in C([0,1]\times[0,t_0])\cap C^{2,1}((0,1)\times(0,t_0])$.

Из теоремы, сформулированной в [3, с. 190], следует существование и единственность такого решения. Решение задачи (1)–(6) имеет вид

$$u(x,t)=(1-x)h(t)+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\sin\pi nx, \tag{7}$$

[1] Мирасов Вадим Фаритович – аспирант, кафедра Вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: vadim.mirasov@yahoo.com
[2] Сидикова Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.

где

$$v_n(t) = -\frac{2}{\pi n}\int_0^t e^{-(\pi n)^2(t-\tau)} h'(\tau)d\tau. \quad (8)$$

Исследование гладкости решения $u(x,t)$

Из (8) следует, что

$$v_n(t) = \frac{2}{(\pi n)^3}[1 - e^{-(\pi n)^2 t}]h'(t). \quad (9)$$

Из формул (7) и (9) следует, что

$$u(x,t) \in C([0,1]\times[0,t_0]). \quad (10)$$

Теперь перейдем к исследованию непрерывности функции $u_t\,'(x,t)$. Для этого продифференцируем общий член ряда (7) по t

$$[-\frac{2}{\pi n}\int_0^t e^{-(\pi n)^2(t-\tau)} h'(\tau)d\tau]'_t = 2h'(t)\frac{e^{-(\pi n)^2 t}}{\pi n}[1 - e^{-2(\pi n)^2 t}]. \quad (11)$$

Из (11) и признака Абеля следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ ряд из производных сходится равномерно на прямоугольнике $[\varepsilon, 1-\varepsilon]\times[\varepsilon, t_0]$.

Таким образом

$$u(x,t) \in C^{2,1}((0,1)\times(0,t_0]), \quad (12)$$

а из (10) и (12) следует, что решение задачи (1)–(6), определяемое формулой (7), является классическим.

Из (4), (7) и (9) следует, что для любого x

$$u(x,t_0) = 0. \quad (13)$$

Постановка обратной граничной задачи

Предположим, что в постановке прямой задачи (1)–(6) функция $h(t)$, определяющая граничное условие (3), неизвестна и подлежит определению, потому вводится дополнительное условие

$$u(x_0,t) = f(t),\ x_0(0,1),\ t \in [0,t_0]. \quad (14)$$

Из (7) и (14) следует, что

$$f(t) = (1-x_0)h(t) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin \pi n x_0. \quad (15)$$

Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ удовлетворяющем (15) существует решение $h_0(t) \in W_2^2[0,t_0]$, удовлетворяющее (4) и (5), но $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны $f_\delta(t) \in L_2[0,t_0]$ и число $\delta > 0$, такие, что

$$\int_0^{t_0} |f_\delta(t) - f_0(t)|^2 dt \le \delta^2. \quad (16)$$

Требуется по $f_\delta(t)$ и δ определить приближенное решение $h_\delta(t)$ и получить оценку $\| h_\delta(t) - h_0(t) \| L_2$.

Введем линейный оператор A, отображающий пространство $L_2[0,t_0]$ в $L_2[0,t_0]$ и определяемый формулой

$$Ah(t) = -2\int_0^t K(t,\tau)h(\tau)d\tau, \quad (17)$$

где

$$K(t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n e^{-(\pi n)^2(t-\tau)} \sin \pi n x_0. \quad (18)$$

Заметим, что при условии $h_0(t) \in W_2^2[0,t_0]$ и выполнении условия (4), обратная граничная задача (1)–(2), (5), (6), (14), (16) эквивалентна интегральному уравнению

$$Ah(t) = f(t); h(t), f(t) \in L_2[0,t_0]. \tag{19}$$

Известно, что задача решения уравнения Вольтерра первого рода в пространстве $L_2[0,t]$ некорректна и потому для её решения используем метод регуляризации А.Н. Тихонова [2].

