УДК 629.78

БЫСТРЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ОПОРНОЙ ТРАЕКТОРИИ СПУСКАЕМОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

В.И. Киселёв

Предложен новый метод расчёта опорной траектории спускаемого с орбиты искусственного спутника Земли летательного аппарата. Метод основан на результатах, полученных в работе [1], и включает алгоритм автоматического выбора шага интегрирования и модифицированные формулы многошагового метода Адамса на участке смены шага интегрирования. Метод успешно применялся при решении ряда практических задач.

Введение. При решении большинства практических задач, математические модели которых описываются системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, используются численные методы интегрирования. В инженерной практике наибольшее применение вполне обоснованно и справедливо получил метод Рунге-Кутты четвёртого порядка вследствие достаточно высокой точности, относительно высокого быстродействия, наличия стандартных программных процедур, инженерных традиций и т. д. Вместе с тем в ряде практически значимых задачах приходится многократно интегрировать достаточно сложную систему обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Например, это задача выбора оптимального управления и построения соответствующей оптимальной, в том или ином смысле, траектории спуска космического аппарата (КА) с орбиты искусственного спутника Земли. Математическая модель процесса спуска КА описывается системой двенадцати нелинейных уравнений [2], а решение задачи ведётся с применением численных методов нелинейного программирования [1]. В этом случае траектория спуска достаточно продолжительна (несколько десятков минут), интегрирование ведётся с достаточно малым шагом, а количество обращений к процедуре расчёта траектории КА достигает нескольких сотен. Вследствие этого для проектирования (выбора) одной оптимальной траектории, даже с учётом быстродействия современных вычислительных машин, могут тратиться часы. Это не всегда приемлемо, особенно в тех случаях, когда задачу приходится решать в режиме реального времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу построения опорной траектории спускаемого летательного аппарата (СЛА). Для обеспечения точной посадки в заданном районе СЛА проводит внешнетраекторные измерения для уточнения своего местоположения. Для проведения этих измерений необходимо обеспечить прохождение СЛА через район проведения навигационных измерений с допустимыми значениями кинематических параметров.

Наиболее распространённый подход к решению такого рода задач состоит в построении до спуска опорной программной траектории, удовлетворяющей всем заданным условиям. Информация об этой траектории помещается в память бортового компьютера. В полёте в результате воздействия различного рода возмущений фактическая траектория будет отличаться от опорной траектории. Задача системы управления СЛА в полёте заключается в парировании действующих возмущений и обеспечении движения СЛА по траектории, близкой к опорной.

Движение центра масс СЛА в рассматриваемом случае описывается известной системой дифференциальных уравнений в сферически-скоростной системе координат [2]:

$$\begin{aligned}
&\dot{V} = \dot{W}_{x1}\cdot\cos\alpha - \dot{W}_{y1}\cdot\sin\alpha - G_r\cdot\sin\theta - G_\omega\cdot(\sin\varphi\cdot\sin\theta+\cos\theta\cdot\cos\sigma\cdot\cos\varphi);\\
&V\cdot\dot{\theta} = \dot{W}_{x1}\cdot\cos\gamma\cdot\sin\alpha + \dot{W}_{y1}\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha + \left(V^2/R - G_r\right)\cdot\cos\theta -\\
&-2V\cdot\omega\sin\sigma\cdot\cos\varphi - G_\omega\cdot(\sin\varphi\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot\cos\sigma\cdot\cos\varphi);\\
&\dot{R} = V\cdot\sin\theta;\dot{\varphi} = (V/R)\cdot\cos\theta\cdot\cos\sigma;\dot{\lambda} = -(V/R\cdot\cos\varphi)\cdot\cos\theta\cdot\sin\sigma.
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь R - расстояние от центра масс СЛА до центра Земли, φ - геоцентрическая широта, λ - геоцентрическая долгота, V - скорость СЛА, θ - угол наклона вектора скорости к плоскости местного горизонта, σ - угол между проекцией вектора скорости на плоскость местного горизонта и местным меридианом, ω - угловая скорость вращения Земли, G_ω, G_r - составляющие ускорения силы тяжести по направлению вектора угловой скорости вращения Земли и радиус-вектора, $\dot{W}_{x1} = \dfrac{c_x \cdot q \cdot S}{m}, \dot{W}_{y1} = \dfrac{c_y \cdot q \cdot S - K_N \cdot P}{m}$ – составляющие кажущегося ускорения по осям связанной с изделием системы координат, c_x, c_y – аэродинамические коэффициенты, $q = \rho \cdot V^2 / 2$ – скоростной напор, S – площадь характерного (миделевого) сечения СЛА, P – сила тяги управляющего двигателя, ρ – текущая плотность атмосферы, K_N – коэффициент усиления тяги, α – пространственный угол атаки, γ – скоростной угол крена (угол отклонения плоскости угла атаки от вертикальной плоскости). Управление движением СЛА осуществляется путём формирования пространственного угла атаки α и скоростного угла крена γ с помощью специальных управляющих двигателей тягой P.

