

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ

И.А. Мурог

Исследована математическая модель движения автомобиля. В модель движения включены математические модели двигателя, рулевого управления, трансмиссии и колес.

Математическая модель представляет интерес для дальнейшего совершенствования конструктивных параметров многоосных автомобилей.

*Ключевые слова:* многоосный автомобиль, математическая модель движения автомобиля, параметры движения.

## Введение

Движение автомобиля рассматривается как поступательное движение центра масс абсолютно твердого тела с угловыми перемещениями (углы Крылова) в подвижной системе координат (рис. 1). Основные принятые допущения и ограничения приведены ниже.

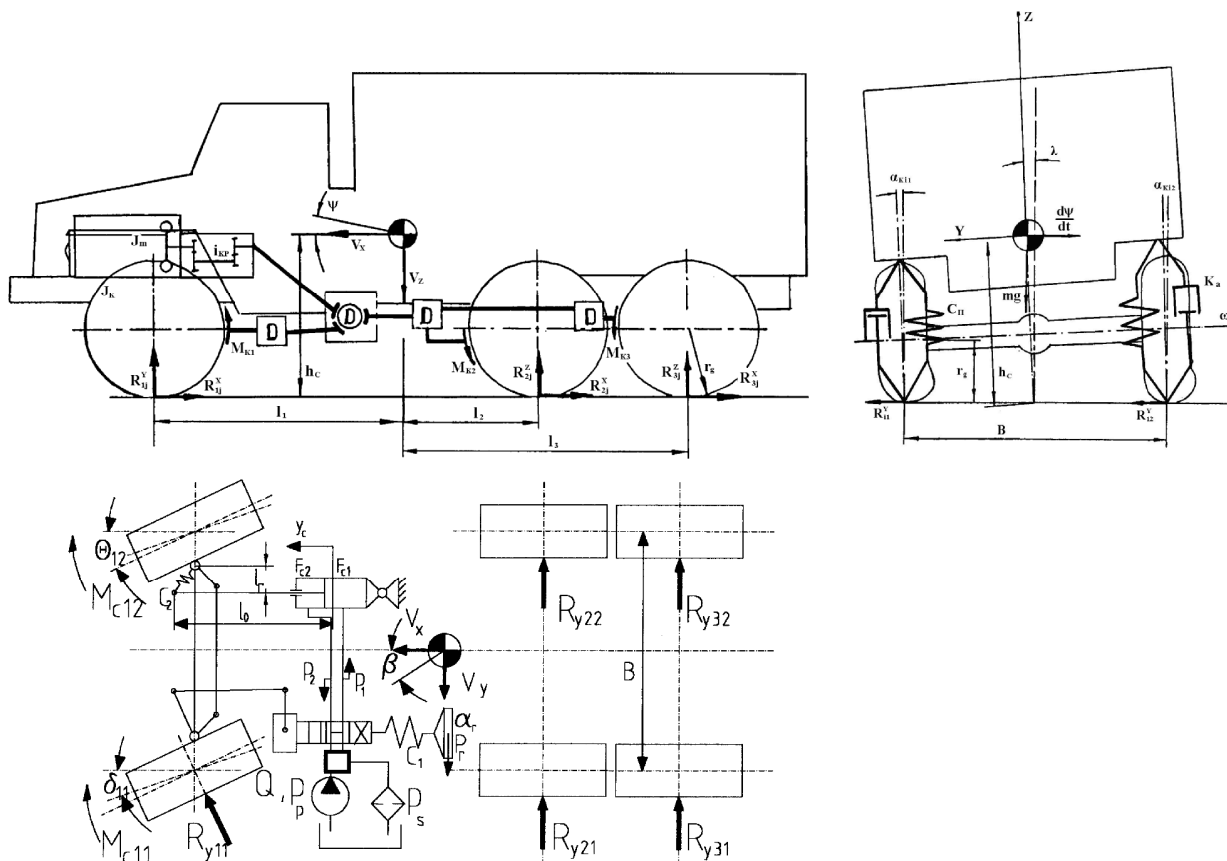


Рис. 1. Расчетная схема автомобиля с гидравлическим рулевым усилителем

## 1. Основные принятые допущения и ограничения

Движение автомобиля происходит по недеформируемой поверхности. Центр масс совпадает с центром упругости, подвеска симметрична. Угловые колебания поддрессоренной массы считаются независимыми от вертикальных колебаний. Кузов автомобиля с грузом – абсолютно твердое тело с продольной плоскостью симметрии, деформациями рамы пренебрегаем. Колебания автомобиля относительно вертикальной оси рассматриваем квазистатическими.

