УДК 517.9

МНОГОТОЧЕЧНАЯ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ

С.А. Загребина

Рассматривается многоточечная начально-конечная задача для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, возмущенного белым шумом. Показана редукция рассматриваемой задачи к многоточечной начально-конечной задаче для стохастического уравнения соболевского типа. Получены достаточные условия однозначной разрешимости как для абстрактной задачи, так и для стохастической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Ключевые слова: линейные уравнения соболевского типа, многоточечная начально-конечная задача, винеровский процесс, аддитивный белый шум, стохастическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Введение

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, оператор $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – ядерный, а операторы L, M, $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$Ld\eta = M\eta dt + N\delta W, \tag{1}$$

где в правой части через δW обозначен обобщенный дифференциал ($\mathfrak{U}$-значного) K-винеровского процесса.

Прежде всего отметим, что абстрактные уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f \tag{2}$$

представляют собой многие неклассические модели математической физики [1]. В последнее время теория и приложения уравнений (2) активно развиваются, о чем свидетельствует неуклонный рост числа монографий, полностью или частично посвященных данным уравнениям. Наши исследования будут проводиться в русле теории, предложенной Г.А. Свиридюком [2] и развитой его учениками [3–5]. Для уравнения (1) поставим *многоточечную начально-конечную задачу* [6]

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \ \ j = \overline{0,n}, \tag{3}$$

$a < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < b$, где P_j – *относительно спектральные проекторы* (речь о них пойдет позже), а u_j – произвольные векторы из банахова пространства $\mathfrak{U}$. Заметим, что если $n = 1$, то (3) превратится в более простую задачу

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = P_1(u(\tau_1) - u_1) = 0. \tag{4}$$

Задачи (3) и (4) в последнее время весьма активно изучаются в различных аспектах [6–8]. Если же в (3) положить $n = 0$, то она редуцируется к *обобщенной задаче Шоуолтера – Сидорова* [9]:

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = 0, \tag{5}$$

которая уже сыграла важную роль в численных исследованиях экономических [10] и технических [11] моделей. Наконец отметим еще, что задача (5) является обобщением классической задачи Коши $u(\tau_0) = u_0$. Сказанное выше позволяет задачу (3) для уравнения (2) считать последовательным (через (4) и (5)) обобщением задачи Коши.

Что касается стохастических уравнений, то их теория (в конечномерном случае) долгое время развивалась в рамках ставшего классическим направления Ито – Стратоновича – Скорохода [12]. Главная задача, которая здесь решается, – это купирование трудностей, связанных с дифференцированием недифференцируемого (в «обычном» смысле) винеровского процесса. Трудности эти преодолеваются переходом от дифференциального к интегральному уравнению и последующим рассмотрением интегралов Ито, Стратоновича и т. д. Фундаментальный обзор удачных попыток распространения подхода Ито – Стратоновича – Скорохода на бесконечномерную ситуацию дан в [13]. В [14] приведены приложения результатов [13] к классическим моделям математической физики.

Заметим еще, что преодоление интегрированием дифференцирования винеровского процесса, – далеко не единственный метод изучения стохастических уравнений. В последнее время в школе И.В. Мельниковой возникло новое направление, в рамках которого стохастические уравнения рассматриваются в пространствах Шварца [15, 16]. Здесь под белым шумом понимается обобщенная производная винеровского процесса, как это и должно быть. Еще обратим внимание на модель измерительного устройства Шестакова – Свиридюка, в которой под «белым шумом» понимается производная Нельсона – Гликлиха винеровского процесса [17].

В наших исследованиях будут применены методы и результаты [13, 14]. Впервые используемый здесь подход был применен при рассмотрении линейных стохастических уравнений соболевского типа высокого порядка [18], где автор сумела описать подпространство допустимых начальных значений без перехода к уравнению первого порядка.