Метод регуляризации А.Н. Тихонова 2-го порядка

Этот метод заключается в сведении уравнения (17)–(19) к вариационной задаче, зависящей от параметра $\alpha > 0$.

$$\inf\{\| Ah(t) - f_\delta(t) \|^2 + \alpha \int_0^{t_0} |h(t)|^2\, dt + \alpha \int_0^{t_0} |h^{``}(t)|^2\, dt : h(t) \in W_2^2[0,t_0], h(0) = h(t_0) = 0\} \tag{20}$$

Задача (20) эквивалентна интегродифференциальному уравнению

$$A^* Ah(t) + \alpha h^{(IV)}(t) + \alpha h(t) = A^* f_\delta(t), \tag{21}$$

где A^* – оператор, сопряженный A, $h(t) \in W_2^4[0,t_0]$ и $h(0) = h^{``}(0) = h(t_0) = h^{``}(t_0) = 0$.

Известно (см. [2]), что для любых $\alpha > 0$ и $f_\delta(t) \in L_2[0,t_0]$ существует единственное решение $h_\delta^\alpha(t)$ уравнения (21).

Значение параметра регуляризации $\alpha = \alpha(f_\delta, \delta)$ определим из принципа невязки [4], которое определяется уравнением

$$\| Ah_\delta^\alpha(t) - f_\delta(t) \|_{L_2}^2 = \delta^2. \tag{22}$$

Известно, что при условии $\| f_\delta(t) \|^2 > \delta^2$ уравнение (22) имеет единственное решение $\alpha(f_\delta, \delta)$.

Таким образом, приближенное решение $h_\delta(t)$ уравнения (19) определим формулой

$$h_\delta(t) = h_\delta^{\alpha(f_\delta,\delta)}(t). \tag{23}$$

Оценка погрешности $\| h_\delta(t) - h_0(t) \|_{L_2}$

Для оценки погрешности введем модуль непрерывности $\omega(\delta, r_1)$

$$\omega(\delta, r_1) = \sup \left\{ \begin{aligned} &\| h(t) \|_{L_2} : h(t) \in W_2^2[0,t_0], h(0) = h^{`}(0) = h(t_0) = h^{`}(t_0) = 0, \\ &\int_0^{t_0} h(t)^2 dt + \int_0^{t_0} |h^{``}(t)|^2\, dt \le r_1^2, \| Ah(t) \|_{L_2}^2 \le \delta^2 \end{aligned} \right\}. \tag{24}$$

В работе [5] приведено доказательство оценки

$$\| h_\delta(t) - h_0(t) \|_{L_2} \le 2\omega(\delta, r_1), \tag{25}$$

где $h_\delta(t)$ определена (23).

Рассмотрим расширение обратной задачи (1), (2), (5), (6), (14) на полупрямую $[t_0, \infty)$. Для этого введем функции $\overline{u}(x,t)$ и $\overline{f}(t)$, определяемые формулами

$$\overline{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t); 0 \le x \le 1, t \in [0,t_0] \\ 0; 0 \le x \le 1, t > t_0 \end{cases} \tag{26}$$

и

$$\overline{f}(t) = \begin{cases} f(t); t \in [0,t_0] \\ 0; t > t_0 \end{cases}. \tag{27}$$

Из (10) и (13) следует непрерывность функций $\overline{u}(x,t)$ и $\overline{f}(t)$, а из (26) следует, что функция $\overline{u}(x,t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial \overline{u}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \overline{u}(x,t)}{\partial, x^2}, 0 < x < 1, 0 < t, \tag{28}$$

$$\overline{u}(x,0) = 0; 0 \le x \le 1, \tag{29}$$

$$\overline{u}(x_0,t) = \overline{f}(t), t \ge 0, \tag{30}$$

и

$$\bar{u}(1,t)=0; t\ge 0. \quad (31)$$

А функцию $\bar{h}(t)$ требуется определить, причем

$$\bar{u}(0,t)=\bar{h}(t). \quad (32)$$

Обозначим через $\bar{H}$ линейное многообразие $L_2[0,\infty)$ такое, что $\bar{h}(t)\in\bar{H}$ тогда и только тогда, когда

$$\bar{h}(t)=\begin{cases} h(t); 0\le t\le t_0 \\ 0; t>t_0 \end{cases}, \quad (33)$$

где $h(t)$ удовлетворяет условию (4).

