УДК 517.53

О ТОЧНОМ И ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА-ХОПФА ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

В.М. Адуков

Предложен алгоритм явного решения задачи факторизации Винера - Хопфа для мероморфных в многосвязной области матриц-функций. Для рациональных матриц-функций алгоритм реализован в системе Maple в виде двух пакетов программ, позволяющих вычислять частные индексы и факторизационные множители точно, когда это возможно, или приближенно. Вычислительные эксперименты показали, что, несмотря на неустойчивость задачи, алгоритм позволяет находить приближенное решение с высокой степенью точности.

1. Введение

Задача факторизации Винера - Хопфа (краевая задача Римана) - одна из важнейших задач анализа. Она находит многочисленные приложения в различных разделах математики, механики и математической физики. Широко известна определяющая роль, которую играет эта задача при решении систем сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [1] и систем уравнений Винера - Хопфа. Она является одним из существенных этапов при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния [2] и составляет основу для решения обратной задачи рассеяния для матричного дифференциального оператора. В топологии голоморфные векторные расслоения на сфере Римана классифицируются с помощью инвариантов краевой задачи Римана - частных индексов [3]. Уже традиционным является приложение краевой задачи Римана к проблемам механики сплошной среды [4]. В последнее время краевая задача Римана стала использоваться при исследовании асимптотики ортогональных многочленов и знаменателей диагональных аппроксимаций Паде [5].

Применение задачи факторизации Винера - Хопфа сдерживается отсутствием в матричном случае явных формул для факторизационных множителей и для важных целочисленных инвариантов задачи - частных индексов. Поэтому главной нерешенной проблемой в теории факторизации является отыскание случаев, когда задача решается эффективно или явно. Принято говорить, что задача решается *эффективно,* если существует алгоритм ее решения за конечное число шагов (заранее неизвестное, а определяемое в процессе вычислений). Под решением *в замкнутой форме* или *в квадратурах* понимается решение в виде формулы типа формулы Гахова в скалярном случае. Впрочем, термин «решение в замкнутой форме» часто используется как синоним явного в каком-нибудь смысле решения. В данной работе мы считаем, что задача факторизации решена *явно,* если она сведена к решению конечного числа конечных систем линейных алгебраических уравнений, матрицы которых выписываются в замкнутой форме (в квадратурах). Число таких систем также должно быть определено заранее.

Другая важная нерешенная проблема в этой области - это проблема приближенного решения задачи факторизации. Основная трудность здесь в том, что в общем случае частные индексы неустойчивы при малом возмущении, а факторизационные множители при этом не зависят непрерывно от возмущения. Необходимым и достаточным условием устойчивости задачи является условие Гохберга - Крейна - Боярского: разность между наибольшим и наименьшим частными индексами должна не превосходить 1. Все известные приближенные методы факторизации начинают с априорного предположения, что частные индексы устойчивы. Поскольку эффективных способов проверки условия Гохберга - Крейна - Боярского нет, то практическая ценность этих методов невелика. Задача приближенного решения в неустойчивом случае даже и не ставилась.

Цель данной работы - показать, что приближенное построение факторизации Винера - Хопфа и вычисление частных индексов в неустойчивом случае не является безнадежной задачей.

В качестве класса матриц-функций, на котором мы собираемся продемонстрировать это, был выбран класс мероморфных матриц-функций, довольно часто встречающийся в приложениях в механике. Для таких матриц-функций один из факторизационных множителей является рациональным, то есть определяется конечным числом параметров. Это позволило в работе [6] получить средствами линейной алгебры явное решение задачи факторизации Винера - Хопфа для мероморфных в односвязной области матриц-функций. Прежде всего мы перенесем результаты указанной работы на многосвязные области и предъявим алгоритм явного решения задачи факторизации в этом случае. Входными данными для нашего алгоритма является конечный набор степенных моментов факторизуемой матрицы-функции относительно границы области. Если моменты являются матрицами с элементами из поля $\mathrm{Q}(\mathrm{i})$, то алгоритм можно реализовать программно средствами компьютерной алгебры и получить точное решение задачи. В качестве среды для такой реализации была выбрана система компьютерной математики Maple.

Полученное явное решение задачи факторизации позволило выяснить причину неустойчивости и выбрать средства борьбы с этим явлением. Для данного класса матриц-функций неустойчивость обусловлена неустойчивостью задачи нахождения ранга матрицы и решения системы однородных алгебраических уравнений. Хорошо зарекомендовавший себя в практических вычислениях метод борьбы с такой неустойчивостью - использование сингулярного разложения матриц. Применение данного разложения позволило реализовать алгоритм программно и в тех случаях, когда точное решение получить нельзя.

