

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССОГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В.Б. Федоров

Представлена динамическая модель осесимметричного баллистического летательного аппарата с переменными массогеометрическими характеристиками. Летательный аппарат представлен как система двух тел с возможностью их взаимного перемещения.

Ключевые слова: баллистический летательный аппарат, динамическая модель, массогеометрические характеристики.

Анализ проблемы и постановка задачи исследования

Движение летательных аппаратов (ЛА) в атмосфере определяется гравитационным полем Земли, воздействием набегающего атмосферного потока на наружную поверхность (НП) ЛА, массогеометрическими характеристиками (МГХ) ЛА – массой, координатами центра масс (ЦМ), значениями осевых и центробежных моментов инерции. Геометрические характеристики НП ЛА, взаимное расположение конструктивных элементов и составных частей ЛА определяются в конструкторской документации и описываются в конструкторской системе координат (КСК). В частности, для баллистических ЛА (БЛА) начало КСК помещают в точке O (рис. 1), положение которой привязано к конструктивным элементам летательного аппарата (например, лежит в плоскости одного из шпангоутов и является центром окружности расположения осей базирующих штифтовых отверстий). Ось OX_o (рис. 1) КСК направлена к носку БЛА и перпендикулярна плоскости базового шпангоута, ось OY_o перпендикулярна оси OX_o и расположена в плоскости ориентации I–III БЛА, ось OZ_o дополняет тройку осей до правой. Для рассматриваемого класса БЛА номинальное положение оси OX_o КСК совпадает с осью симметрии его наружной поверхности.

В процессе изготовления летательного аппарата возникают случайные отклонения геометрических характеристик НП и МГХ БЛА от заданных в конструкторской документации значений. Во время полета в результате взаимодействия с высокоскоростным, высокотемпературным атмосферным потоком возможно изменение геометрии НП и МГХ БЛА.

Отклонение реальных параметров БЛА от их допустимых диапазонов значений во время движения может привести к формированию возмущенной траектории полета БЛА.

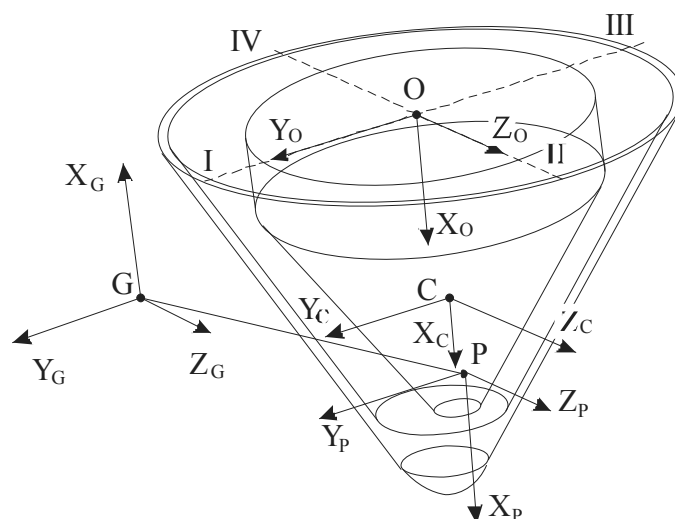


Рис. 1. Основные системы координат, используемые для построения математической модели

Математическая модель БЛА с переменными МГХ

Рассмотрим модель БЛА как систему двух тел, имеющую внутренние связи и допускающую взаимные перемещения тел, входящих в нее. В качестве первого тела (платформы) примем корпус БЛА, в качестве второго – полезный груз (ПГ).

Начало связанной с БЛА опорной системой координат (ОСК) – полюс P совпадает с номинальным положением ЦМ БЛА, заданным в КСК $Ox_oY_oZ_o$. Направление осей ОСК совпадает с номинальным направлением осей КСК БЛА. В ОСК определена главная центральная система координат (ГЦСК) БЛА $SX_cY_cZ_c$, где C – центр масс БЛА. Движение полюса P рассматривается в инерциальной, геоцентрической СК $GX_GY_GZ_G$ (рис. 1). Угловое расположение ОСК, связанной с корпусом ЛА, относительно СК $GX_GY_GZ_G$ задается тремя углами Крылова (тангажа φ , крена η и рыскания ξ).