Обозначим через $\bar{A}$ линейный оператор, действующий из $L_2[0,\infty)$ в $L_2[0,\infty)$ и определенный на множестве $\bar{H}$ формулой

$$\bar{A}\bar{h}(t)=\bar{f}(t), \quad (34)$$

где $\bar{f}(t)=\bar{u}(x_0,t)$, а $\bar{u}(x,t)$ – решение задачи (28), (29), (31) и (32).

Для оператора $\bar{A}$ введем модуль непрерывности $\omega(\delta,r_1)$

$$\omega(\delta,r_1)=\sup\left\{\|\bar{h}(t)\|_{L_2}:\bar{h}(t)\in\bar{H},\int_0^\infty|\bar{h}(t)|^2\,dt+\int_0^\infty|\bar{h}^{``}(t)|^2\,dt\le r_1^2,\|\bar{A}\bar{h}(t)\|_{L_2}^2\le\delta^2\right\} \quad (35)$$

Из (24), (33)–(35), (13) следует, что

$$\bar{\omega}(\delta,r_1)=\bar{\omega}(\delta,r_1). \quad (36)$$

Для оценки сверху функций $\bar{\omega}(\delta,r_1)$ решим задачу (28)–(31), используя преобразование Фурье по t на полупрямой $[0,\infty)$.

Обозначим это преобразование через F_t.

Таким образом, задачу (28)–(31) сведем к следующей

$$\frac{\partial^2\hat{u}(x,\tau)}{\partial x^2}=i\tau\hat{u}(x,\tau);\ 0<x<1, 0<\tau, \quad (37)$$

где $\hat{u}(x,\tau)=F_t[\bar{u}(x,t)]$,

$$\bar{u}(x,\tau)=F_t[\bar{u}(x,t)],\ \hat{u}(1,\tau)=0;\ \ \tau\ge 0 \quad (38)$$

$$\hat{u}(x_0,\tau)=\hat{f}(\tau);\ \ \tau\ge 0,\ \hat{u}(x_0,\tau)=f(\tau);\ \ \tau\ge 0 \quad (39)$$

где $\hat{f}(\tau)=F_t[\bar{f}(t)]$.

Решение уравнения (37) имеет вид

$$\hat{u}(x,\tau)=B(\tau)e^{\mu_0 x\sqrt{\tau}}+C(\tau)e^{-\mu_0 x\sqrt{\tau}};\ \ \tau\ge 0, \quad (40)$$

где $\mu_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, а $B(\tau)$ и $C(\tau)$ подлежат определению.

Из (38) следует, что

$$B(\tau)e^{\mu_0\sqrt{\tau}}+C(\tau)e^{-\mu_0\sqrt{\tau}}=0,\ \tau\ge 0. \quad (41)$$

Из (39) следует, что

$$B(\tau)e^{\mu_0\sqrt{\tau}}+C(\tau)e^{-\mu_0\sqrt{\tau}}=\hat{f}(\tau),\ \tau\ge 0. \quad (42)$$

Из (41) и (42) следует, что

$$B(\tau)=-\frac{e^{-\mu_0\sqrt{\tau}}}{2\operatorname{sh}\mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}}\hat{f}(\tau);C(\tau)=\frac{e^{\mu_0\sqrt{\tau}}}{2\operatorname{sh}\mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}}\hat{f}(\tau); \quad (43)$$

Из (40)–(43) следует, что

$$\hat{A}\hat{h}(\tau) = \frac{\operatorname{sh}\mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}\hat{h}(\tau) = \hat{f}(\tau), \tag{44}$$

где $\hat{h}(\tau) \in F_t[\overline{H}]$, а $\hat{f}(\tau) \in L_2[0,\infty)$.