Вычислительные эксперименты показали, что приближенное решение с высокой степенью точности аппроксимирует точное решение.

2. Алгоритм явного решения задачи факторизации

Пусть Γ – составной контур, состоящий из $n+1$ замкнутых гладких жордановых контуров $\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$. Контуры Γ_j попарно не пересекаются и $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$ лежат внутри Γ_0. Контур Γ считается ориентированным в положительном направлении. Обозначим D_+ ограниченную $(n+1)$-связную область с границей Γ, D_- – открытое несвязное множество, являющееся дополнением $D_+\cup\Gamma$ в $\bar{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$. Считаем, что $0\in D_+$.

Пусть $a(t)$ – непрерывная и обратимая на контуре Γ матрица-функция порядка p. *Правой факторизацией Винера – Хопфа* $a(t)$ называется ее представление в виде

$$a(t)=r_-(t)d_r(t)r_+(t),\quad t\in\Gamma. \tag{1}$$

Здесь $r_\pm(t)$ – непрерывные на Γ матрицы-функции, аналитически продолжимые в $D_\pm$ и обратимые там, а

$$d_r(t)=\operatorname{diag}[t^{\rho_1},\dots,t^{\rho_p}],$$

где $\rho_1,\dots,\rho_p$ – целые числа, которые называются *правыми частными индексами* $a(t)$. Их можно считать упорядоченными по возрастанию: $\rho_1\le\dots\le\rho_p$. Если все индексы равны нулю, то факторизация называется *канонической.*

Аналогично определяется *левая факторизация Винера – Хопфа*:

$$a(t)=l_+(t)d_l(t)l_-(t),\quad t\in\Gamma, \tag{2}$$

$d_l(t)=\operatorname{diag}[t^{\lambda_1},\dots,t^{\lambda_p}]$, $\lambda_1\ge\dots\ge\lambda_p$ – *левые частные индексы* $a(t)$. Наш метод требует одновременного рассмотрения правой и левой факторизаций.

Легко видеть, что $\sum_{j=1}^{p}\rho_j=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j=\kappa$, где

$$\kappa=\operatorname{ind}_\Gamma\det a(t):=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}[\arg\det a(t)]_{\Gamma_k}$$

– индекс Коши скалярной функции $\det a(t)$. Здесь $[\arg \det a(t)]_{\Gamma_k}$ означает приращение $\arg \det a(t)$ при однократном обходе кривой Γ_k в положительном направлении.

Ясно, что пара матриц-функций $\left(l_+(t),\ l_-^{-1}(t)d_l^{-1}(t)\right)$ является *канонической матрицей-функцией* краевой задачи Римана с матричным коэффициентом $a(t)$, и наоборот, по любой канонической матрице-функции легко восстановить левую факторизацию Винера – Хопфа коэффициента $a(t)$.

Известно, что факторизации Винера – Хопфа существуют для матриц-функций с гельдеровскими коэффициентами [1]. Для мероморфных в области D_+ матриц-функций для существования факторизации достаточно потребовать непрерывности их граничных значений.

Для того, чтобы задачу факторизации можно было решить средствами линейной алгебры требуется, чтобы один из факторизационных множителей был рациональной матрицей-функцией. Имеет место следующее очевидное

Предложение 1. *Матрица-функция $a(t)$ допускает правую (левую) факторизацию Винера – Хопфа, для которой множитель $r_-(t)$ $(l_-(t))$ является рациональной матрицей-функцией тогда и только тогда, когда $a(t)$ мероморфно продолжается в многосвязную область D_+.*

Далее мы ограничимся только этим случаем. Более сложная ситуация, когда $a(t)$ мероморфно продолжается в несвязное множество D_- (т.е. является кусочно-мероморфной функцией) будет рассмотрена отдельно.

Факторизация Винера – Хопфа мероморфной матрицы-функции легко сводится к факторизации аналитической матрицы-функции. Пусть непрерывная и обратимая на контуре Γ матрица-функция $a(t)$ мероморфно продолжается в область D_+ и имеет там в точках $t_1,\dots,t_n$ полюсы кратностей $k_1,\dots,k_n$, соответственно. Введем матрицу-функцию $\overline{a}(t)=(t-t_1)^{k_1}\cdots(t-t_n)^{k_n}a(t)$. Это, очевидно, непрерывная и обратимая на контуре Γ матрица-функция, аналитически продолжимая в D_+. Обозначим $\overline{\kappa}=\operatorname{ind}_\Gamma \det\overline{a}(t)=\operatorname{ind}_\Gamma \det a(t)+Np$, где $N=k_1+\dots+k_n$ – число полюсов $a(t)$ в области D_+ с учетом их кратностей.

