

# ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОЛНИЕВОГО РАЗРЯДА: ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

**В.В. Крымский, А.С. Староверов**  
 г. Челябинск, ЮУрГУ

Исследование молниевых разрядов в настоящее время актуальная задача. Системы обнаружения и исследования молний используются для определения параметров молнии в конкретном регионе. Статистические данные, полученные в результате, важны для дальнейших исследований и для разработки систем защиты от молний.

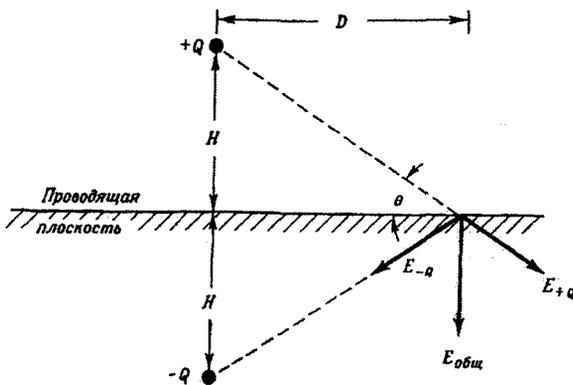
Можно выделить прямую и обратную задачи для молниевое разряда. Прямая задача применима для анализа величин помех, создаваемых молниевыми разрядами. Обратная задача применима для определения параметров молниевое разряда, проектирования приборов для обнаружения молний. В статье рассматриваются данные задачи и их известные решения.

## 1. Вычисление электромагнитного поля (прямая задача для молниевое разряда)

Прямая задача состоит в вычислении параметров электромагнитного поля, используя характеристики молниевое разряда. Известны данные о разряде - закон распределения тока  $I(t)$ . Нужно посчитать зависимость параметров электромагнитного поля  $E$  и  $H$  в зависимости от расстояния  $R$  до места измерения поля и известного закона изменения тока в молнии. Результат расчета электромагнитного поля позволит оценить помехи, которые возникнут при появлении молниевое разряда [7].

Решение прямой задачи состоит в построении модели молниевое разряда и определения значения полей исходя из параметров модели.

В [2] рассматривается следующая модель: земля рассматривается как ровная проводящая поверхность, а центры грозового заряда - как точечные заряды или как сферически симметричные распределения зарядов (см. рисунок).



Модель расчета напряженности заряда - основа для вычисления электрического поля на земле, вызываемого зарядами гроз выше земли

Общее электрическое поле в точке наблюдения получается следующее:

$$E_{общ} = \frac{2QH}{4\pi\epsilon_0(H^2 + D^2)^{3/2}} \quad (1.1)$$

Если  $D \gg H$ , то выражение (1.1) можно записать в виде:

$$E_{общ} \approx \frac{2QH}{4\pi\epsilon_0 D^3} = \frac{M}{4\pi\epsilon_0 D^3} \quad (1.2)$$

где  $M = 2QH$  - дипольный электрический момент заряда и его изображения.

В [3] приводятся общие формулы для вычисления значений вертикальной составляющей  $E_z$  электрического поля и азимутальной составляющей магнитного поля  $B_\phi$ , которые получил в [8] R. Thottappillil. Значения получены для случая движущегося вверх возвратного удара для точки наблюдения P при условии идеальной проводимости земли.

$$\begin{aligned} E_z(r, t) = & \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^{H(t)} \frac{2z^2 - r^2}{R^5(z')} \int_{\frac{z'}{v_f}}^t I(z', \tau - \frac{R(z')}{c}) d\tau dz' + \right. \\ & + \int_0^{H(t)} \frac{2z^2 - r^2}{cR^4(z')} I(z', \tau - \frac{R(z')}{c}) dz' d\tau \\ & \left. - \int_0^{H(t)} \frac{r^2}{c^2 R^3(z')} \frac{dI(z', t - R(z')/c)}{dt} dz' \right] \\ B_\phi(r, t) = & \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \int_0^{H(t)} \frac{r}{R^3(z')} I(z', t - \frac{R(z')}{c}) dz' \right. \\ & + \int_0^{H(t)} \frac{r}{cR^2(z')} \frac{dI(z', t - R(z')/c)}{dt} dz' \left. \right] \\ & + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{cR^2(H(t))} I(H(t), \frac{H(t)}{v_f}) \frac{dH(t)}{dt}, \quad (1.4) \end{aligned}$$

где  $v_f$  - скорость разряда,  $H(t)$  - высота возвратного удара, которую видит наблюдатель в точке P

на земле в момент времени  $t$ . Эта высота может быть найдена из следующего выражения:

$$t = \frac{H(t)}{v_f} + \frac{R(H(t))}{c}. \quad (1.5)$$

Для модели возвратного удара необходимо чтобы был задан  $I(z', t)$ . Thottappillil также приводит данные выражения, где вместо  $I$  используется плотность тока  $\rho$ .