Работа состоит из следующих частей. Результаты первой части почерпнуты из [13, 14] и адаптированы к нашей ситуации. Впервые они были опубликованы в таком виде в [19]. Единственное отличие – замена термина «Q-винеровский процесс» на термин «K-винеровский процесс». Это сделано из-за того, что ранее [2] литера Q была зарезервирована для обозначения проектора [18]. Во второй части изложенные предварительные сведения применяются для нахождения достаточных условий однозначной разрешимости задачи (1), (3). Заключительная часть статьи посвящена приложению абстрактных результатов к изучению стохастической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной [20–22].

K-Винеровские процессы

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, A, \boldsymbol{P})$ – полное вероятностное пространство, $\mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, снабженное борелевской σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathfrak{U}$ называется *($\mathfrak{U}$-значной) случайной величиной*; пространство случайных величин обозначим символом $\mathfrak{V} \equiv \mathfrak{V}(\Omega;\mathfrak{U})$. В пространстве $\mathfrak{V}$ выделим подпространство

$$\boldsymbol{L_2} \equiv \boldsymbol{L_2}(\Omega;\mathfrak{U}) = \left\{\xi \in \mathfrak{V} : \int_\Omega \|\xi(\omega)\|^2 \, d\boldsymbol{P}(\omega) < +\infty\right\},$$

где $\|\xi\|^2 = \langle\xi,\xi\rangle$. Пространство $\boldsymbol{L_2}$, в частности, содержит все *гауссовы* случайные величины (т. е. имеющие нормальные распределения) из $\mathfrak{V}$.

Пусть далее $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ – некоторый промежуток. Рассмотрим два отображения – $f : \mathfrak{I} \to \mathfrak{V}$, которое каждому $t \in \mathfrak{I}$ ставит в соответствие случайную величину $\xi \in \mathfrak{V}$, и $g : \mathfrak{V} \times \Omega \to \mathfrak{U}$, которое каждой паре (ξ,ω) ставит в соответствие точку $\xi(\omega) \in \mathfrak{U}$. Отображение $\eta : \mathfrak{I} \times \Omega \to \mathfrak{U}$, имеющее вид $\eta = \eta(t,\omega) = g(f(t),\omega)$, мы называем *($\mathfrak{U}$-значным) случайным процессом*. Таким образом, при каждом фиксированном $t \in \mathfrak{I}$ случайный процесс $\eta = \eta(t,\cdot)$ является случайной величиной, т. е. $\eta(t,\cdot) \in \mathfrak{U}$, а при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ случайный процесс $\eta = \eta(\cdot,\omega)$ называется *(выборочной) траекторией*. Случайный процесс η называется *непрерывным*, если его траектории п.н. (почти наверное) непрерывны, т. е. при п.в. (почти всех) $\omega \in \Omega$ траектория $\eta(t,\omega)$ непрерывна на $\mathfrak{I}$.

Пространство случайных процессов обозначим символом $\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}(\mathfrak{I} \times \Omega;\mathfrak{U})$. Выделим в $\mathfrak{P}$ подпространство $\boldsymbol{CL_2}$ непрерывных случайных процессов, чьи случайные величины принадлежат $\boldsymbol{L_2}$, т. е. $\eta \in \boldsymbol{CL_2}$, если $\eta(t,\cdot) \in \boldsymbol{L_2}$ при всех $t \in \mathfrak{I}$. Отметим, что пространство $\boldsymbol{CL_2}$ содержит в частности те случайные процессы, все траектории которых п.н. непрерывны, а все (независимые) случайные величины – гауссовы.

Пусть оператор $K \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ самосопряжен и положительно определен. Тогда его спектр $\sigma(K)$ положителен, т. е. $\sigma(K) \in \mathbb{R}_+$. Положим дополнительно, что спектр $\sigma(K)$ дискретен, конечнократен и сгущается только к точке нуль. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений оператора K , занумерованных по невозрастанию с учетом их кратности. Если вдобавок *след оператора* K

$$\mathrm{Tr}K = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k < +\infty,$$

то оператор K называется *ядерным*. Отметим, что линейная оболочка множества $\{\varphi_k\}$ соответствующих собственных векторов оператора K плотна в $\mathfrak{U}$. Введем в рассмотрение последовательность $\{\beta_k(t)\}$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ независимых одномерных (стандартных) винеровских процессов $\beta_k(t) \equiv \beta_k(t,\omega)$, $\beta_k : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, которые еще называют *броуновскими движениями* [18].