Если $\overline{\rho}_1,\dots,\overline{\rho}_p,\overline{\lambda}_1,\dots,\overline{\lambda}_p$ – соответственно правые и левые частные индексы $\overline{a}(t)$, а $\overline{l}_-(t)$, $\overline{r}_-(t)$ – факторизационные множители этой матрицы-функции, то легко видеть, что индексы и факторизационные множители $a(t)$ находятся по формулам

$$\rho_j=\overline{\rho}_j-N,\ \lambda_j=\overline{\lambda}_j-N,\ j=1,2,\dots,p,$$

$$l_-(t)=\frac{t^N}{(t-t_1)^{k_1}\cdots(t-t_n)^{k_n}}\overline{l}_-(t),\quad r_-(t)=\frac{t^N}{(t-t_1)^{k_1}\cdots(t-t_n)^{k_n}}\overline{r}_-(t).$$

Итак, далее можно ограничиться случаем аналитической в D_+ матрицы-функции $\overline{a}(t)$. Оказалось, что основные результаты работы [6] и их доказательства непосредственно переносятся на случай многосвязной области D_+. По этой причине мы ограничимся переформулировкой необходимых нам утверждений, уделяя особое внимание вычислительной стороне дела.

Для аналитической в области D_+ матрицы-функции $\overline{a}(t)$ факторы $\overline{r}_-(t)$, $\overline{l}_-(t)$ являются матричными многочленами от t^{-1} и в условиях точных вычислений мы сможем найти их точно. Что же касается аналитических факторов $\overline{r}_+(t)$, $\overline{l}_+(t)$, то используемый нами конечный метод позволит найти конечное число их тейлоровских коэффициентов в точке $z=0$. Далее эти коэффициенты могут быть использованы для приближения матриц-функций $\overline{r}_+(t)$, $\overline{l}_+(t)$.

Зададим $\nu+1$ – число тейлоровских коэффициентов $\overline{r}_+(t)$, $\overline{l}_+(t)$, которые мы хотим найти. Далее выполняем следующие шаги.

1. Составим конечную последовательность степенных моментов c_j матрицы-функции $\overline{a}(t)^{-1}$ относительно контура Γ:

$$c_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma t^{-j-1}\overline{a}(t)^{-1}\,dt, \quad j = -\nu - 2\overline{\kappa},\ldots,\nu.$$

Здесь интегрирование проводится по составному контуру $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{n}\Gamma_k$ в положительном направлении, т.е. в том направлении обхода, при котором область D_+ остается слева, и $\overline{\kappa} = \operatorname{ind}_\Gamma \det \overline{a}(t) = Np + \kappa$.

2. Найдем индексы и существенные многочлены данной последовательности (определения и доказательства используемых ниже утверждений см. в работах [6, 7]). Для этого из моментов c_j составим последовательность блочных теплицевых матриц

$$T_k = \left\| c_{i-j} \right\|_{\substack{i=k,k+1,\ldots,\nu \\ j=0,1,\ldots,k+\nu+2\overline{\kappa}}}, \; -\nu - 2\overline{\kappa} \le k \le \nu.$$

3. Пусть $d_k = \dim\ker T_k$ и $d_{-\nu-2\overline{\kappa}-1} := 0$, $d_{\nu+1} := (2\nu + 2\overline{\kappa} + 2)p$. Составим разности $\Delta_k = d_k - d_{k-1}$, $-\nu - 2\overline{\kappa} \le k \le \nu + 1$. При этом должны выполняться условия $\Delta_{-\nu-2\overline{\kappa}} = 0$, $\Delta_{\nu+1} = 2p$ (*тест на регулярность последовательности*) и последовательность Δ_k должна быть монотонно возрастающей:

$$0 = \Delta_{-\nu-2\overline{\kappa}} \le \Delta_{-\nu-2\overline{\kappa}+1} \le \cdots \le \Delta_\nu \le \Delta_{\nu+1} = 2p.$$

(*тест на монотонность*).