В [7] предлагается использовать метод векторного потенциала для расчета полей, порождаемых молниевым разрядом. Так диаметр канала молнии намного меньше, чем длина разряда, то разумным считается применение модели линейного излучателя [1] для анализа зависимости между  $E$ ,  $H$  и током молнии  $I$ . Вектора  $E$  и  $B$  в данном случае могут быть вычислены с использованием уравнений:

$$\vec{E} = \text{grad} \frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (1.6)$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (1.7)$$

где  $A$  – векторный потенциал:

$$\vec{A}(p, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I}(p', t - R/c)}{R} dl. \quad (1.8)$$

где  $p' \in L$ ,  $R = |p - p'|$ ,

$\phi$  – скалярный потенциал:

$$\phi(p, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{t_0}^t \frac{\rho(p', t - R/c)}{R} dt. \quad (1.9)$$

Используя преобразование Лоренца, можно получить для значения поля в конкретный момент:

$$\vec{E}(p, t) = c^2 \int_{t_0}^t \text{grad} \text{div} \vec{A}(p, t) dt - \frac{d\vec{A}(p, t)}{dt}. \quad (1.10)$$

где  $t_0 = R_0/c_0$ ,  $R_0$  – наименьшее расстояние между точкой наблюдения и каналом разряда,  $t$  – текущее время. Уравнения (1.6), (1.8), (1.10) могут быть использованы для определения тока вдоль канала разряда, для этого требуется еще модель самого канала.

Рассмотрим 2 модели канала разряда. Модели можно использовать для расчета тока во время движения лидера и во время основного разряда. Первая модель (простая) – электрическая схема, содержащая  $R$ ,  $L$  и  $C$  элементы. В этой схеме происходит разряд емкости на  $R$ ,  $L$  элементы. Емкость образуется заряженным облаком и землей, либо двумя облаками. Величина емкости может быть примерно рассчитана путем измерения формы и размеров облака с помощью метеолокатора. Аналитические выражения для расчета тока этой модели известны из электротехники – они представляют затухающую синусоиду. Вторая модель более сложная и точная – разряд конденсатора на длинную линию. Дискретный аналог длинной линии – бесконечная цепочка ячеек из  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $G$

элементов.  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , – сопротивление, индуктивность и емкость элементарного участка канала. Аналитические выражения для расчета тока в такой модели также хорошо известны. В большинстве случаев для расчета используется операторный метод. Изображение тока представляет собой затухающую волну. Скорость движения волны определяется параметрами  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $G$ . Вычисляя оригинал тока  $\vec{I}(t)$  и подставляя его в формулу (1.8) получаем значение потенциала  $\vec{A}$ , а затем и поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , которые возникают при заряде.

Рассмотрим модель установки, необходимой для решения прямой задачи для молниевых разрядов, анализа помех от молниевых разрядов. Предлагаемая установка состоит из радара, использующегося для определения расстояния и вычисления других параметров облаков (размеров, приблизительного заряда), набор приборов для определения величины электромагнитного поля, блока для обработки полученных сигналов и компьютера. Принцип работы установки состоит в следующем. Сначала с помощью радара определяется расстояние до молниевых разрядов. Затем производится расчет закона изменения тока в разряде с помощью: полученного расстояния, величин электромагнитных полей, предложенной модели канала разряда. Когда закон изменения тока получен, можно вычислить помехи (величины электромагнитных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ) от молниевых разрядов в произвольной точке пространства – решением прямой задачи.

## 2. Вычисление параметров молниевых разрядов (обратная задача для молниевых разрядов)

Обратную задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо посчитать параметры молниевых разрядов (ток  $I(t)$ ) или расстояние до заряда  $R$ , если известны данные о величинах полей  $E$  и  $H$ , которые порождаются молниевым разрядом. Разные формы данной задачи описываются в [2, 3, 5–7].

Модель канала разряда (электрическая схема из  $R$ ,  $L$  и  $C$  элементов), которая приводилась выше, может быть использована для расчета тока во время движения лидера (решения обратной задачи – определения параметров  $R$ ,  $L$  и  $C$  разряда по форме излучаемого разрядом сигнала). Задача успешно решается методом сплайн-аппроксимации. Ошибка при вычислениях может достигать в данном случае 5–10 %.

Для решения обратной задачи можно рассмотреть уравнение, полученное Thottappillil [8].

Если электрическое поле измеряется вдали от грозы, то по его измерениям, обусловленным исчезновением грозового разряда (при переносе заряда к земле разрядом молнии, например) при заданном  $D$  можно из (1.2) вычислить изменения в дипольном моменте.