Для независимого изменения всех МГХ изделия в сборе второе тело ПГ может изменять положение относительно платформы по трем линейным и трем угловым координатам. МГХ и аэродинамических характеристик (АХ) корпуса БЛА могут медленно меняться в полете в небольших пределах. Оценка закона изменения МГХ и АХ корпуса БЛА во время полета может быть получена на основании зависимостей, приведенных в [2].

В общем случае, для получения уравнений движения системы твердых тел можно использовать уравнения Лагранжа второго рода. В частности, такая процедура применяется при выводе уравнений движения механических систем роботов-манипуляторов [4]. В случае системы, состоящей из двух тел, имеющих в сумме двенадцать степеней свободы, математическая модель будет включать сорок восемь дифференциальных уравнений, определяющих траекторию движения системы. Для изучения точных моделей сложных систем тел с изменяющимися МГХ целесообразно использовать специализированные системы анализа динамики механических систем, такие как АДАМС, «Универсальные механизмы» и другие. Однако эффективность работы таких инструментов зависит от корректности определения начальных, граничных условий задачи, диапазона изменения параметров модели.

Для получения необходимых предварительных оценок воспользуемся подходом, описанным в [1], где для изучения поведения БЛА с медленно меняющимися МГХ используются уравнения движения свободного твердого тела.

Нормальная форма Коши системы уравнений (при условии независимости главного вектора и главного момента внешних сил от линейного и углового ускорений) может быть записана в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{V}_P = \frac{1}{M} \sum_j F^{(j)} - \Omega V_P - \Omega^2 \rho + P(J^{(O)} + mP^2)^{-1} \times [\sum_j m_P^{(j)} - P \sum_j F^{(j)} - \Omega J^{(O)} \varpi + MP \Omega^2 \rho] \\ \dot{\varpi} = (J^{(P)} + mP^2)^{-1} [\sum_j M_P^{(j)} - P \sum_j f^{(j)} - \Omega J^{(O)} \Omega + MP \Omega^2 \rho], \end{cases} \quad (1)$$

где m – масса летательного аппарата, $V_P = [v_{Px}, v_{Py}, v_{Pz}]^T$ – вектор линейной скорости полюса

P ОСК, $\dot{V}_P = [\dot{v}_{Px}, \dot{v}_{Py}, \dot{v}_{Pz}]^T$ – вектор линейного ускорения полюса P ОСК, $F^{(j)} = [F_x^{(j)}, F_y^{(j)}, F_z^{(j)}]^T$ –

главный вектор внешних аэродинамических сил, действующих на НП БЛА. Главный момент внешних аэродинамических сил, действующих на наружную поверхность БЛА, обусловленный асимметрией формы его НП и несовпадением точек ЦМ и центра давления, –

$M_P^{(j)} = [m_{Px}^{(j)}, m_{Py}^{(j)}, m_{Pz}^{(j)}]^T$. Вектор угловой скорости БЛА в ОСК – $\varpi = [\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z]^T$ ($\varpi_x = \dot{\eta}$, $\varpi_y = \dot{\xi}$, $\varpi_z = \dot{\varphi}$), где η , ξ , φ – углы ориентации ОСК БЛА относительно осей $GX_GY_GZ_G$.

Вектор углового ускорения БЛА в ОСК – $\dot{\varpi} = [\dot{\varpi}_x, \dot{\varpi}_y, \dot{\varpi}_z]^T$. Угол атаки БЛА – $\alpha_n = \sqrt{\xi^2 + \varphi^2}$.

Вектор положения ЦМ БЛА в его ОСК – $\rho = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]^T$,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\varpi_z & \varpi_y \\ \varpi_z & 0 & -\varpi_x \\ -\varpi_y & \varpi_x & 0 \end{bmatrix} \text{ – матрица компонентов вектора угловой скорости БЛА,}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} \text{ – матрица компонентов вектора положения ЦМ в КСК,}$$

$$J^{(P)} = \begin{bmatrix} J_x^{(P)} & -J_{xy}^{(P)} & -J_{xz}^{(P)} \\ -J_{yx}^{(P)} & J_y^{(P)} & -J_{yz}^{(P)} \\ -J_{zx}^{(P)} & -J_{zy}^{(P)} & -J_z^{(P)} \end{bmatrix} \text{ – тензор инерции БЛА в КСК.}$$

Левые части уравнений (1), а именно линейные и угловые ускорения определяются соотношением внешних силовых факторов, линейными и угловыми скоростями, а так же МГХ БЛА, записанными в правых частях уравнений. Возникающие отклонения аэродинамических сил и моментов БЛА от их проектных значений могут компенсироваться изменением МГХ и кинематических параметров БЛА. При этом левые части уравнений (1) могут сохранять проектные значения, что обеспечит движение по заданной траектории. В частности, в работе [5] рассматривается возможность использования разности смещений аэродинамического фокуса и ЦМ для определения эффективных плеч аэродинамических сил относительно оси вращения по крену.