4. Это означает, что существует $2p$ целых чисел $\mu_1,\ldots,\mu_{2p}$ (*индексов последовательности*) таких, что

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_{-\nu-2\overline{\kappa}} & = & \cdots & = & \Delta_{\mu_1} & = & 0, \\ & & \cdots & & & & \\ \Delta_{\mu_i+1} & = & \cdots & = & \Delta_{\mu_{i+1}} & = & i, \\ & & \cdots & & & & \\ \Delta_{\mu_{2p}+1} & = & \cdots & = & \Delta_{\nu+1} & = & 2p. \end{array} \qquad \text{O)}$$

Если i-я строка в этих соотношениях отсутствует, то считаем, что $\mu_i = \mu_{i+1}$. Для полученных из таблицы (3) индексов μ_i должно выполняться соотношение

$$\sum_{i=1}^{2p}\mu_i = -2\overline{\kappa}p$$

(*тест на сумму индексов*).

5. После определения индексов перейдем к построению правых существенных многочленов данной последовательности моментов. Для этого нам понадобятся ядра $\ker T_k$ матриц T_k. Удобно перейти от пространств $\ker T_k$ к изоморфным им пространствам N_k производящих векторных многочленов. Пусть A – блочная матрица с блоками из $\mathbf{C}^{p\times p}$, имеющая блочные размеры $(n+1)\times(m+1)$. Разобьем столбец $R \in \ker A$ на $m+1$ блоков:

$$R = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}, \quad r_j \in \mathbf{C}^{p\times 1},$$

и определим производящий векторный (столбцовый) многочлен $R(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_m t^m$. Пусть N_k – пространство производящих многочленов векторов из $\ker T_k$. Тогда $N_k = \{0\}$ для $\nu - 2\overline{\kappa} \le k \le \mu_1$; $N_{k+1} = N_k + tN_k$ для $k \ne \mu_j$, $j = 1,\ldots,2p$; $N_{\mu_j+1} = \left(N_{\mu_j} + tN_{\mu_j}\right) \dot{+} H_{\mu_j+1}$. Здесь H_{μ_j+1} – подпространство N_{μ_j+1}, размерность которого совпадает с кратностью κ_j индекса μ_j.

Любые векторные многочлены $R_j(z),\dots,R_{j+\kappa_j-1}(z)$, образующие базис дополнения H_{μ_j+1}, будем называть *правыми существенными многочленами* последовательности, соответствующими индексу μ_j, $1\le j\le 2p$.

Анализ цепочки пространств N_{μ_j+1} с помощью *теста на обратимость матрицы* Λ_R (см. [6], теорема 3.1; [7], теорема 4.1) позволяет определить $2p$ правых существенных многочленов $R_1(z),\dots,R_{2p}(z)$.

Из правых векторных (столбцовых) существенных многочленов составим матрицу

$$\mathbf{R}(t)=\left(R_1(t)\dots R_{2p}(t)\right)$$

и ее подматрицы

$$\mathbf{R}_1(t)=\left(R_1(t)\dots R_p(t)\right),\quad \mathbf{R}_2(t)=\left(R_{p+1}(t)\dots R_{2p}(t)\right).$$

6. Правые существенные многочлены $R_1(t),\dots,R_p(t)$, для которых свободные члены $R_1(0),\dots,R_p(0)$ равны нулевым столбцам, мы будем называть *факторизационными*. Для данной последовательности моментов факторизационные существенные многочлены всегда существуют и в процессе построения системы многочленов $R_1(t),\dots,R_{2p}(t)$ мы будем добиваться выполнения этого условия (*тест на существование факторизационных существенных многочленов*)

7. Для построения факторизации Винера – Хопфа, помимо правых существенных многочленов, требуются левые, которые могут быть определены аналогичным образом из анализа левых ядер последовательности матриц T_k. Однако, для приближенного построения факторизации нам потребуются специальные левые существенные многочлены от t^{-1}, которые строятся по правым многочленам с помощью *процедуры согласования* существенных многочленов. Опишем эту процедуру.

Пусть $c(t)=\sum\limits_{j=\nu-2\overline{\kappa}}^{\nu}c_jt^j$ – производящая функция последовательности моментов c_j, $d(t)=\operatorname{diag}\left[t^{\mu_1},\dots,t^{\mu_{2p}}\right]$. Тогда $c(t)\mathbf{R}(t)$ допускает следующее разложение

$$c(t)\mathbf{R}(t)=\alpha_-(t)d(t)-t^{\nu+1}\beta_+(t),$$

где $\beta_+(t)$, $\alpha_-(t)$ – матричные многочлены от t, t^{-1}, соответственно, однозначно определяемые данным разложением. Составим теперь матричный многочлен

$$\mathbf{B}_+(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{R}(t)\\ \beta_+(t)\end{pmatrix}$$

размером $2p\times 2p$. Он является унимодулярным матричным многочленом, т.е. имеет постоянный отличный от нуля определитель (*тест на унимодулярность*).