## Расчет и конструирование

Величины неподрессоренных масс малы по сравнению с поддрессоренными. Оси мостов движутся в плоскостях, перпендикулярных плоскости рамы. Колебательное движение кузова при крене рассматриваем вокруг подвижной оси.

Характеристики шин одинаковы для всех колес автомобиля. Упругие свойства шин не изменяются в пределах эксплуатационных скоростей. Схождение колес не учитывается. Колеса статически и динамически сбалансированы. Неуравновешенность и гироскопические моменты вращающихся масс трансмиссии и двигателя принимаем равными нулю.

Рассматриваем приведенную массу автомобиля с учетом моментов инерции вращающихся деталей.

### 2. Системы уравнений математической модели

За основу используемой системы уравнений движения взяты уравнения плоского движения, описанные доктором наук, профессором МВТУ им. Н.Э. Баумана Г.А. Смирновым [1], и динамические уравнения Эйлера, описывающие вращательное движение. К уравнениям плоского движения добавлены компоненты пространственного движения, учтено количество колес и осей автомобиля, также учтена сила на буксировочном крюке. К уравнениям Эйлера добавлена модифицированная правая часть уравнений, учитывающая моменты, возникшие от силовых реакций на колесах автомобиля при заданных геометрических параметрах автомобиля.

С учетом принятых допущений и ограничений движение автомобиля описывается системой дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{aligned}
 m \cdot \left( \frac{dV_x}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \cdot V_y + \frac{d\lambda}{dt} \cdot V_z \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (X_{cij} - Y_{sij} - f \cdot Z_{cij} \cdot \cos \zeta_{ij} - Z_{sij} \cdot \sin \zeta_{ij}) + P_x k p; \\
 m \cdot \left( \frac{dV_y}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \cdot V_x - \frac{d\gamma}{dt} \cdot V_z \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (X_{sij} + Y_{cij} - f \cdot Z_{sij} \cdot \cos \zeta_{ij} + Z_{cij} \cdot \sin \zeta_{ij}) + P_y k p, \\
 m \cdot \left( \frac{dV_z}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot V_y - \frac{d\lambda}{dt} \cdot V_x \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (Z_{ij} \cdot \cos \zeta_{ij}) + P_z k p - m \cdot g; \\
 J_x \cdot \frac{d^2 \gamma}{dt^2} - (J_y - J_z) \cdot \frac{d\beta}{dt} \frac{d\lambda}{dt} &= h_c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (X_{sij} + Y_{cij} - f \cdot Z_{sij} \cdot \cos \zeta_{ij} + Z_{cij} \cdot \sin \zeta_{ij}) - \\
 - \frac{B}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (Z_{i2} \cdot \cos \zeta_{i2} - Z_{i1} \cdot \cos \zeta_{i1}) &+ M_x k p; \\
 J_y \cdot \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - (J_z - J_x) \cdot \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\beta}{dt} &= h_c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (Y_{sij} - X_{cij} + f \cdot Z_{cij} \cdot \cos \zeta_{ij} + Z_{sij} \cdot \sin \zeta_{ij}) - \\
 - \sum_{i=1}^n l_i \sum_{j=1}^2 Z_{ij} \cdot \cos \zeta_{ij} &+ M_y k p; \\
 J_z \cdot \frac{d^2 \beta}{dt^2} - (J_x - J_y) \cdot \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{B}{2} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (X_{ci2} - X_{ci1}) - \sum_{i=1}^n (Z_{si2} \cdot \sin \zeta_{i2} - Z_{si1} \cdot \sin \zeta_{i1}) - \right. \\
 - f \cdot \sum_{i=1}^n (Z_{ci2} \cdot \cos \zeta_{i2} - Z_{ci1} \cdot \cos \zeta_{i1}) &- \left. \sum_{i=1}^n (Y_{si2} - Y_{si1}) \right] + \\
 + \sum_{i=1}^n l_i \sum_{j=1}^2 (X_{sij} + Y_{cij} - f \cdot Z_{sij} \cdot \cos \zeta_{ij} &+ Z_{cij} \cdot \sin \zeta_{ij}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (M_{cij}) + M_z k p,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $X_{cij} = R_{xij} \cdot \cos \theta_{ij}$ ;  $X_{sij} = R_{xij} \cdot \sin \theta_{ij}$ ;  $Y_{cij} = R_{yij} \cdot \cos \theta_{ij}$ ;  $Y_{sij} = R_{yij} \cdot \sin \theta_{ij}$ ;  $Z_{cij} = R_{zij} \cdot \cos \theta_{ij}$ ;  $Z_{sij} = R_{zij} \cdot \sin \theta_{ij}$ ;  $Z_{ij} = R_{zij}$ ;  $R_{xij}$ ,  $R_{yij}$ ,  $R_{zij}$  – продольная, боковая и вертикальная реакции в контакте колеса  $i$ -й оси  $j$ -го борта с опорной поверхностью,  $H$ ;  $\theta$  – угол поворота колеса, рад;  $\zeta$  – угол развала колес;  $m$  – масса автомобиля, кг;  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  – продольная, боковая и вертикальная скорости автомобиля, м/с;  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  – моменты инерции автомобиля относительно продольной, горизон-