К обратной задаче также относится радиолокация грозových очагов. Задача местоопределения грозových разрядов в настоящее время достаточно важная [5, 7]. Наиболее применяемым методом дальнометрии является амплитудный из-за простоты реализации. Однако у данного метода достаточно высокие погрешности (20-35 %). Амплитудный дальномер работает в радиусе до 300 км. В [3] приводится формула расчета расстояния (для простейшего случая - у земли идеальная проводимость, сферически симметричная область, откуда идет разряд заряда  $Q$ , координаты центра области -  $x, y, z$ ), использующая изменение электростатического поля:

$$\Delta E_{ci} = \frac{2Qz}{4\pi\epsilon_0 \left[ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + z^2 \right]^{3/2}} \cdot (2.1)$$

Данная формула - общий случай (1.1). Здесь  $\Delta E_{ci}$  - предсказанное моделью (вычисленное) изменение поля на  $i$ -й станции,  $x_i, y_i$  - координаты станции. В формуле (2.1) четыре неизвестных ( $Q, x, y, z$ ), для их определения требуется 4 или больше станции. Функция хи-квадрат для разряда облако-земля следующая:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta E_{mi} - \Delta E_{ci})^2}{\sigma_i^2}, \quad (2.2)$$

где  $\Delta E_{mi}$  - измеренное изменение поля на  $i$ -й станции на земле,  $\sigma_i^2$  - разница в измерениях на  $i$ -й станции из-за ошибки измерений.

В [5] приводятся достаточно интересные факты, а именно, условия возникновения грозového разряда: существование в облаке зоны с напряженностью  $\geq E_{кр}$  (для начала разряда), которая должна находиться внутри области с напряженностью  $\geq E_0$  (для поддержания разряда). Приводятся значения величин напряженностей необходимых для начала разряда:  $E_{кр} \geq 10^6$  В/м,  $E_0 \geq 10^5$  В/м. Анализ показывает, что для облаков с большими значениями  $E_0$  и малыми  $E_{кр}$  грозовой разряд не возникает до тех пор, пока в облака не будет направлен какой-либо объект (ракета, самолет), с которого начинается разряд при относительно малых значениях  $E_{кр}$ . Эти данные можно использо-

вать при проектировании приборов, направленных на обнаружение предгрозového состояния облаков.

## Заключение

В настоящее время разработаны различные способы решения прямой и обратной задач для молниевых разрядов - но поиск решений не заканчивается, т.к. многие приводимые решения имеют достаточно высокие погрешности и сложную реализацию на практике. Перспективным направлением исследований является дальнейшая работа по решению этих задач с использованием результатов и методов из [1, 7].

## Литература

1. Крымский, В.В. Теория несинусоидальных электромагнитных волн/ В. В. Крымский, В.А. Бухарин, В.И. Заляпин. - Челябинск: Издательство ЧГТУ, 1995. -128 с.
2. Юман, М. Молния/ М. Юман. - М.: Мир, 1972. - 327 с.
3. Rakov V.A., Uman M.A. *Lightning: Physics and Effects*. - Cambridge: Cambridge University Press, 2003. - 687p.
4. Степаненко, В.Д. Радиотехнические методы исследования гроз/ В.Д. Степаненко, СМ. Гальперин. -Л.: Гидрометеоиздат, 1983. -204 с.
5. Трусовский П. Анализ методов и средств однопозиционной пассивной радиолокации грозových очагов: материалы междунар. конф., состоявшейся в институте Транспорта и Телекоммуникаций 14 декабря 2004 г. //Институт транспорта и телекоммуникаций [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.tsi.lv/Transport&Telecommunication/v61ru/art10.pdf>.
6. Кононов, И.И. Радиотехнические методы местоопределения грозových очагов/ ИИ Кононов, И.А. Петренко, В.С. Снегуров. -Л.: Гидрометеоиздат, 1986.
7. Krymsky V. V. Calculation and measurement of disturbances from lightning discharges // International Wroclaw symposium of electromagnetic compatibility. 1990. -P. 654-657.
8. Thottappillil R., V.A. Rakov, and M.A. Uman (1997), Distribution of charge along the lightning channel: Relation to remote electric and magnetic fields and to return-stroke models, *J. Geophys. Res.*, 102(D6), 6987-7006.

Крымский Валерий Вадимович, 1945 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор. Окончил ЧПИ (ныне ЮУрГУ) в 1970 году. В 1979 году защитил кандидатскую диссертацию. В 1993 году защитил докторскую диссертацию.

Староверов Антон Сергеевич, 1983 года рождения, с октября 2006 года - аспирант кафедры «Электротехника» ЮУрГУ. Окончил кафедру «Прикладная математика» механико-математического факультета ЮУрГУ в 2005 году.