Из последних p столбцов матричного многочлена $\mathbf{B}_+^{-1}(t)$ составим матричный многочлен $\mathbf{L}_+(t)$ от t размером $2p\times p$ и построим матричный многочлен $\mathbf{L}(t)=t^{\nu+1}d(t)\mathbf{L}_+(t)$ от t^{-1}. Строки $L_1(t),\dots,L_{2p}(t)$ этого многочлена и образуют *левые существенные многочлены, согласованные с данными правыми существенными многочленами* $R_1(t),\dots,R_{2p}(t)$.

Из левых существенных многочленов сформируем две матрицы

$$\mathbf{L}_1(t)=\begin{pmatrix}L_1(t)\\ \vdots\\ L_p(t)\end{pmatrix},\quad \mathbf{L}_2(t)=\begin{pmatrix}L_{p+1}(t)\\ \vdots\\ L_{2p}(t)\end{pmatrix}.$$

Аналогичный смысл имеют обозначения $\mathbf{L}_1^+(t)$, $\mathbf{L}_2^+(t)$.

Алгоритм явного построения факторизации завершен. Теперь мы готовы сформулировать основной результат о явном решении факторизационных задач (1), (2) для мероморфных в многосвязной области D_+ матриц-функций.

Теорема 1. *Пусть матрица-функция $a(t)$ непрерывна и обратима на составном контуре Γ и мероморфно продолжается в многосвязную область D_+. Пусть $a(t)$ имеет полюсы в точках $t_1,...,t_n \in D_+$ кратностей $k_1,...,k_n$, соответственно. Обозначим $\overline{\kappa} = \mathrm{ind}_\Gamma \det a(t) + Np$, где $N = k_1 + ... + k_n$ – число полюсов $a(t)$ в области D_+ с учетом их кратностей. Составим из моментов матрицы-функции $\overline{a}^{-1}(t) = \dfrac{a^{-1}(t)}{(t-t_1)^{k_1}...(t-t_n)^{k_n}}$ относительно контура Γ последовательность $c_{-\nu-2\overline{\kappa}}, c_{-\nu-2\overline{\kappa}+1}..., c_\nu$, где $\nu \geq 0$ и*

$$c_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{t^{-j-1}a^{-1}(t)dt}{(t-t_1)^{k_1}\cdots(t-t_n)^{k_n}}.$$

Тогда эта последовательность регулярна и обладает факторизационными существенными многочленами.

Пусть $\mu_1,...,\mu_{2p}$ – индексы, а $R_1(t),...,R_{2p}(t)$; $L_1(t),...,$ $L_{2p}(t)$ – любые согласованные факторизационные существенные многочлены данной последовательности.

Тогда правые $\rho_1,...,\rho_p$ и левые $\lambda_1,...,\lambda_p$ частные индексы и факторизационные множители матрицы-функции $a(t)$ находятся по формулам:

$$\rho_j = \mu_j + 2\overline{\kappa} - N, \lambda_j = -\mu_{p+j} - N, j = 1,...,p,$$

$$r_-(t) = \frac{t^{\nu-1}}{(t-t_1)^{k_1}...(t-t_n)^{k_n}}\mathbf{R}_1(t)d_r^{-1}(t), \quad l_-(t) = -\frac{t^N}{(t-t_1)^{k_1}...(t-t_n)^{k_n}}\mathbf{L}_2(t).$$

В условиях точных вычислений аналитические в D_+ множители $r_+(t)$, $l_+(t)$ могут быть восстановлены по формулам:

$$r_+(t) = d_r^{-1}(t)r_-^{-1}(t)a(t), \quad l_+(t) = a(t)l_-^{-1}(t)d_l^{-1}(t).$$

В условиях приближенных вычислений мы можем следующим образом найти тейлоровские многочлены степени ν для аналитических множителей $r_+(t)$, $l_+(t)$:

$$r_+(t) = \mathbf{L}_1^+(t) + O(t^{\nu+1}), \quad l_+(t) = \mathbf{R}_2(t) + O(t^{\nu+1}).$$

Предложенный алгоритм может быть реализован точно средствами компьютерной алгебры, если матричные моменты c_j имеют элементы из поля $Q(i)$. В противном случае для численной реализации алгоритма, помимо стандартных процедур типа вычисления индекса Коши и нахождения контурных интегралов, требуется отыскание ранга блочных теплицевых матриц и решение систем однородных уравнений с такими матрицами. Сложность этих операций в их неустойчивости. В настоящее время единственным методом решения этих задач, хорошо зарекомендовавших себя в практических вычислениях, является метод сингулярного разложения матриц. Операция согласования существенных многочленов требует обращения унимодулярного матричного многочлена. Эта процедура сводится к обращению постоянной матрицы и последующего нахождения коэффициентов унимодулярного матричного многочлена по рекуррентным формулам с помощью операций сложения и умножения матриц.