гальной и вертикальной осей соответственно, кг·м<sup>2</sup>;  $\lambda, \gamma, \beta$  – углы тангажа, крена и рысканья соответственно, рад;  $h_c$  – высота центра масс, м;  $B$  – колея автомобиля, м;  $f$  – коэффициент сопротивления качению;  $M_c$  – момент сопротивления поворота колеса, Н·м.

Вертикальные реакции определены с учетом величин жесткости подвески и шин, коэффициентов демпфирования амортизаторов (2):

$$R_{zij} = R_{z0} \pm (c_p \cdot \gamma + \frac{d\gamma}{dt} \cdot k_d) + m \cdot h_c \frac{2}{B} \cdot (\frac{dV_y}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \cdot V_x - \frac{d\gamma}{dt} \cdot V_z) \pm l_i \cdot (c_p \cdot \lambda + \frac{d\lambda}{dt} \cdot k_d), \quad (2)$$

где  $R_{zij}$  – статическая нагрузка на колесо, Н;  $p$  – приведенная жесткость подвески и шин, Н/м;  $d$  – коэффициент демпфирования амортизаторов, (Н·с)/м.

Расчет продольных реакций проводился по следующей зависимости (3):

$$R_x = \frac{M_k - R_y \cdot r_k \cdot \sin \delta}{r_k \cdot \cos \delta}, r_k = r_0 - \frac{M_k}{c_t}, \quad (3)$$

где  $r_r$  – радиус колеса, м;  $r_0$  – статический радиус колеса, м;  $c_t$  – коэффициент тангенциальной эластичности шины.

Боковые реакции в контакте колеса с опорной поверхностью определялись на основе зависимости (4):

$$R_y = -q \cdot K_{y\gamma} \cdot \delta, \quad (4)$$

где  $K_{y\gamma}$  – экстремальное значение коэффициента сопротивления боковому уводу при свободном качении колеса, ненагруженного боковыми и тангенциальными силами на ровной твердой поверхности без уклона, Н/рад;  $\delta$  – угол увода шины в боковом направлении, рад;  $q$  – функция коррекции бокового увода из-за воздействия на колесо при его качении различных эксплуатационных, конструкционных и других характеристик, связанных с различными режимами движения колеса и его состояния.