Определение 1. Случайный процесс

$$W(t) \equiv W(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)\varphi_k,\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{6}$$

называется ($\mathfrak{U}$-значным, ядерным) K-винеровским процессом.

В определении 1 очевидна зависимость K-винеровского процесса $W = W(t)$ как от оператора K, так и от множества последовательности движений $\{\beta_k(t)\}$. Далее мы приведем ряд свойств K-винеровского процесса, имеющих место при любых операторах K (с описанными выше свойствами) и $\{\beta_k(t)\}$.

(W1) $W(0) = 0$ п.в. на Ω, и траектории п.н. непрерывны на $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(W2) Траектории K-винеровского процесса п.н. недифференцируемы ни в одной точке $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и на любом промежутке $\mathfrak{I} \subset \overline{\mathbb{R}_+}$ имеют неограниченную вариацию.

(W3) K-Винеровский процесс – гауссов.

Некоторые из этих свойств доказываются просто, например, (W1) сразу следует из (1) в силу ядерности оператора K, другие – достаточно сложно (см. например, [14]). Однако из этих свойств с очевидностью следует

Теорема 1. При любых ядерном операторе $K \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ и последовательности броуновских движений $\{\beta_k(t)\}$ K-винеровский процесс $W \in \boldsymbol{CL_2}$.

Начально-конечная задача для уравнения соболевского типа с аддитивным белым шумом

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, оператор $K \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ – ядерный, а операторы L, M, $N \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$Ld\eta = M\eta dt + N\delta W, \tag{7}$$

где в правой части через δW обозначен обобщенный дифференциал ($\mathfrak{U}$-значного) K-винеровского процесса. Цель второй части работы – постановка и исследование многоточечной начально-конечной задачи для уравнения (7). Потребуем выполнение условия на относительный спектр [12]

$$\left.\begin{array}{l}\sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{n}\sigma_j^L(M),\ n \in \mathbb{N}, \text{причем } \sigma_j^L(M) \neq \varnothing, \text{ существует}\\ \text{замкнутый контур } \Gamma_j \subset \mathbb{C}, \text{ ограничивающий область}\\ D_j \supset \sigma_j^L(M), \text{ такой, что } \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \varnothing,\ \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \varnothing\\ \text{при всех } j,k,l = \overline{1,n}, k \neq l;\end{array}\right\} \tag{8}$$

благодаря которому построим интегралы:

$$\begin{gathered}P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}R_\mu^L(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}L_\mu^L(M)d\mu,\\ P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}R_\mu^L(M)d\mu, \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}L_\mu^L(M)d\mu,\ j = \overline{1,n}.\end{gathered} \tag{9}$$

Согласно результату из [12] интегралы P_j и Q_j, $j=\overline{1,n}$ – проекторы в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Кроме того, построим проекторы $P_0 = P - \sum_{j=1}^{n} P_j$ и $Q_0 = Q - \sum_{j=1}^{n} Q_j$. Далее, на полуинтервале $\overline{\mathbb{R}_+}$ выберем точки τ_j, $j=\overline{1,n}$, такие, что $0 \le \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$ и (U-значные) независимые случайные величины $\xi_j \in \boldsymbol{L_2}$, $j=\overline{1,n}$. Теперь можно поставить многоточечную начально-конечную задачу – найти случайный процесс $\eta \in \boldsymbol{CL_2}$, удовлетворяющий уравнению (7) и условиям

$$P_j(\eta(\tau_j) - \xi_j) = 0, \quad j=\overline{0,n}, \tag{10}$$

Если выполнено условие

$$QN = N, \tag{11}$$

то в силу теоремы 6.1 [6] нетрудно построить единственное «формальное» решение $\eta = \eta(t)$ задачи (7), (9):

$$\eta(t) = \sum_{j=0}^{n} U_j^{t-\tau_j} P_j \xi_j + \sum_{j=0}^{n} \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j \delta W(s) ds, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}. \tag{12}$$