В качестве среды для первоначальной программной реализации предложенного алгоритма была выбрана система компьютерной математики Maple, имеющая достаточно удобный для наших целей пакет LinearAlgebra.

Созданы два пакета программ ExactFactorization и ApproxFactorization, оформленные в виде процедур.

3. Описание пакета ExactFactorization

Процедура ExactFactorization предназначена для точного построения факторизации Винера – Хопфа с помощью операций точной арифметики. Это налагает следующие ограничения на $a(t)$.

1. Элементы матрицы-функции $a(t)$ являются рациональными функциями с коэффициентами из поля $\mathbf{Q}(i)$.

2. Контур Γ состоит из попарно непересекающихся окружностей $\Gamma_j : |z - z_j| = R_j,\ j = 0,\dots,n$. Окружности $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$ лежат внутри Γ_0.

3. Полюсы $a(t)$ и нули $\det a(t)$ в области D_+ принадлежат $\mathbf{Q}(i)$.

Эти условия проверяются процедурой и при их нарушении выдается сообщение о невозможности точного построения факторизации. В ходе выполнения процедуры проводятся описанные в алгоритме тесты, позволяющие контролировать правильность вычислений. После нахождения факторизационных множителей проводится проверка их аналитичности и обратимости в соответствующих областях. Если правые (левые) частные индексы $a(t)$ равны между собой, то строится единственная правая (левая) факторизация, нормированная условием $r_-(\infty) = I_p$ $(l_-(\infty) = I_p)$.

Перед обращением к процедуре следует подключить пакет LinearAlgebra. Процедуре ExactFactorization передаются следующие параметры: квадратная матрица a, элементы которой должны быть рациональными функциями от переменной t; матрица $zR = \begin{pmatrix} z_0 & R_0 \\ \vdots & \vdots \\ z_n & R_n \end{pmatrix}$ и число $t_0 \in D_+$. (В теореме 1 предполагается, что $0 \in D_+$. В процедуре это условие не является обязательным. В ней используются формулы, полученные из формул данной теоремы заменой t на $t - t_0$.). Приведем пример обращения к процедуре ExactFactorization.

```
>with(LinearAlgebra): A:=Matrix([[(2*t+6)/t^2,(t–1)/((t–2)*(t+99/100)^2)],[1/t^2,(t–1)/(t*(t+1))]]):
zR:=Matrix([[0,3.1],[–1,1/5],[2,1/5]]):
>ExactFactorization(A,zR,0);
```

Процедура ExactFactorization возвращает шесть матриц порядка p – множителей в правой и левой факторизаций Винера – Хопфа рациональной матрицы-функции a. Их имена: exactrminus, dr, exactrplus, exactlplus, dl, exactlminus.

4. Описание пакета ApproxFactorization

В случае, когда точное построение факторизации невозможно, процедура ApproxFactorization позволяет найти приближенное решение задачи. Ограничения 1 – 2 действуют и здесь. Связано это не с требованиями метода, а только с неразработанностью соответствующего программного обеспечения. В дальнейшем эти ограничения предполагается снять. Помимо параметров a, zR, t_0, процедуре ApproxFactorization передаются еще два параметра: ν и $precision$. Здесь $\nu + 1$ – число необходимых тейлоровских коэффициентов аналитических факторов $r_+(t)$ и $l_+(t)$, $precision$ – число необходимых десятичных разрядов в результате. Промежуточные вычисления проводятся с двойной точностью. Факторизационные множители $r_-(t)$, $l_-(t)$ находятся по тому же алгоритму, что и в случае точных вычислений. Оказалось, что тейлоровские многочлены дают не очень хорошее приближение множителей $r_+(t)$ и $l_+(t)$. По этой причине по известным тейлоровским коэффициентам элементов данных матриц находятся диагональные аппроксимации Паде типа $\left[\frac{\nu}{2}\right]$ этих элементов. Поскольку элементы матрицы-функции a являются рациональными функциями, то их аппроксимации Паде при достаточно больших ν совпадают с данными функциями. К сожалению, степени числителя и знаменателя рациональных дробей нам неизвестны, поэтому число ν приходится подбирать экспериментально. Стандартная процедура Maple, вычисляющая аппроксимации Паде, оказалась не пригодной для наших целей. Поэтому была разработана собственная программа, основанная на работе [8]. При приближенном построении факторизации осуществляется тот же комплекс проверок, что и при точном решении.