Значение момента сопротивления повороту управляемых колес рассчитывалось как сумма его составляющих по соотношению (5):

$$M_c = M_\beta + M_z + M_u + M_x, \quad (5)$$

где  $M_\beta, M_z$  – моменты, обусловленные продольным и поперечным наклоном шкворня соответственно, Н·м;  $M_u$  – момент, обусловленный упругими свойствами шин, Н·м;  $M_x$  – момент, обусловленный действием продольных сил, Н·м.

Уравнения (1–5) составляют основу математической модели движения автомобиля на повороте. Дополнительно в модель включено математическое представление скоростных и регуляторных характеристик дизеля [2]. В случае оснащения автомобиля бензиновым двигателем может быть использовано математическое представление частичных и внешних характеристик бензинового двигателя [3].

Максимальный крутящий момент на частичной регуляторной характеристике определяется моментом по внешней характеристике (6):

$$M_{\max}^h = M_{\max}^1 h. \quad (6)$$

Частота вращения холостого хода дизеля по частичной регуляторной характеристике изменяется пропорционально перемещению органа управления подачей топлива  $h$  (7):

$$n_{h \max \text{ xx}} = n_{1 \max \text{ xx}} h; \quad (7)$$

$$n_{h \max \text{ xx}} = n_{\min \text{ xx}} + (n_{\max \text{ xx}} - n_{\min \text{ xx}}) \cdot h.$$

Регуляторная характеристика дизеля при частичном перемещении органа управления регулятором  $h$  (8):

$$M_e = M_{eh} (n_{\max \text{ xx}} h - n) / (n_{\max \text{ xx}} \cdot h - n_M). \quad (8)$$

Максимальная частота вращения коленчатого вала бензинового двигателя для частичной характеристики (9):

$$n_{h \max} = n_{h_M} + (n_{h_N} - n_{h_M}) \sqrt{\frac{M_{h \max}}{M_{h \max} - M_{h_N}}}. \quad (9)$$

При необходимости исследования работы отдельных агрегатов трансмиссии при движении автомобиля в модель включаются их математические модели в виде динамических уравнений

## Расчет и конструирование

вращательного движения деталей (коробки передач, раздаточной коробки, главной передачи, дифференциалов, приводов ведущих колес). Их включение не вызывает осложнений при выполнении вычислительного эксперимента.

Модель движения автомобиля согласована по исходным данным с выходными параметрами модели рулевого управления с усилителем гидравлического типа [4] и может использоваться совместно.

Учтено управляющее воздействие водителя на поворот рулевого колеса и на подачу топлива, изменением относительного положения педали управления двигателем.

### 3. Анализ полученных результатов

Проверка адекватности математической модели проводилась сравнением теоретически полученных характеристик с экспериментально полученными в сопоставимых условиях движения (рис. 2). Как было установлено, относительная погрешность моделирования в данном случае не превышает 15 %, что позволяет сделать вывод о том, что математическая модель движения автомобиля с доверительной вероятностью 0,95 хорошо описывают исследуемые процессы в указанных пределах варьирования факторов для решения практических задач модернизации автомобиля.