Эта особенность законов движения ЛА используется на практике, в частности, в ЛА с «балансирной» схемой управления (дельтапланы, парапланы). Известны также схемы управления движением БЛА путем изменения продольной координаты его центра масс в сочетании с созданием управляющих аэродинамических моментов с помощью газодинамических рулей. Во всех этих схемах специальными способами, заложенными в конструкции ЛА, изменяется взаимное положение центра масс ЛА и точки приведения главного вектора аэродинамических сил.

Дополним уравнения (1) выражениями, определяющими МГХ системы, через МГХ составляющих ее тел. Прежде всего, определим дополнительные системы координат (рис. 2) – подвижную относительно ОСК главную центральную систему координат (ГЦСК) ПГ $LX_L Y_L Z_L$ и неподвижную относительно ОСК, ГЦСК корпуса $KX_k Y_k Z_k$.

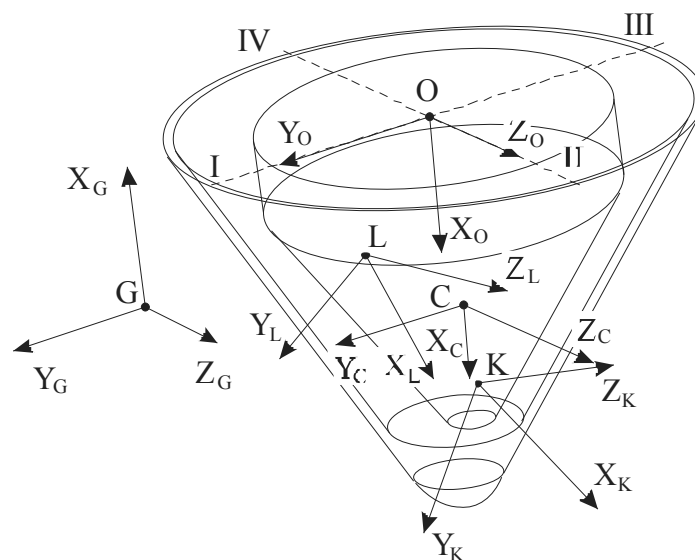


Рис. 2. Системы координат БЛА с переменными МГХ

Положение ГЦСК ПГ и корпуса относительно ОСК заданы углами Крылова φ_l, η_l, ξ_l , φ_k, η_k, ξ_k и векторами ρ_k, ρ_l , определяющим положение точек ЦМ L и K в ОСК. Положим, что вследствие малости возникающих на этапе производства и во время полета асимметрий распределения массы в ОСК, возможные потребные перемещения ПГ относительно корпуса малы. Обозначим также: M_k, M_l – массы корпуса и ПГ, $M = M_k + M_l$ – масса изделия в сборе, $J^{(k)}$, $J^{(l)}$ – тензоры инерции корпуса и ПГ в ОСК, $J^{(p)}$ – тензор инерции летательного аппарата в ОСК. Кроме того, определим следующие ограничения: $J_{Yup} = J_{Zup}$, $J_{Xup} \leq 0,1J_{Zup}$, $|\delta J| \leq 0,01J_{II}$.

Тензоры инерции $J^{(p)}$, $J^{(k)}$, $J^{(l)}$ БЛА, корпуса и ПГ относительно ОСК, по теореме Гюйгенс-Штейнера [1, 3] определяются формулами:

$$J^{(p)} = A_c^T J^{(C)} A_c + M (E \rho_c^2 - \rho_c \rho_c);$$

$$J^{(k)} = A_k^T J^{(K)} A_k + M_k (E \rho_k^2 - \rho_k \rho_k);$$

$$J^{(l)} = A_l^T J^{(L)} A_l + M_l (E \rho_l^2 - \rho_l \rho_l),$$

где $J^{(C)}$, $J^{(p)}$ – тензоры инерции БЛА в ГЦСК и ОСК соответственно,

$\rho_c = [x_c, y_c, z_c]^T$ – радиус-вектор точки С ЦМ БЛА в ОСК,

$J^{(K)}$, $J^{(k)}$, $J^{(L)}$, $J^{(l)}$ – тензоры инерции корпуса и ПГ в ГЦСК и ЦСК соответственно,