Процедура ApproxFactorization возвращает 8 матриц: approxrminus, dr, approxrplus, approxlplus, dl, approxlminus, nevyazkaR, nevyazkaL. Матрицы

$$nevyazkaR := a - approxrminus \cdot dr \cdot approxrplus;$$

$$nevyazkaL := a - approxlplus \cdot dl \cdot approxlminus$$

используются для контроля вычислений.

Пример обращения к процедуре:

```
>with(LinearAlgebra): A:=Matrix([[(2*t+6)/t^2,(t-1)/((t-2)*(t+99/100)^2)],[1/t^2,(t-1)/(t*(t+1))]]):
zR:=Matrix([[0,3.1],[-1,1/5],[2,1/5]]):
>nu:=10:precision:=10:
>ApproxFactorization(A,zR,0,nu,precision);
```

5. Результаты вычислительного эксперимента

Приведем результаты работы процедур ExactFactorization, ApproxFactorization для матрицы-функции

$$a(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2t+6}{t^2} & \dfrac{t-1}{(t-2)(t+\frac{99}{100})^2} \\ \dfrac{1}{t^2} & \dfrac{t-1}{t(t+1)} \end{pmatrix}$$

в области D_+, ограниченной окружностями $|z|<3{,}1$, $|z+1|<\frac{1}{5}$, $|z-2|<\frac{1}{5}$. Процедура ApproxFactorization будет возвращать факторизацию с 10 десятичными разрядами. Для сокращения записи незначащие нули удалены.

ExactFactorization дает правую факторизацию с равными частными индексами:

$$a(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t+3}{t} & \dfrac{-24}{t} \\ \dfrac{1}{2t} & \dfrac{t-4}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{8(31250t^3-4350t^2-94397t-58806)}{(t-2)(100t+99)^2(t+1)} \\ 0 & \dfrac{10000t^4+29800t^3-35399t^2-113999t-58806}{(t-2)(100t+99)^2(t+1)} \end{pmatrix}.$$

Факторизация является устойчивой и строится единственным образом, поскольку множитель $r_-(t)$ пронормирован условием $r_-(\infty) = I_2$.

Правая факторизация, построенная процедурой ApproxFactorization с той же нормировкой, имеет вид

$$a(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{(3{,}0+t)}{t} & \dfrac{-24{,}0}{t} \\ \dfrac{0{,}5}{t} & \dfrac{(-4{,}0+t)}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}0 & \dfrac{-47{,}04479999-75{,}5176t-3{,}480000004t^2+25{,}0t^3)}{-1{,}9602-4{,}9401t-2{,}9999t^2+0{,}9799999998t^3+t^4} \\ 0 & \dfrac{-5{,}8806-11{,}3999t-3{,}5399t^2+2{,}98t^3+t^4)}{-1{,}9602-4{,}9401t-2{,}9999t^2+0{,}98t^3+t^4} \end{pmatrix}.$$

Имеется невязка порядка 10^{-9} в коэффициентах числителя и знаменателя элемента $(r_+(t))_{12}$. Остальные элементы приближенных факторизационных множителей совпадают с соответствующими элементами точных факторизационных множителей в пределах заданной точности вычисления.

Левая факторизация является неустойчивой. Результаты построения точной левой факторизации даны ниже (множитель $l_+(t)$ приведен поэлементно):

$$l_{11}^+(t)=\frac{-388129401t}{338131901(t-2)(t+99/100)^2};$$

$$l_{12}^+(t)=\frac{-12378957030000t^4-37945915451900t^3+41230847985497t^2+141118872246297t+72795694710618}{3713687109(t-2)(100t+99)^2};$$

$$l_{21}^+(t)=\frac{-388129401}{338131901(t+1)};\quad l_{22}^+(t)=\frac{-t(1035768802+422649401t)}{14854748436(t+1)};$$

$$d_l(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{t^2}\end{pmatrix};$$

$$l_-(t)=\begin{pmatrix}\frac{338131901(422649401t^2-1440022604t-2475791406)}{960927435411727806t^2} & \frac{-338131901(t-1)}{388129401t}\\ -6 & 0\end{pmatrix}.$$