Ограничимся случаем плоского движения и сформулируем следующую задачу.

Для СЛА, движение центра масс которого описывается системой уравнений (1), заданы:

- вектор начального состояния объекта $x(t_0) = (R_0, \varphi_0, \lambda_0, V_0, \vartheta_0, \sigma_0)$;
- множество допустимых управлений $U \in \Omega_U$;
- множество допустимых состояний $x \in \Omega_x$;
- требуемые значения терминальных траекторных параметров на момент начала внешних навигационных измерений: V_T – скорость, θ_T – угол наклона вектора скорости, H_T – высота, D_T – дальность;
- требования по точности выполнения заданных терминальных условий

$-\delta_1 + H_T \le H_n \le H_T + \delta_1; -\delta_2 + D_T \le D_n \le D_T + \delta_2;$

$-\delta_3 + \theta_T \le \theta_n \le \theta_T + \delta_3; -\delta_4 + V_T \le V_n \le V_n + \delta_4,$

где $\delta_i > 0, i = 1,...,4, H_n, D_n, \theta_n, V_n$ – соответственно высота, дальность, угол наклона вектора скорости к местному горизонту на момент начала измерений, реализовавшиеся при выбранном управлении.

Требуется определить допустимое управление U, переводящее СЛА из заданного начального состояния в заданное конечное состояние с требуемой точностью.

В этом случае управление входит в уравнения движения (1) как через величину тяги P, так и через угол атаки α. Величина угла атаки, определяемого величиной и направлением тяги управляющего двигателя и называемого в данном случае балансировочным углом атаки $\alpha_б$, находится из уравнения балансировки. Уравнение балансировки выражает собой равенство моментов внешних сил, действующих на СЛА, и управляющего момента, создаваемого тягой управляющего двигателя. Это уравнение имеет вид

$$K_N \cdot P \cdot (ц_p - ц_T) = c_y(\alpha_б) \cdot q \cdot S \cdot (ц_D - ц_T).$$

Здесь $ц_T$ – центр тяжести СЛА, $(ц_p - ц_T)$ – плечо управляющей силы P относительно центра масс, $(ц_D - ц_T)$ – плечо внешних сил относительно центра масс. Уравнение балансировки решается на каждом шаге интегрирования. Поскольку в математической модели (1) движение центра масс СЛА отделено от движения вокруг центра масс, то предполагается, что переход с одного балансировочного угла атаки на другой происходит мгновенно, без переходного процесса.

2. Решение задачи. Поставленная задача по ряду причин (простота реализации и др.) решалась в классе кусочно-постоянных законов управления. В этом случае управление U может быть задано с помощью многомерного вектора $U = (P_1, P_2, ..., P_k, t_1, t_2, t_3, t_4, ..., t_{2k})$, где $P_1, P_2, ..., P_k$ – значения тяг управляющих двигателей, $t_1, t_2, ..., t_{2k}$ – моменты переключения тяг, k – количество импульсов. Каждому вектору U при интегрировании системы уравнений (1) соответствует единственная траектория. Решение задачи, как это показано в [1], сводится к решению специальной задачи нелинейного программирования. В ходе решения этой задачи нелинейного программирования число обращений к процедуре интегрирования системы уравнений (1) может достигать нескольких сотен. С учётом того, что расчёт только одной траектории составляет несколько десятков секунд, время получения одной оптимальной траектории может составлять часы, что не всегда приемлемо. Поэтому так важно сократить время расчёта одной траектории.