Из условий (4) и (5) следует, что

$$\int_0^\infty \sqrt{1+\tau^4}\,\hat{h}_0(\tau)d\tau \le r_1^2 . \tag{45}$$

Оператор $\hat{A}$, определенный (44), не меняя обозначения, продолжим на все пространство $L_2[0,\infty)$, т.е.

$$\hat{A}\hat{h}(\tau) = \frac{\operatorname{sh}\mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}\hat{h}(\tau) = \hat{f}(\tau), \tag{46}$$

где $\hat{h}(\tau)$ и $\hat{f}(\tau) \in L_2[0,\infty)$.

Из (46) следует, что $\hat{A}$ – инъективный линейный ограниченный оператор.

Соотношение (45) определяет оператор сложения D, отображающий пространство $L_2[0,\infty)$ в $L_2[0,\infty)$ и определяемый формулой

$$D\hat{g}(\tau) = \frac{\hat{g}(\tau)}{\sqrt{1+\tau^4}}, \quad \tau \ge 0, \tag{47}$$

и

$$\hat{h}(\tau) = D\hat{g}(\tau). \tag{48}$$

Введем класс корректности $\hat{M}_{r_1}$

$$\hat{M}_{r_1} = D\hat{S}_{r_1}, \tag{49}$$

где $\hat{S}_{r_1} = \hat{S}(0,r_1)$ – шар в пространстве $L_2[0,\infty)$ с центром в нуле радиуса r_1.

Если через $\overline{M}_r$ обозначить подмножество $\overline{H}$, такое, что $\overline{h}(t) \in M_{r_1}$

$$\int_0^{t_0} \left|\overline{h}(t)\right|^2 dt + \int_0^{t_0} \left|\overline{h}''(t)\right|^2 dt \le r_1^2. \tag{50}$$

Из (47)–(49) и (50) следует, что

$$\hat{M}_{r_1} \supset F_t[\overline{M}_{r_1}]. \tag{51}$$

Введем модуль непрерывности $\hat{\omega}(\delta,r_1)$ оператора $\hat{A}$ на множестве $\hat{M}_{r_1}$.

$$\hat{\omega}(\delta,r_1) = \left\{ \|\hat{h}(\tau)\|_{L_2} : \hat{h}(\tau) \in \hat{M}_{r_1}, \|\hat{A}\hat{h}(\tau)\| \le \delta \right\}. \tag{52}$$

Из (50)–(52), (35) и изометричности преобразования F_t следует, что

$$\omega(\delta,r_1) \le \hat{\omega}(\delta,r_1) \tag{53}$$

Таким образом, из (25), (36) и (53) следует оценка

$$\| h_\delta(t) - h_0(t) \|_{L_2} \le 2\hat{\omega}(\delta,r_1). \tag{54}$$

Теперь перейдем к оценке функций $\hat{\omega}(\delta,r_1)$. Для этого оценим функцию $\dfrac{|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}|}{|\operatorname{sh}\mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}|}$.

Так как эта функция ограничена на любом отрезке, то существует число r_2, такое, что

$$\sup_{\tau} \in [0,2] \frac{|\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}|}{|\operatorname{sh} \mu_0 (1-x_0)\sqrt{\tau}|} \le r_2, \tag{55}$$

а при $\tau \ge 2$

$$\frac{|\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}|}{|\operatorname{sh} \mu_0 (1-x_0)\sqrt{\tau}|} \le 8e^{x_0\sqrt{\frac{\tau}{2}}}, \tag{56}$$