«Формальность» полученного решения заключается в том, что под интегралами стоят, вообще говоря, неинтегрируемые вектор-функции. Поэтому, интегрируя по частям (кстати, тоже «формально»), получим

$$\int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j \delta W(s) ds = L_{1j}^{-1} Q_j (W(t) - W(\tau_j)) + \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} S_j L_{1j}^{-1} Q_j W(s) ds. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получим

$$\eta(t) = \sum_{j=0}^{n} \left(U_j^{t-\tau_j} P_j \xi_j + L_{1j}^{-1} Q_j (W(t) - W(\tau_j)) \right) + \sum_{j=0}^{n} \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} S_j L_{1j}^{-1} Q_j W(s) ds, \tag{14}$$

где, как и выше, U_j^t, L_{1j}, S_j, $j=\overline{0,n}$ те же самые, что и в [12], теорема 6.1.

Теорема 2. Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнены условия (8), (11). Пусть случайные величины $\xi_j \in \boldsymbol{L_2}$, $j=\overline{0,n}$, независимы. Тогда случайный процесс η, определенный формулой (14), принадлежит $\boldsymbol{CL_2}(\overline{\mathbb{R}_+})$.

Определение 2. Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнены условия (8) и (11). Пусть случайные величины $\xi_j \in \boldsymbol{L_2}$ (или их проекции $P_j\xi_j \in \boldsymbol{L_2}$), $j=\overline{0,n}$. Тогда при любом ($\mathfrak{U}$-значном) K-винеровском процессе $W \in \boldsymbol{CL_2}$ случайный процесс η, определенный формулой (14), называется *решением задачи (7), (9)*.

Замечание 1. В современной математической литературе такое решение часто называют «мягкими» (mild solution) [14]. Понятно, что если ограничиться «классической» трактовкой производной, то на более гладкое решение в силу свойства (W2) из п. 1 рассчитывать не приходится.

Стохастическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной

Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей ∂G класса C^∞. Будем искать функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ уравнению

$$(\lambda - \Delta) u_t = \alpha \Delta u + f \tag{15}$$

и условиям Дирихле

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial G \times \mathbb{R}. \tag{16}$$

Здесь параметр $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Уравнение (15) моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде [20]. Заметим, что это уравнение имеет универсальный характер – оно также моделирует процесс влагопереноса в почве [21] и процесс теплопроводности с двумя температурами [22].

Наша цель – редукция (15), (16) к уравнению (7) с аддитивным белым шумом, под которым понимается производная K-винеровского процесса. Первым шагом к данной цели будет определение ядерного оператора K. В [14] таковым служит оператор Грина задачи (16) для уравнения Пуассона $-\Delta u = f$ в области G. Такой выбор обладает следующим недостатком. Поскольку собственные значения $\{\mu_k\}$ спектральной задачи

$$-\Delta\varphi_k = \mu_k\varphi_k \tag{17}$$

в области G с условием (16) имеют следующую асимптотику:

$$\mu_k \sim k^{\frac{2}{d}}, \quad k \to \infty, \tag{18}$$

то оператор Грина задачи (16), (17) будет ядерным, если только $d = 1$. Поэтому в [14] и волновое уравнение, и уравнение теплопроводности рассматриваются только на интервале.

Для преодоления этого недостатка предлагается в качестве K взять оператор Грина следующей задачи:

$$(-1)^m \Delta^m u = f, \tag{19}$$

$$(-1)^l \Delta^l u(x) = 0,\ x \in \partial G,\ l = \overline{0, m-1}. \tag{20}$$

Внимательно рассмотрев соответствующую спектральную задачу

$$(-1)^m \Delta^m \varphi_k = \nu_k \varphi_k \tag{21}$$

в области G с условиями (20), можно заметить, что собственные функции задач (17) и (21) одни и те же, однако собственные значения $\nu_k = \lambda_k^m$. Ввиду асимптотики (18) $\nu_k \sim k^{\frac{2m}{d}}$, $k \to \infty$, поэтому путем подбора m можно рассматривать области любой размерности.