В рассматриваемом случае резонно воспользоваться многошаговым методом интегрирования, известным преимуществом которого по сравнению с методом Рунге-Кутты является именно быстродействие за счёт однократного обращения на каждом шаге интегрирования к процедуре вычисления правой части интегрируемой системы уравнений. Известным недостатком многошаговых методов является необходимость «разгонки» (получения первых четырёх точек) каким-либо одношаговым методом, например, с помощью того же самого метода Рунге-Кутты. Однако, задачи указанного типа (спуска) характеризуются достаточно частой сменой управления, в результате чего правая часть уравнений движения СЛА претерпевает скачок. Но в этом случае, чтобы не потерять в точности при интегрировании многошаговым методом, например, методом Адамса, приходится при каждой смене управления вновь разгоняться; по методу Рунге-Кутты. Кроме этого, в математической модели полёта СЛА моменты переключения управления требуется реализовать с предельной точностью, что при интегрировании с постоянным шагом требует разработки специальной итерационной процедуры поиска моментов переключения управления и повышает время расчёта одной траектории. При большом количестве переключений это нивелирует преимущество в быстродействии многошаговых методов. Аналогичная ситуация возникает в системах с переменной структурой. Таким образом, ставится следующая задача: с целью ускорения времени проектирования опорной траектории СЛА модифицировать метод Адамса интегрирования систем дифференциальных уравнений с переменной правой частью, используя в нём одноразовую разгонку по методу Рунге-Кутты четвёртого порядка, исключив при этом итерационную процедуру поиска моментов смены правых частей уравнений системы и сохранив приемлемую точность решения задачи. При решении задачи проектирования оптимальной траектории методами нелинейного программирования моменты переключения управления выдаются оптимизационной подпрограммой и могут считаться известными. В этом случае, зная моменты переключения управления, логичнее отказаться от указанной итерационной процедуры, определить необходимое количество шагов интегрирования и шаг интегрирования с текущим управлением (правой частью) и проинтегрировать уравнения на этом участке движения с новым шагом интегрирования. Новый шаг интегрирования можно определить, в частности, по формулам:

$$N=\left[\frac{t_b-t_a}{h}\right]+1,\quad h_m=\left[\frac{t_b-t_a}{N}\right]. \tag{2}$$

Здесь t_b, t_a - моменты выключения, включения управления в задаче спуска или смены правой части в задачах с переменной структурой, h - предыдущий шаг интегрирования, h_m - текущий (новый) шаг интегрирования на участке постоянства (в структурном смысле) правых частей уравнений интегрируемой системы, [...] - означают процедуру взятия целой части в первой из формул.

Примечание 1. Приводимые ниже формулы метода Адамса получены для $N \geq 4$. Если это не так, то необходимо положить $N = 4$.

Примечание 2. Если $t_b - t_a$ делится на h нацело, то шаг интегрирования не меняется.

Чтобы перейти к интегрированию с новым шагом и избежать при этом разгонки по методу Рунге-Кутты, необходимо уточнить формулы метода Адамса на участке смены шага интегрирования.

3. Формулы интегрирования на участке смены шага интегрирования. Стандартная формула метода Адамса на участке интегрирования с постоянным шагом имеет вид [3]

$$Y_{k+1}=Y_k+\frac{h}{24}\left(55\cdot f_k-59\cdot f_{k-1}+37\cdot f_{k-2}-9\cdot f_{k-3}\right), \tag{3}$$

где здесь и далее Y_k, Y_{k+1} - значения решения в текущей и следующей за ней точке, $f_{k-3}, f_{k-2}, f_{k-1}, f_k$ - значения правых частей уравнений в трёх предыдущих и текущей точках соответственно. На участке смены шага интегрирования коэффициенты при $f_{k-3}, f_{k-2}, f_{k-1}, f_k$ меняются и содержат значения предыдущего и нового шагов интегрирования. Ниже приводятся полученные автором значения этих коэффициентов на каждом шаге интегрирования с новым шагом.