$\rho_k = [x_k, y_k, z_k]^T$, $\rho_l = [x_l, y_l, z_l]^T$ – радиус-векторы точек К и L ЦМ корпуса и ПГ в ОСК,

$\rho_c^2 = x_c^2 + y_c^2 + z_c^2$, $\rho_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$, $\rho_l^2 = x_l^2 + y_l^2 + z_l^2$ – скалярные квадраты,

$\rho_c \rho_c$, $\rho_l \rho_l$, $\rho_k \rho_k$ – диадные произведения,

A_c, A_k, A_l – матрицы преобразования координат БЛА, корпуса и ПГ из ЦСК (оси которых параллельны осям ОСК) в ГЦСК, составленные из направляющих косинусов осей, соответствующих ГЦСК в ЦСК, которые являются функциями трех углов Крылова φ, η, ξ , φ_k, η_k, ξ_k , φ_l, η_l, ξ_l :

$$A_c = \begin{pmatrix} a_{11}^c & a_{12}^c & a_{13}^c \\ a_{21}^c & a_{22}^c & a_{23}^c \\ a_{31}^c & a_{32}^c & a_{33}^c \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & a_{13}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & a_{23}^k \\ a_{31}^k & a_{32}^k & a_{33}^k \end{pmatrix}, \quad A_l = \begin{pmatrix} a_{11}^l & a_{12}^l & a_{13}^l \\ a_{21}^l & a_{22}^l & a_{23}^l \\ a_{31}^l & a_{32}^l & a_{33}^l \end{pmatrix}.$$

Радиус-вектор центра масс ρ_c изделия в сборе может быть определен, как функция радиус-векторов центров масс в ОСК и масс, составляющих изделие элементов:

$$\rho_c = \frac{M_k}{M} \rho_k + \frac{M_l}{M} \rho_l, \text{ или } x_c = \frac{M_k}{M} x_k + \frac{M_l}{M} x_l, \quad y_c = \frac{M_k}{M} y_k + \frac{M_l}{M} y_l, \quad z_c = \frac{M_k}{M} z_k + \frac{M_l}{M} z_l.$$

Тензор инерции БЛА, корпуса и ПГ в их ГЦСК соответственно:

$$J^{(C)} = \begin{bmatrix} J_x^{(C)} & 0 & 0 \\ 0 & J_y^{(C)} & 0 \\ 0 & 0 & J_z^{(C)} \end{bmatrix}, \quad J^{(K)} = \begin{bmatrix} J_x^{(K)} & 0 & 0 \\ 0 & J_y^{(K)} & 0 \\ 0 & 0 & J_z^{(K)} \end{bmatrix}, \quad J^{(L)} = \begin{bmatrix} J_x^{(L)} & 0 & 0 \\ 0 & J_y^{(L)} & 0 \\ 0 & 0 & J_z^{(L)} \end{bmatrix}.$$

Вследствие малости величин углов $\varphi, \eta, \xi, \varphi_k, \eta_k, \xi_k, \varphi_l, \eta_l, \xi_l$ (менее 5 градусов), выражения для компонент матриц преобразования координат можно упростить [1]:

$$\begin{aligned} a_{11}^c &= 1, a_{12}^c = \varphi, a_{13}^c = -\xi, & a_{11}^k &= 1, a_{12}^k = \varphi_k, a_{13}^k = -\xi_k, & a_{11}^l &= 1, a_{12}^l = \varphi_l, a_{13}^l = -\xi_l, \\ a_{21}^c &= -\varphi, a_{22}^c = 1, a_{23}^c = \eta, & a_{21}^k &= -\varphi_k, a_{22}^k = 1, a_{23}^k = \eta_k, & a_{21}^l &= -\varphi_l, a_{22}^l = 1, a_{23}^l = \eta_l, \\ a_{31}^c &= \xi, a_{32}^c = -\eta, a_{33}^c = 1. & a_{31}^k &= \xi_k, a_{32}^k = -\eta_k, a_{33}^k = 1. & a_{31}^l &= \xi_l, a_{32}^l = -\eta_l, a_{33}^l = 1. \end{aligned}$$