В дальнейшем мы считаем, что выбор подходящего числа $m \in \mathbb{N}$ сделан (должно быть $m \geq 2$, если мы хотим рассматривать трехмерные области). Положим $\lambda_k = \nu_k^{-1}$ и формулой (6) определим K-винеровский процесс, где $\{\varphi_k\}$ – собственные функции задач (20), (21) (или (16), (17)). Определим пространства $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{l+2} : \textit{выполнено}\,(16)\}$, $F = W_2^l$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $W_2^k = W_2^k(G)$ – пространства Соболева. Заметим, что оператор Лапласа $-\Delta : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ – топлинейный изоморфизм. Отметим еще, что оператор K определен на пространстве $\mathfrak{U}$ и является обратным к оператору $(-1)^m \Delta^m : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$, который тоже является топлинейным изоморфизмом, $\mathfrak{V} = \{u \in W_2^{l+2m} : \text{выполнено}\,(20)\}$. Наконец, формулами $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta$ зададим линейные непрерывные операторы, L, $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, которые фредгольмовы, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Лемма 1 [19]**.** При любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L,0)$-ограничен.

Далее заметим, что

$$R_\mu^L(M) = \sum_{-\lambda \neq \mu_k} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu + \alpha\mu_k(\lambda + \mu_k)^{-1}}, \quad L_\mu^L(M) = \sum_{-\lambda \neq \mu_k} \frac{[\cdot, \varphi_k]\varphi_k}{\mu + \alpha\mu_k(\lambda + \mu_k)^{-1}},$$

где $[\cdot,\cdot]$ – скалярное произведение в $\mathfrak{F}$. Построим проекторы (9) $P = \sum\limits_{-\lambda \neq \mu_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k$, $Q = \sum\limits_{-\lambda \neq \mu_k} [\cdot, \varphi_k]\varphi_k$. Чтобы упростить, положим оператор $N = P$, тогда, во-первых, оператор $N \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (и даже компактен!) в силу плотного и непрерывного (даже компактного!) вложения (теорема Соболева – Кондрашева). Во-вторых, условие (11) выполняется автоматически. Итак, редукция уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной (15) с условием (16) к уравнению (1) с аддитивным белым шумом закончена.

Перейдем к построению «мягкого» решения (14). Прежде всего отметим, что условие $P\xi = \xi$ в теореме 2 на начальную случайную величину ξ из (10) эквивалентно условию

$$\langle \xi, \varphi_k \rangle = 0, \quad -\lambda = \mu_k. \tag{22}$$

Далее, первое слагаемое в (14) в данной ситуации имеет вид

$$L_1^{-1}NW(t) = \sum_{-\lambda\neq\mu_k} \frac{\beta_k(t)}{(\lambda+\mu_k)\mu_k^{2m}}\varphi_k, \tag{23}$$

где (напомним!) $\mu_k^{2m} = \lambda_k^{-1}$. Второе слагаемое в (14) тоже можно легко посчитать

$$U^t\xi = \sum_{-\lambda\neq\mu_k} \langle\xi,\varphi_k\rangle e^{\sigma_k t}\varphi_k, \tag{24}$$

где $\sigma_k = -\alpha\mu_k(\lambda+\mu_k)^{-1}$ при $-\lambda\neq\mu_k$ представляют точки L-спектра $\sigma^L(M)$ оператора M в данной ситуации. Наконец, последнее слагаемое в (14)

$$\int_0^t U^{t-s}SL_1^{-1}NW(s)ds = d\sum_{-\lambda\neq\mu_k}\int_0^t \frac{\beta_k(s)e^{\sigma_k(t-s)}ds}{(\lambda+\mu_k)\mu_k^{2m-1}}\varphi_k. \tag{25}$$

Итак, доказана

Теорема 3. При любых $-\lambda\in\{\mu_k\}$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\xi\in\boldsymbol{L_2}$ такой, что выполнено (22), существует единственное решение $u\in\boldsymbol{CL_2}$ задачи (10) для стохастического модели Баренблатта – Желтова – Кочиной и условием (16), которое к тому же имеет вид (14), где слагаемые представлены формулами (23) – (25).