Первый шаг интегрирования с новым шагом h_m:

$$Y_{k+1} = Y_k + k_1 \cdot f_{k-3} + k_2 \cdot f_{k-2} + k_3 \cdot f_{k-1} + k_4 \cdot f_k,$$

где

$$k_1 = -\frac{h_m^2(2h+h_m)^2}{24h^3},\ k_2 = \frac{h_m^2}{24 \cdot h^3}\left[18 \cdot h^2 + 16 \cdot h_m \cdot h + 3 \cdot h_m^2\right],$$

$$k_3 = -\frac{h_m^2}{24 \cdot h^3}\left[36 \cdot h^2 + 20 \cdot h_m \cdot h + 3 \cdot h_m^2\right],\ k_4 = \frac{1}{24 \cdot h^3}\left[24 \cdot h^3 \cdot h_m + 22 \cdot h^2 \cdot h_m^2 + 8 \cdot h_m^3 \cdot h + h_m^4\right].$$

Второй шаг интегрирования с новым шагом h_m:

$$Y_{k+1} = Y_k + k_1 \cdot f_{k-3} + k_2 \cdot f_{k-2} + k_3 \cdot f_{k-1} + k_4 \cdot f_k,$$

где

$$k_1 = -\frac{h_m^3}{24 \cdot h^2 \cdot (2 \cdot h + h_m)} \cdot (17 \cdot h_m + 10 \cdot h),\ k_2 = \frac{h_m^3}{12 \cdot h^2 \cdot (h + h_m)} \cdot (17 \cdot h_m + 20 \cdot h),$$

$$k_3 = \frac{1}{h^2 \cdot h_m} \cdot \left[\frac{(h+2h_m)^4 - (h+h_m)^4}{8}\right] - \frac{1}{h^2 \cdot h_m} \cdot \left[\frac{h_m \cdot ((h+2h_m)^3 - (h+h_m)^3)}{6}\right] -$$

$$-\frac{1}{h^2 \cdot h_m} \cdot \left[\frac{h_m \cdot (h+h_m)[(h+2h_m)^2 - (h+h_m)^2)}{4}\right],$$

$$k_4 = \frac{h_m}{4 \cdot (2h+h_m) \cdot (h+h_m)} \cdot (65 \cdot h_m^2 - 10 \cdot h^2).$$

Третий шаг интегрирования с новым шагом h_m:

$$Y_{k+1} = Y_k + k_1 \cdot f_{k-3} + k_2 \cdot f_{k-2} + k_3 \cdot f_{k-1} + k_4 \cdot f_k,$$

где

$$k_1 = -\frac{9 \cdot h_m^4}{4 \cdot h \cdot (h+h_m) \cdot (h + 2 \cdot h_m)},\ k_2 = \frac{h_m}{24 \cdot h} \cdot (27 \cdot h_m + 10 \cdot h),$$

$$k_3 = -\frac{43 \cdot h_m^2 + 16 \cdot h_m \cdot h}{12 \cdot (h+h_m)},\ k_4 = \frac{119 \cdot h_m^2 + 46 \cdot h_m \cdot h}{24 \cdot (h + 2 \cdot h_m)}.$$

Четвертый шаг интегрирования с новым шагом h_m:

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h_m}{24} \cdot \left[55 \cdot f_k - 59 \cdot f_{k-1} + 37 \cdot f_{k-2} - 9 \cdot f_{k-3}\right].$$

Видно, что все полученные формулы совпадают с основной (стандартной) формулой интегрирования по методу Адамса (3) в случае совпадения предыдущего и нового шагов интегрирования, что является косвенным подтверждением их справедливости.

