УДК 629.7.05 + 517.987

ОБ ОЦЕНКЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧЕ МИНИМАКСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев

Рассматривается построение гарантированных оценок состояния динамических систем в условиях неопределённости, когда статистическая информация о возмущениях и помехах отсутствует и известны только множества их возможных значений. Описан алгоритм построения информационных множеств, когда множества возможных значений возмущений и помех являются многогранниками, заданными системами линейных неравенств. Рассмотрено построение информационных множеств на основе текущего измерения, а также с учетом накопленных за предыдущие шаги данные. Приведён численный пример, демонстрирующий работу алгоритма.

Ключевые слова: гарантированная оценка, минимаксный фильтр, информационное множество, системы линейных неравенств.

1. Введение

Задача оценивания состояния динамических систем возникает в различных технических приложениях, таких как системы управления летательными аппаратами, системы слежения и обнаружения целей, автоматизированные системы управления технологическими процессами и предприятиями [8-11,14]. При этом в реальных условиях, как правило, отсутствует статистическая информация о возмущениях и помехах, действующих на систему, но известны множества их возможных значений, что приводит к необходимости решения задач гарантирующего оценивания или минимаксной фильтрации вектора состояния динамической системы [1-4,13,15]. В данной работе описана процедура построения аппроксимации информационных множеств сверху. Работа продолжает исследования [6-8,10].

Процессы в системе управления описываются уравнениями:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \tag{1}$$

$$y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_k, \quad k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{2}$$

где $x_k \in R^n, w_k, y_k \in R^m, v_k$ – векторы состояния системы, возмущения, измерения, ошибок измерений на k-м шаге соответственно; A, Γ, G, H, B – известные матрицы; u_k – заданное управление.

Известно, что начальное состояние x_0 и неопределенные воздействия w_k и v_k на k-м шаге могут принимать любые значения из некоторых заданных выпуклых многогранных множеств:

$$x_0 \in X_0,\ w_k \in W,\ v_k \in V, \quad k = 0,1,...,N-1. \tag{3}$$

Задача гарантированного оценивания текущего состояния системы состоит в построении последовательности информационных множеств $\overline{X}_{k+1}$, $k = 0,1,...,N-1$ (множественной оценки вектора состояния x_k) [2]. На основе предыдущей оценки информационного множества $\overline{X}_k$ рассчитывается множество прогнозов вектора состояния x_k системы:

$$X_{k+1/k} = A\overline{X}_k + \Gamma W + Bu_k, \quad k = 0,1,...,N-1. \tag{4}$$

По результатам измерения y_{k+1} рассчитывается множество состояний, совместимых с измерением:

$$X[y_{k+1}] = \left\{ x \in R^n \middle| Gx + Hv = y_{k+1}, v \in V \right\}, k = 0,1,...,N-1, \tag{5}$$

и затем информационное множество:

$$\overline{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], k = 0,1,...,N-1. \tag{6}$$

Операции в (4)–(6) проводятся над множествами: сумма множеств в смысле Минковского, линейное преобразование и пересечение множеств. Но при увеличении размерности задачи возникают проблемы в реализации операции суммы множеств в реальном времени. Когда многогранники заданы набором своих вершин, то задача построения суммы множеств сводится к нахождению выпуклой оболочки [7]. Известные в настоящее время алгоритмы построения выпуклой оболочки из N точек в n-мерном пространстве имеют время решения $O(N^{\lfloor n/2 \rfloor + 1})$, что неприемлемо для многих практических задач. Зачастую удобно представлять многогранники гранями, т.е. описывать их системой линейных неравенств [5, 7]. В этом случае операция суммы множеств сводится к проектированию многогранника в пространство меньшей размерности методом свёртки системы линейных неравенств Фурье-Черникова [1, 6]. Недостатком данного метода является появление в промежуточных вычислениях большого количества избыточных неравенств, число которых зависит экспоненциально от количества неравенств в исходной системе. Чтобы уменьшить вычислительную сложность алгоритма, применяют различные аппроксимации информационных множеств, хотя при этом и происходит потеря точности [3, 7, 12].

2. Аппроксимация информационных множеств

Построение суммы множеств (4) является самой трудоёмкой по времени вычисления операцией при решении задачи минимаксной фильтрации. Одним из способов уменьшения вычислительной сложности является описание множеств эллипсоидами [12]. Однако класс эллипсоидов не замкнут относительно операций суммы и пересечения, поэтому при описании сверху результатов этих операций эллипсоидом происходит значительная потеря точности. В данной работе приведена процедура построения аппроксимации информационного множества без построения суммы и пересечения множеств. Ограничения (3) заданы системами линейных неравенств:

$$x_0 \in X_0 : A_{x_0} x_0 \le b_{x_0}, \quad w_k \in W : A_w w_k \le b_w, \; v_k \in V : A_v v_k \le b_v, \quad k = 0,1,\dots,N-1. \tag{7}$$

Алгоритм 1

Шаг 1. Получим систему линейных уравнений, описывающую модель системы (1), (2):

$$\begin{pmatrix} E & -A & -\Gamma & 0 \\ G & 0 & 0 & H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ w_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bu_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Шаг 2. Получим систему линейных неравенств из ограничений (7):

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{x_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ w_k \\ v_k \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_{x_k} \\ b_w \\ b_v \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Шаг 3. Системы (8), (9) неявно задают информационное множество. Аппроксимируем информационное множество $\overline{X}_{k+1}$ многогранником с набором граней $A_{x_{k+1}}$, т.е. получим многогранник, описанный системой линейных неравенств $A_{x_{k+1}} \cdot x \le b_{x_{k+1}}$. Поскольку форма множества $\overline{X}_{k+1}$ неизвестна, то выбирать направления $A_{x_{k+1}}$ следует исходя из требований задачи, например, выбирать такие вектора a_i, по направлению которых значения координат вектора состояния являются наиболее важными. Для каждого направления a_i решаем задачу линейного программирования $a_i x \to \max$ при ограничениях (8) и (9), $b_i = a_i \cdot x^*$, где x^*- решение задачи линейного программирования.