Выражения для компонентов тензоров инерции БЛА, корпуса и ПГ в их соответствующих ЦСК с учетом допущений также существенно упростятся: $J_x^c = J_x^C$, $J_y^c = J_y^C$, $J_z^c = J_z^C$, $J_{xy}^c = \varphi (J_x^C - J_y^C)$, $J_{xz}^c = \xi (J_z^C - J_x^C)$, $J_{yz}^c = \eta (J_z^C - J_y^C)$,

Расчет и конструирование

$$J_x^l = J_x^L, J_y^l = J_y^L, J_z^l = J_z^L, J_{xy}^l = \varphi_l (J_x^L - J_y^L), J_{xz}^l = \xi_l (J_z^L - J_x^L),$$

$$J_{yz}^l = \eta_l (J_z^L - J_y^L), J_x^k = J_x^K, J_y^k = J_y^K, J_z^k = J_z^K, J_{xy}^k = \varphi_k (J_x^K - J_y^K),$$

$$J_{xz}^k = \xi_k (J_z^K - J_x^K), J_{yz}^k = \eta_k (J_z^K - J_y^K).$$

Выражения для $J^{(p)}$, $J^{(l)}$, $J^{(k)}$, $M(E\rho_c^2 - \rho_c\rho_c)$, $M_k(E\rho_k^2 - \rho_k\rho_k)$, $M_l(E\rho_l^2 - \rho_l\rho_l)$ можно представить в виде:

$$J^{(l)} = \begin{bmatrix} J_x^L & -\varphi_l (J_x^L - J_y^L) & -\xi_l (J_z^L - J_x^L) \\ -\varphi_l (J_x^L - J_y^L) & J_y^L & -\eta_l (J_z^L - J_y^L) \\ -\xi_l (J_z^L - J_x^L) & -\eta_l (J_z^L - J_y^L) & J_z^L \end{bmatrix};$$

$$J^{(p)} = \begin{bmatrix} J_x^P & -\varphi (J_x^P - J_y^P) & -\xi (J_z^P - J_x^P) \\ -\varphi (J_x^P - J_y^P) & J_y^P & -\eta (J_z^P - J_y^P) \\ -\xi (J_z^P - J_x^P) & -\eta (J_z^P - J_y^P) & J_z^P \end{bmatrix};$$

$$J^{(k)} = \begin{bmatrix} J_x^K & -\varphi_k (J_x^K - J_y^K) & -\xi_k (J_z^K - J_x^K) \\ -\varphi_k (J_x^K - J_y^K) & J_y^K & -\eta_k (J_z^K - J_y^K) \\ -\xi_k (J_z^K - J_x^K) & -\eta_k (J_z^K - J_y^K) & J_z^K \end{bmatrix};$$

$$M(E\rho_c^2 - \rho_c\rho_c) = \begin{bmatrix} M(y_c^2 + z_c^2) & -M x_c y_c & -M x_c z_c \\ -M x_c y_c & M(x_c^2 + z_c^2) & -M y_c z_c \\ -M x_c z_c & -M_c y_c, z_c & M_c(x_c^2 + y_c^2) \end{bmatrix};$$

$$M_k(E\rho_k^2 - \rho_k\rho_k) = \begin{bmatrix} M_k(y_k^2 + z_k^2) & -M_k x_k y_k & -M_k x_k z_k \\ -M_k x_k y_k & M_k(x_k^2 + z_k^2) & -M_k y_k z_k \\ -M_k x_k z_k & -M_k y_k, z_k & M_k(x_k^2 + y_k^2) \end{bmatrix};$$

$$M_l(E\rho_l^2 - \rho_l\rho_l) = \begin{bmatrix} M_l(y_l^2 + z_l^2) & -M_l x_l y_l & -M_l x_l z_l \\ -M_l x_l y_l & M_l(x_l^2 + z_l^2) & -M_l y_l z_l \\ -M_l x_l z_l & -M_l y_l, z_l & M_l(x_l^2 + y_l^2) \end{bmatrix}.$$

Тензор инерции $J^{(p)}$ БЛА в его ОСК может быть определен через тензоры инерции ПГ $J^{(l)}$ и корпуса $J^{(k)}$, в соответствующих ГЦСК, по следующей зависимости:

$$J^{(p)} = A_k^T J^{(k)} A_k + M_k(E\rho_k^2 - \rho_k\rho_k) + A_l^T J^{(l)} A_l + M_l(E\rho_l^2 - \rho_l\rho_l).$$