4. Вывод формул. Для вывода формул воспользуемся интерполяционным многочленом Лагранжа для приближения правых частей уравнений интегрируемой системы и квадратурой

$$Y_{k+1} = Y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x)dx. \quad \textbf{(4)}$$

Здесь x - независимое переменное, $Y_{k+1},\ Y_k$ - значения решения системы в текущей и следующей точках системы

$$\dot{Y} = f(x), \quad (5)$$

p(x) - интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени, приближающий (аппроксимирующий) правые части системы (5).

Вывод формулы проведём для одного уравнения системы, т. е. для системы 1-го порядка.

Интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени имеет вид [3]

$$p(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\cdot f_{k-3}+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\cdot f_{k-2}+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\cdot f_{k-1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\cdot f_k, \tag{6}$$

где x_0,x_1,x_2,x_3 – узлы интерполяции, т. е. точки, в которых значения правой части уравнения (5) известны, $f_{k-3}=f(x_0)$, $f_{k-2}=f(x_1)$, $f_{k-1}=f(x_2)$, $f_k=f(x_3)$.

При интегрировании с постоянным шагом h узлы интерполяции связаны соотношениями

$$x_1=x_0+h,\ \ x_2=x_0+2h,\ \ x_3=x_0+3h. \tag{7}$$

Подставляя выражения (7) в формулу (6), и интегрируя полученное выражение в соответствии с (4), получим известную формулу метода Адамса (3).

Чтобы получить первую группу формул на участке смены шага интегрирования, осуществим аналогичную процедуру. Для первого шага интегрирования с изменённым (новым) шагом интегрирования узлы интерполяции по-прежнему связаны соотношениями (7), а квадратура (4) принимает вид

$$Y_{k+1}=Y_k+\int_{x_k}^{x_k+h_m}p(x)dx. \tag{8}$$

Тогда многочлен $p(x)$ примет вид

$$p(x)=-\frac{\left[(x-x_0)-h\right]\cdot\left[(x-x_0)-2h\right]\cdot\left[(x-x_0)-3h\right]}{6h^3}\cdot f_{k-3}+$$
$$+\frac{\left[(x-x_0)\right]\cdot\left[(x-x_0)-2h\right]\cdot\left[(x-x_0)-3h\right]}{2h^3}\cdot f_{k-2}-$$
$$-\frac{\left[(x-x_0)\right]\cdot\left[(x-x_0)-h\right]\cdot\left[(x-x_0)-3h\right]}{2h^3}\cdot f_{k-1}+$$
$$+\frac{\left[(x-x_0)\right]\cdot\left[(x-x_0)-h\right]\cdot\left[(x-x_0)-2h\right]}{6h^3}\cdot f_k. \tag{9}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов коэффициент p_1 при f_{k-3} примет вид

$$p_1=-\frac{(x-x_0)^3-6h(x-x_0)^2+11h^2(x-x_0)-6h^3}{6h^3}. \tag{10}$$

Интегрируя (10) в интервале от x_k до x_k+h_m, получим значения коэффициента k_1 при f_{k-3} в формуле интегрирования:

$$k_1=-\left[\frac{(x-x_0)^4}{24h^3}\right]_{x_k}^{x_k+h_m}+\left[\frac{(x-x_0)^3}{3h^2}\right]_{x_k}^{x_k+h_m}-\left[\frac{11(x-x_0)^2}{12h^2}\right]_{x_k}^{x_k+h_m}+(x-x_0)_{x_k}^{x_k+h_m}. \tag{11}$$

Так как в данном случае $x_k=x_0+3h$, $x_{k+1}=x_0+3h+h_m$, то после подстановки значений x_k, x_{k+1} в формулу (11) окончательно получим

$$k_1=-\frac{h_m\cdot(2h+h_m)^2}{24h^3}. \tag{12}$$

Видно, что если h_m совпадает с h, то $k_1=-\frac{9}{24}h$, что совпадает со значением коэффициента в формуле (3). Аналогичным способом получаются коэффициенты k_2, k_3, k_4 при f_{k-2}, f_{k-1}, f_k соответственно.