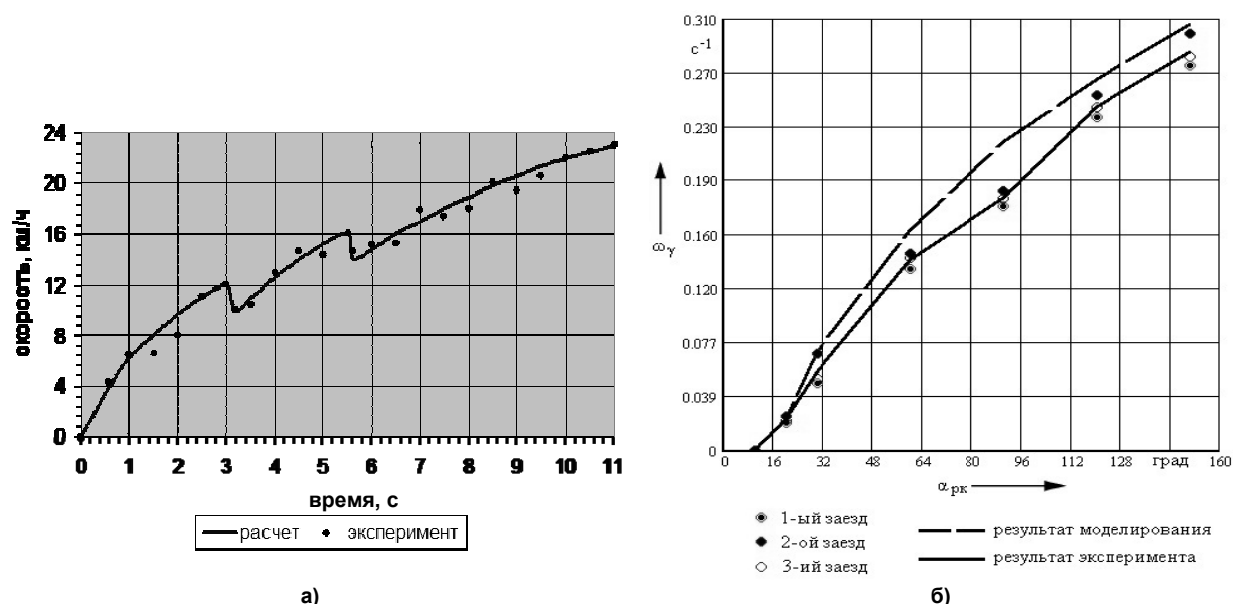


Рис. 2. Характеристики движения:  
а – характеристика разгона на обледенелой дороге; б – зависимости угловой скорости автомобиля от поворота рулевого колеса, полученные в результате моделирования и эксперимента

### Заключение

Структура математической модели движения автомобиля позволяет анализировать движение многоосных полноприводных автомобилей-тягачей с различными колесными формулами. Учитывается управление подачей топлива в двигателе, что позволяет рассматривать процессы изменения передаточного числа трансмиссии, форсажные и дефорсажные режимы управления автомобилем. Математическая модель рулевого управления с усилителем гидравлического типа может использоваться в комплексе с моделью движения автомобиля и позволяет учесть воздействия водителя на рулевое колесо и изменение угла управляемых колес.

По результатам численного и натурного экспериментов достигнута удовлетворительная для математической модели точность расчета. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании эксплуатационных свойств многоосной автомобильной техники.

### Литература

1. Смирнов, Г.А. Теория движения колесных машин: учеб. для студентов машиностроит. спец. вузов / Г.А. Смирнов. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Машиностроение, 1990. – 352 с.
2. Драгунов, Г.Д. Математическое представление скоростных и регуляторных характеристик

тик дизелей со всережимным регулятором / Г.Д. Драгунов, М.В. Гричанюк, О.Р. Якупов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2012. – Вып. 19. – № 12 (271). – С. 93–96.

3. Драгунов, Г.Д. Математическое представление скоростных характеристик автомобильных двигателей / Г.Д. Драгунов, И.А. Мурог, А.А. Юсупов // Двигателестроение. – 2010. – № 1. – С. 23–25.

4. Мурог, И.А. Математическая модель рулевого управления с усилителем гидравлического типа / И.А. Мурог // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2009. – Вып. 14. – № 33 (166). – С. 45–50.

**Мурог Игорь Александрович.** Кандидат технических наук, профессор. Заместитель губернатора Челябинской области. Область научных интересов – эксплуатационные свойства многосных грузовых автомобилей, рулевое управление, трансмиссии грузовых автомобилей. E-mail: pr06@reginf.urfu.ac.ru

---

## MATHEMATICAL MODEL OF MOVEMENT OF THE VEHICLE

*I.A. Murog*

Investigated mathematical model of movement of the vehicle. The model of movement includes mathematical models of the engine, steering system, transmission and wheels.

The mathematical model is of interest to further improve the design parameters of multi-axle vehicle.

*Keywords: the multi-axle vehicle, mathematical model of movement of the vehicle, the parameters of movement.*

**Murog Igor A.** Candidate of technical sciences, professor. Deputy governor of Chelyabinsk region. Research interests – operating properties of the multi-axial trucks, steering system, drivetrains of trucks. E-mail: pr06@reginf.urfu.ac.ru

*Поступила в редакцию 21 февраля 2013 г.*