Компоненты $J^{(p)}$, а именно $J_{xy}^{(p)}$, $J_{xz}^{(p)}$, $J_{yz}^{(p)}$, могут быть записаны в виде:

$$J_{xy}^{(p)} = \varphi (J_x^P - J_y^P) + M x_c y_c = \varphi_l (J_x^L - J_y^L) + \varphi_k (J_x^K - J_y^K) + M_k x_k y_k + M_l x_l y_l;$$

$$J_{xz}^{(p)} = \xi (J_z^P - J_x^P) + M x_c z_c = \xi_l (J_z^L - J_x^L) + \xi_k (J_z^K - J_x^K) + M_k x_k z_k + M_l x_l z_l;$$

$$J_{yz}^{(p)} = \eta (J_z^P - J_y^P) + M y_c z_c = \eta_l (J_z^L - J_y^L) + \eta_k (J_z^K - J_y^K) + M_k y_k z_k + M_l y_l z_l.$$

Положим, что на начальном участке движения в атмосфере БЛА не имеет асимметрий формы НП и МГХ. Такое состояние достигается высокоточной обработкой НП БЛА и проведением коррекции МГХ изделия на специализированном оборудовании относительно прогнозируемого направления равнодействующей вектора аэродинамических сил. В результате выполнения этой процедуры все МГХ БЛА имеют допустимые значения. В «идеальном» состоянии БЛА войдет в атмосферу с близкими к нулю углами атаки, что обеспечит ему на начальном участке траектории малые значения угловых скоростей и угловых ускорений вдоль поперечных осей координат. По мере нарушения симметрии НП, отклонения параметров НП и МГХ изделия будут постепенно нарастать, симметрия обтекания нарушится и изделие приобретет угловые $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ и линейные $\dot{V}_{Px}, \dot{V}_{Py}, \dot{V}_{Pz}$ ускорения. В течение достаточно малого интервала времени ускорения не приведут к значительному изменению линейных и угловых скоростей $V_{Pz}, V_{Py}, \omega_x, \omega_y, \omega_z$. Запишем упрощенные выражения, связывающие вторые производные параметров движения и МГХ БЛА, с учетом особенностей движения изначально «симметричного» изделия, пренебрегая $\omega_y, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_x, \omega_z, \omega_z^2, \omega_x^2, \omega_y^2, \omega_y V_{Pz}, \omega_z V_{Py}, \omega_x V_{Pz}, \omega_x V_{Py}$ как величинами второго порядка малости и полагая $J_y^P = J_z^P = J_{II}^P, |J_y^P - J_z^P| = 0, |J_z^P - J_x^P| = |J_y^P - J_x^P| = J_{II}^P$.

Получим выражения, связывающие текущие значения ускорений с $\rho_l, \varphi_l, \eta_l, \xi_l$.

$$\dot{V}_{Px} = \frac{1}{M} \sum_j F_x^{(j)} - \left(\frac{M_k}{M} z_k + \frac{M_l}{M} z_l \right) \dot{\omega}_y + \left(\frac{M_k}{M} y_k + \frac{M_l}{M} y_l \right) \dot{\omega}_z;$$

$$\dot{V}_{Py} = \frac{1}{M} \sum_j F_y^{(j)} - \left(\frac{M_k}{M} x_k + \frac{M_l}{M} x_l \right) \dot{\omega}_z + \left(\frac{M_k}{M} z_k + \frac{M_l}{M} z_l \right) \dot{\omega}_x;$$

$$\dot{V}_{Pz} = \frac{1}{M} \sum_j F_z^{(j)} - \left(\frac{M_k}{M} y_k + \frac{M_l}{M} y_l \right) \dot{\omega}_x + \left(\frac{M_k}{M} x_k + \frac{M_l}{M} x_l \right) \dot{\omega}_y;$$