Чтобы получить значения коэффициентов в формуле интегрирования на втором шаге интегрирования с новым шагом h_m, необходимо положить узлы интерполяции равными

$$x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 2h + h_m, \tag{13}$$

$$x_k = x_3 = x_0 + 2h + h_m,\ x_{k+1} = x_k + h_m = x_0 + 2h + 2h_m. \tag{14}$$

Подставляя выражения (13) в (9) и интегрируя получившийся многочлен в интервале от $x_к$ до x_{k+1} (14), получим искомые коэффициенты.

Чтобы получить значения коэффициентов в формуле интегрирования на третьем шаге интегрирования с новым шагом h_m, необходимо положить узлы интерполяции равными

$$x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + h + h_m,\ x_3 = x_0 + h + 2h_m, \tag{15}$$

$$x_k = x_3 = x_0 + h + 2h_m,\ x_{k+1} = x_k + h_m = x_0 + h + 3h_m. \tag{16}$$

Четвёртый шаг интегрирования осуществляется по стандартной формуле метода Адамса, но уже с новым шагом интегрирования h_m.

5. Пример. Предложенный метод был применён, например, при решении задачи построения плоской опорной траектории спускаемого летательного аппарата (СЛА), управление которым осуществляется регулированием угла атаки. В этом случае движение СЛА происходит только в вертикальной плоскости. Задача решалась при следующих условиях:

- движение СЛА описывается системой уравнений (1);
- начальное положение СЛА: $t_0 = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\lambda(0) = 0$, $R(0) = 6\,471\,100$ что соответствует высоте 100 км над поверхностью Земли;
- начальные значения кинематических параметров: $V(0) = 7800$ м/с, $\theta(0) = -8°$, $\sigma(0) = 0$;
- терминальные условия к моменту начала измерений: $V_T = 3000$ м/с, $H_T = 8$ км, $\theta_T = -10°$;
- точность выполнения заданных терминальных условий: $|V_n - V_T| \le 50$ м/с, $|H_n - H_T| \le 200$ м, $|\theta_n - \theta_T| \le 0{,}5°$.

Поставленная задача решалась в классе двухимпульсных законов управления. В этом случае управление U может быть задано с помощью шестимерного вектора $U = (P_1, P_2, t_1, t_2, t_3, t_4)$, где P_1, P_2 - значения тяг управляющих двигателей, t_1, t_2, t_3, t_4 - моменты переключения тяг. Применение предложенного метода интегрирования системы уравнений (1) позволило сократить время расчёта одной траектории от начального момента до момента начала измерений примерно в 4 раза, а общее время проектирования одной оптимальной траектории - примерно в 3 раза. При этом при длительности полёта свыше 30 минут при интегрировании системы уравнений (1) со средним шагом интегрирования 0,5 с отличие в результатах интегрирования по всем параметрам не превосходит 0,01% от значений, получаемых при интегрировании по методу Рунге-Кутты на всём промежутке интегрирования.

Заключение. Предложен метод быстрого построения опорной траектории спускаемого летательного аппарата. Метод включает процедуру автоматического выбора шага интегрирования и модифицированный метод Ад амса. Модификация метода Адамса заключается в адаптации его к интегрированию на участке смены шага интегрирования. Полученная модификация может применяться и самостоятельно для интегрирования систем уравнений переменным шагом интегрирования. Предложенный метод применялся для решения задачи проектирования оптимальной траектории спуска космического аппарата с орбиты искусственного спутника Земли и показал свою эффективность.

Литература

1. *Киселёв, В.И. Метод формирования опорной траектории спускаемого летательного аппарата. /В.И. Киселёв, Т.К. Сиразетдинов, А.С. Мещанов //Известия вузов. Авиационная техника, 1992. -МЗ. - С. 14-18.*
2. *Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере/ Л.М. Шкадов, Р.С. Буханова, В.Ф. Илларионов, В.П. Плохих. -М.: Машиностроение, 1972. -240 с.*
3. *Бахвалов, Н.С. Численные методы /КС. Бахвалов. —М.: Наука, 1975. -631 с.*