Автор выражает свою искреннюю признательность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и активные творческие дискуссии.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14, № 40 (299). – С. 7–18.

2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 268 с.

3. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издат. Центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

4. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издат. Центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.

5. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издат. Центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.

6. Загребина С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5–24.

7. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – Вып. 8, № 17 (234). – С. 113–114.

8. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – Вып. 10, № 37 (254). – С. 22–29.

9. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркут.гос. ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2010. – Т.3, № 1. – С. 51-72.

10. Келлер, А.В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – Вып. 7, № 4 (241). – С. 40–46.

11. Shestakov, A.L. The Numerical Solution of the Optimal Dimension Problem / A.L. Shestakov, A.V. Keller, E.I. Nazarova // Automation and Remote Control. – 2011. – Vol. 73, no. 1. – P. 97–104.

12. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London; Dordrecht; Heidelberg; N.-Y.: Springer, 2011. – 460 c.

13. Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. – 454 c.

14. Kovacs, M. Introduction to stochastic partial differential equations / M. Kovacs, S. Larsson // Processing of "New Directions in the Mathematical and Computer Sciences", National Universities Commission. Abuja. Nigeria. October 8–12. 2007. Publications of the ICMCS. –2008. – Vol. 4. – P. 159–232.

15. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations II.Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distribotions/ I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, M.A. Alshansky // J. of Math. Sciences. – 2003.– Vol. 116, no 5. – P. 3620–3656.

16. Melnikova, I.V. Generalized solutions to abstract stochastic problems / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // J. Integ. Transf. and Special Funct. – 2009. –Vol. 20, no. 3–4. – P. 199–206.

17. Shestakov, A.L. On Optimal Measurement of the "White Noise" / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 13, № 27 (286). – С. 99–108.

18. Замышляева, А.А. Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом / А.А. Замышляева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14, № 40 (299). – С. 73–82.

19. Загребина, С.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. «Математика». – 2013. – Т.6, № 1. – С. 20–34.

20. Barenblatt, G.I. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous fluids in fissurized rocks / G.I. Barenblatt, Yu.P. Zheltov, I.N. Kochina // J. Applied Mathematics and Mechanics (PMM). – 1960. – Vol. 24, no. 5. – P. 1286–1303.

21. Hallaire, M. On a theory of moisture-transfer / M. Hallaire // Inst. Rech. Agronom. – 1964. – No. 3. – P. 60–72.

22. Chen, P.J. On a theory of heat conduction involving two temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Z. Angew. Math. Phys. – 1968. – Vol. 19. – P. 614–627.

Загребина Софья Александровна, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); zagrebina_sophiya@mail.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics"
2013, vol. 13, no. 4, pp. 103–111

THE MULTIPOINT INITIAL-FINISH PROBLEM FOR THE STOCHASTIC BARENBLATT – ZHELTOV – KOCHINA MODEL

***S.A. Zagrebina**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, zagrebina_sophiya@mail.ru*

In the paper we observe the multipoint initial-finish problem for the Barenblatt – Zheltov – Kochina equation for the perturbed white noise. We show the reduction of the problem under consideration to the multipoint initial-finish problem for stochastic Sobolev-type equation. We obtain sufficient conditions for the unique solvability for the abstract problem and for the stochastic Barenblatt – Zheltov – Kochina model.

Keywords: the linear Sobolev-type equations, the multipoint initial-finish problem, the Wiener process, additive white noise, stochastic Barenblatt – Zheltov – Kochina model.

References

1. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Nonclassical Mathematical Physics Models [Neklassicheskie modeli matematicheskoj fiziki]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, iss. 14, no. 40 (299), pp. 7–18. (in Russian)

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo, *VSP*, 2003, 268 p.

3. Zamyshlyaeva A.A. *Linejnye uravnenija sobolevskogo tipa vysokogo porjadka* [Linear Sobolev Type Equations of High Order]. Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012, 107 p.