$$\dot{\omega}_x = \left[\begin{array}{l} \sum_j m_{Px}^{(j)} - \left(\frac{M_k}{M} y_k + \frac{M_l}{M} y_l \right) \sum_j F_z^{(j)} + \left(\frac{M_k}{M} z_k + \frac{M_l}{M} z_l \right) \sum_j F_y^{(j)} - \\ \left(\xi_l (J^L_Z - J^L_X) + \xi_k (J^K_Z - J^K_X) + M_k x_k z_k + M_l x_l z_l - \right. \\ \left. - \left(x_k z_k \left(1 - \frac{M_k}{M} \right) M_k - (x_k z_l - x_l z_k) \frac{M_k M_l}{M} + x_l z_l \left(1 - \frac{M_l}{M} \right) M_l \right) \right] \dot{\omega}_z - \\ \left[\left(\varphi_l (J^L_Y - J^L_X) + \varphi_k (J^K_Y - J^K_X) - M_k x_k y_k - M_l x_l y_l + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(x_k y_k \left(1 - \frac{M_k}{M} \right) M_k - (x_k y_l - x_l y_k) \frac{M_k M_l}{M} + x_l y_l \left(1 - \frac{M_l}{M} \right) M_l \right) \right] \dot{\omega}_y \end{array} \right] \times \frac{1}{J_x^P};$$

$$\dot{\omega}_y = \left[\begin{array}{l} \sum_j m_{Py}^{(j)} - \left(\frac{M_k}{M} z_k + \frac{M_l}{M} z_l \right) \sum_j F_x^{(j)} + \left(\frac{M_k}{M} x_k + \frac{M_l}{M} x_l \right) \sum_j F_z^{(j)} + \\ \left(\varphi_l (J^L_Y - J^L_X) + \varphi_k (J^K_Y - J^K_X) - M_k x_k y_k - M_l x_l y_l + \right. \\ \left. + x_k y_k \left(1 - \frac{M_k}{M} \right) M_k - (x_k y_l - x_l y_k) \frac{M_k M_l}{M} + x_l y_l \left(1 - \frac{M_l}{M} \right) M_l \right] \dot{\omega}_x \end{array} \right] \times \frac{1}{J_y^P};$$

$$\ddot{\omega}_z = \left[\begin{array}{l} \sum_j m_{Pz}^{(j)} + \left(\frac{M_k}{M} y_k + \frac{M_l}{M} y_l \right) \sum_j F_x^{(j)} - \left(\frac{M_k}{M} x_k + \frac{M_l}{M} x_l \right) \sum_j F_y^{(j)} - \\ \left(\xi_l (J_Z^L - J_X^L) + \xi_k (J_Z^K - J_X^K) + M_k x_k z_k + M_l x_l z_l - \right. \\ \left. - x_k z_k \left(1 - \frac{M_k}{M} \right) M_k + (x_k z_l - x_l z_k) \frac{M_k M_l}{M} - x_l z_l \left(1 - \frac{M_l}{M} \right) M_l \right) \ddot{\omega}_x \end{array} \right] \times \frac{1}{J_z^P}.$$

Полученные выражения могут использоваться для получения оценок значений кинематических параметров и их производных в зависимости от взаимного положения груза относительно платформы БЛА.

Литература

1. Костров, А.В. Движение асимметричных баллистических аппаратов / А.В. Костров. – М.: Машиностроение, 1984. – 272 с.
2. Иванов, Н.М. Движение космических летательных аппаратов в атмосфере планет / Н.М. Иванов, А.И. Мартынов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 384 с.
3. Фаворин, М.В. Моменты инерции тел: справ. / М.В. Фаворин; под ред. М.М. Гернета. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977. – 511 с.
4. Механика промышленных роботов: учеб. пособие для вузов. В 3 кн. Кн. 1: Кинематика и динамика / Е.И. Воробьев, С.А. Попов, Г.И. Шекелева; под ред. К.В. Фролова, Е.В. Воробьева. – М.: Высш. шк. – 304 с.
5. Мокин, Ю.А. Влияние малых углов атаки и скольжения на момент крена при гиперзвуковом обтекании тел вращения / Ю.А. Мокин // Теплофизика и аэромеханика. – 2009. – Т. 16, № 1. – С. 37–42.

Федоров Виктор Борисович. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизация механосборочного производства», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск). Тел.: (351) 267-97-74; vbf64@mail.ru.

**Bulletin of the South Ural State University
Series "Mechanical Engineering Industry"
2013, vol. 13, no. 2, pp. 68–74**

MATHEMATICAL MODEL OF BALLISTIC VEHICLE WITH VARIABLE INERTIAL PARAMETERS

V.B. Fedorov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, vbf64@mail.ru

Dynamic model of symmetrical ballistic vehicle with variable inertial parameters is offered. Vehicle has two parts – platform and payload.

Keywords: ballistic vehicle, dynamic model, variable inertial parameters.

Поступила в редакцию 10 июля 2013 г.