Результат работы процедуры ApproxFactorization имеет вид:

$$l_{11}^+(t)=\frac{-8,239809212t}{-1,9602-2,9799t-0,02t^2+t^3};$$

$$l_{12}^+(t)=\frac{-0,03948949953-0,1070269633t-0,02962103967t^2+0,09464152569t^3+0,006715216054t^4}{-0,5291543514-0,804421514t-0,005398983281t^2+0,2699491641t^3};$$

$$l_{12}^+(t)=\frac{-8,239809212}{1+t};\qquad l_{22}^+(t)=\frac{-0,07982426467-0,0153231296t+0,1954868349t^2}{0,7071067812+0,7071067812t}$$

$$d_l(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{t^2}\end{pmatrix};$$

$$l_-(t)=\begin{pmatrix}\frac{2,697536622t^2-0,3328069794t-1,222862691}{t^2} & \frac{-(0,1213620333t-0,1213620333)}{t}\\ 80,39924907 & 0\end{pmatrix}.$$

В этом случае факторизация строится неединственным образом, что затрудняет сравнение полученных факторизации. Для проверки определим матрицу

$$Q_-(t)=\begin{pmatrix}0,5572283851 & \frac{-0,4461364273t^2-0,0437029675 1t-0,1835834430}{t^2}\\ 0 & -13,39987485\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что для любой левой факторизации Винера – Хопфа $a(t)=l_+(t)d_l(t)l_-(t)$ представление $a(t)=(l_+(t)Q_+(t))d_l(t)(Q_-(t)l_-(t))$ – также левая факторизация $a(t)$. Здесь $Q_+(t)=d_l(t)Q_-^{-1}(t)d_l^{-1}(t)$. Если взять множитель $l_-^e(t)$ из точной факторизации $a(t)$, то

$$Q_-(t)l_-^e(t)=\begin{pmatrix} \dfrac{2,697536622t^2-0,3328069794t-1,222862691}{t^2} & \dfrac{-0,1213620333(t-1)}{t} \\ 80,39924910 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эту матрицу-функцию с множителем $l_-(t)$ из приближенной факторизации мы видим, что ошибка имеется только в последнем 10 десятичном разряде элемента $(l_-(t))_{21}$. Найдем теперь множитель $l_+^e(t)Q_+(t)$ и сравним с $l_+(t)$ из приближенной факторизации:

$$l_+^e(t)Q_+(t)=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{-82398,09211t}{(t-2)(100t+99)^2} & \dfrac{3505,901787t^3-1097,28214t^2-3964,708081t-1462,849483+248,7585421t^4}{(100t+99)^2(t-2)} \\ \dfrac{-8,239809211}{t+1} & \dfrac{0,2764601332t^2-0,0216701777t-0,1128885577}{t+1} \end{pmatrix}.$$

Здесь также имеется ошибка только в последних десятичных разрядах.

Вычислительные эксперименты, проведенные с другими рациональными матрицами-функциями также подтверждают вывод о том, что алгоритм дает высокую степень точности даже в неустойчивых случаях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 07-01-96010.

Литература

1. Векуа, Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений / Н.П. Векуа. - М.: Наука, 1970.-380 с.

2. Захаров, В.Е. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II / В.Е. Захаров, А.Б. Шабат // Функц. анализ и его прил. - 1979. - - Т. 13, вып. 3.-С. 13-22.

3. Лайтерер, Ю. Голоморфные векторные расслоения и принцип Ока - Грауэрта / Ю. Лайтерер // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М.: ВИНИТИ, 1986, С. 75-121.

4. Толоконников, Л.А. Метод граничных представлений в двумерных задачах механики / Л.А. Толоконников, В.Б. Пеньков. - Тула: Изд. ТВАИУ, 1997. - 378 с.

5. Суетин, СП. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / СП. Суетин // Успехи мат. наук. - 2002. - Т. 57, вып. 1. - С. 45-142.

6. Адуков, В.М. Факторизация Винера - Хопфа мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // Алгебра и анализ. - 1992. - Т.4, вып. 1. - С. 54-74.

7. Adukov, V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices / V.M. Adukov // Linear Algebra Appl. - 1998.- V. 274.- P. 85-124.

8. Адуков, В.М. Задача аппроксимации Паде как краевая задача Римана / В.М. Адуков // Весщ НАН Беларусь Сер. Ф!зжа-матэм. навук. - 2004. - №4. - С. 55-61.

Поступила в редакцию 14 января 2008 г.