4. Manakova N.A. *Zadachi optimal'nogo upravlenija dlja uravnenij sobolevskogo tipa* [Optimal Control Problem for the Sobolev Type Equations]. Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. 88 p.

5. Sagadeeva M.A. *Dihotomii reshenij linejnyh uravnenij sobolevskogo tipa* [Dichotomy of Solutions of Linear Sobolev Type Equations]. Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. 139 p.

6. Zagrebina S.A. The Initial-Finish Problems for Nonclassical Mathematical Physics' Models [Nachal'no-konechnye zadachi dlja neklassicheskih modelej matematicheskoj fiziki]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2013, vol. 6, no 2, pp. 5–24. (in Russian)

7. Manakova N.A., Dylkov A.G. Optimal Control of Solutions of Initial-Finish Problem for the Linear Sobolev Type Equations [Optimal'noe upravlenie reshenijami nachal'no-konechnoj zadachi dlja linejnyh uravnenij sobolevskogo tipa]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2011, iss. 8, no. 17 (234), pp. 113–114. (in Russian)

8. Zamyshlyaeva A.A. The Initial-Finish Value Problem for Nonhomogenious Boussinesque – Löve Equation [Nachal'no-konechnaja zadacha dlja neodnorodnogo uravnenija Bussineska – Ljava]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, iss. 10, no. 37 (254), pp. 22–29. (in Russian)

9. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter – Sidorov Problem as Phenomena of the Sobolev-type Equations [Zadacha Shouoltera – Sidorova kak fenomen uravnenij sobolevskogo tipa]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta, seriya Matematika*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 51–72.

10. Keller A.V. The Algorithm for Solution of the Showalter – Sidorov Problem for Leontief Type Models [Algoritm reshenija zadachi Shouoltera – Sidorova dlja modelej leont'evskogo tipa]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, iss.7, no. 4 (241), pp. 40–46. (in Russian)

11. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. The Numerical Solution of the Optimal Dimension Problem. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 73, no. 1, pp. 97–104.

12. Gliklikh Yu.E. Global and Stochastic Analysiswith Applications to Mathematical Physics. London; Dordrecht; Heidelberg; N.-Y., *Springer*, 2011. 460 p.

13. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. *Cambridge: Cambridge University Press*, 1992. 454 p.

14. Kovacs M., Larsson S. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations. *Proc. of "New Directions in the Mathematical and Computer Sciences"*, National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. Publications of the ICMCS, 2008, vol. 4, pp. 159–232.

15. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions. *J. of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 116, no. 5, pp. 3620–3656.

16. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Abstract Cauchy Problem in spaces of stochastic distributions. *J. of Math. Sciences*, 2008, vol. 149, no. 5, pp. 1567–1579.

17. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On the measurement of the "white noise", *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, iss. 13, no. 27 (286), pp. 99–108. (in Russian)

18. Zamyshlyaeva A.A. Stochastic Incomplete Linear Sobolev Type High-Ordered Equations with Additive White Noise [Stohasticheskie nepolnye linejnye uravnenija sobolevskogo tipa vysokogo porjadka s additivnym belym shumom]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, iss. 14, no. 40 (299), pp. 73–82. (in Russian)

19. Zagrebina S.A., Soldatova E.A. The linear Sobolev-type Equations With Relatively *p*-bounded Operators and Additive White Noise [Linejnye uravnenija sobolevskogo tipa s otnositel'no *p*-ogranichennymi operatorami i additivnym belym shumom]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta, seriya Matematika*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 20–34.

20. Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Kochina I. N. Basic Concepts in the Ttheory of Seepage of Homogeneous Fluids in Fissurized Rocks. *J. Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303.

21. Hallaire M. On a Theory of Moisture-transfer. *Inst. Rech. Agronom.*, 1964, no. 3, pp. 60–72.

22. Chen P.J., Gurtin M.E. On a Theory of Heat Conduction -Iinvolving Two Temperatures. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1968, vol. 19, pp. 614–627.

Поступила в редакцию 4 сентября 2013 г.