Определим число $\tau_0 \ge 2$ таким образом, чтобы при $\tau \ge \tau_0$

$$e^{x_0\sqrt{\frac{\tau}{2}}} \ge r_2. \tag{57}$$

Из (57) следует, что при $\tau \ge \tau_0$

$$\frac{\left|\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}\right|}{\left|\operatorname{sh} \mu_0 (1-x_0)\sqrt{\tau}\right|} \le 9e^{x_0\sqrt{\frac{\tau}{2}}}, \tag{58}$$

Так как тут $\tau \ge \tau_0$

$$\frac{r_1}{\sqrt{2\tau^2}} \le \frac{r_1}{\sqrt{1+\tau^4}}, \tag{59}$$

Если $\tau_0^2 \le e^{x_0\sqrt{\frac{\tau_0}{2}}}$, то из (58) и (59) следует, что если $\bar{\tau}$ определить формулой

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2x_0^2} \ln^2\left(\frac{r_1}{9\delta}\right), \tag{60}$$

то из (60) следует на основании теоремы, доказанной в [6, с. 15], что при $\bar{\tau} \ge \tau_0$

$$\hat{\omega}(\delta, r_1) \le \frac{r_1}{\sqrt{1+\bar{\tau}^{-4}}}, \tag{61}$$

Или, что $\hat{\omega}(\delta, r_1) \sim \left[\ln\left(\frac{r_1}{9\delta}\right)\right]^{-4}$.

Таким образом, из (60), (61) и (54) следует, что при достаточно малых значениях δ справедлива оценка

$$\left\|h_\delta(t) - h_0(t)\right\|_{L_2} \le \frac{r_1}{\sqrt{1+\frac{1}{16x_0^2}\left[\ln\left(\frac{r_1}{9\delta}\right)\right]^8}}.$$

Литература

1. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 287 с.
2. Тихонов, А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов // ДАН СССР, 1963. – Т. 153, № 1. – С. 49–52.
3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский // М.: Наука, 1966. – 725 с.
4. Морозов, В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации / В.А. Морозов // ЖВМиМФ, 1966. – Т. 6, № 1. – С. 170–175.
5. Танана, В.П. Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач / В.П. Танана // ДАН СССР, 1975. – Т. 220, № 5. – С. 1035–1037.
6. Танана, В.П. Оптимальные методы решения некорректно поставленных задач / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2012. – 162 с.

Поступила в редакцию 6 сентября 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 2, pp. 5–11

APPROXIMATE SOLUTION OF INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR THE HEAT EXCHANGE BY A.N. TIKHONOV'S REGULARIZATION METHOD

V.F. Mirasov[1], A.I. Sidikova[2]

The article shows approximate solution of the heat exchange problem by A.N. Tikhonov's regularization method and the error estimate of approximate solution is given.

Keywords: operator equation, regularity, optimal method, error estimation, ill-posed problem.

References

1. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Extreme methods of ill-posed problems solution). Moscow: Nauka Publ., 1988. 287 p. (in Russ.).
2. Tikhonov A.N. *DAN SSSR*. 1963. Vol. 153, no. 1. pp. 49–52. (in Russ.).
3. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of mathematical physics). Moscow: Nauka Publ, 1966. 725 p. (in Russ.).
4. Morozov V.A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1966. Vol. 6, no. 1. pp. 170–175. (in Russ.).
5. Tanana V.P. *DAN SSSR*. 1975. Vol. 220, no. 5. pp. 1035–1037. (in Russ.).
6. Tanana V.P., Sidikova A.I. *Optimal'nye metody resheniya nekorrektno postavlennykh zadach* (Optimal methods of ill-posed problems solution). Chelyabinsk: YuUrGU Publ., 2012. 162 p. (in Russ.).

Received 6 September 2013

[1] Mirasov Vadim Faritovich is Post-graduate Student, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: vadim.mirasov@yahoo.com
[2] Sidikova Anna Ivanovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.