Рассмотрен алгоритм аппроксимации информационного множества на один шаг. В данном случае неточности, получаемые из-за аппроксимации, могут с каждым шагом накапливаться. Увеличить точность можно, если учитывать информацию, полученную на предыдущих шагах.

Алгоритм 2

Шаг 1. Зададим N – число предыдущих шагов, данные с которых будут использованы для вычисления текущей оценки.

Шаг 2. Составим систему линейных уравнений, описывающих систему на последних N шагах:

$$\begin{pmatrix} E & -A & \dots & 0 & -\Gamma & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E & -A & \dots & 0 & -\Gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & E & -A & 0 & \dots & -\Gamma & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \dots \\ x_{k-N} \\ w_{k-1} \\ \dots \\ w_{k-N} \\ v_{k-1} \\ \dots \\ v_{k-N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bu_{k-1} \\ \dots \\ Bu_{k-N} \\ y_k \\ \dots \\ y_{k-N} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Шаг 3. Составим систему линейных неравенств, описывающих множества возмущений, помех и информационное множество на *k*-м шаге:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & A_{x_{k-N}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{w_{k-1}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{w_{k-N}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{v_{k-1}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & A_{v_{k-N}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \dots \\ x_{k-N} \\ w_{k-1} \\ \dots \\ w_{k-N} \\ v_{k-1} \\ \dots \\ v_{k-N} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_{x_k} \\ \dots \\ b_{x_{k-N}} \\ b_{w_{k-1}} \\ \dots \\ b_{w_{k-N}} \\ b_{v_{k-1}} \\ \dots \\ b_{v_{k-N}} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Шаг 4. Аналогично шагу 3 алгоритма 1: строится аппроксимация информационного множества $\overline{X}_k$ на основе систем (10), (11).

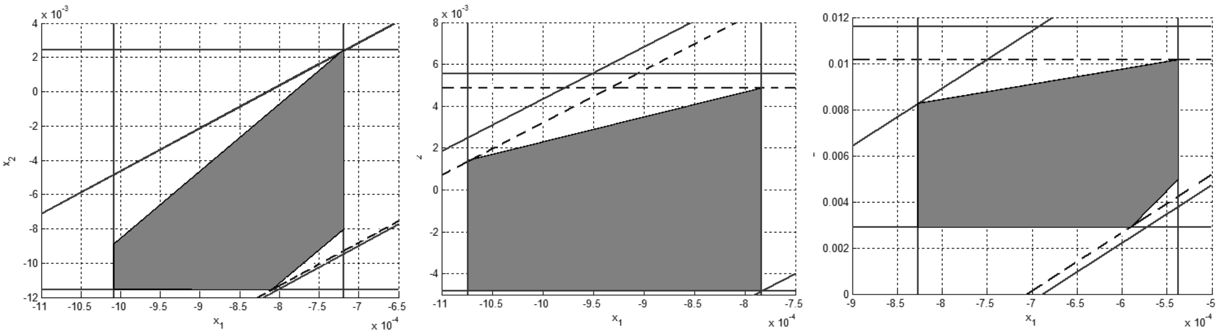
3. Примеры реализации алгоритма

Пример 1

Рассмотрим применение минимаксного фильтра на примере для системы (1) – (3). Пусть матрицы *A* и Г имеют следующие значения: $A = \begin{pmatrix} 0,9976 & 0,04636 \\ -0,09278 & 0,8584 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \left(0,2289 \cdot 10^{-3} \quad 4,639 \cdot 10^{-3}\right)^T$, вектор измерений $y_k \in R^2$. Множества заданы следующим образом: X_0 – прямоугольник с центром в начале координат и сторонами $1.5 \cdot 10^{-3}$ и 0.06, *W* – отрезок, симметричный относительно 0 длиной 3, *V* – прямоугольник с центром в начале координат и сторонами $2.9 \cdot 10^{-4}$ и 0.0456. Для моделирования процесса будем считать, что начальное состояние системы $x_0=0$, т.е. находится в начале координат, а возмущения w_k и ошибки измерений v_k меняются внутри множеств *W* и *V* соответственно. Построим оценки вектора состояния, выполняя операции над множествами по формулам (4) – (6), а также построим аппроксимацию информационных множеств шестиугольником с гранями, нормали которых $A_{x_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0,04 & 0 & -1 & -0,04 \end{pmatrix}^T$, используя информацию с предыдущего шага и последних пяти шагов. На рис.1 при-ведены множественные оценки вектора состояния на шестом, седьмом и восьмом шагах. В данном случае увеличение числа шагов при аппрокси-мации позволило уменьшить множественную оценку, но потеря точности всё равно остаётся. В связи с чем возникает задача выбора оптимальной формы аппроксимирующего многогранника и числа предыдущих шагов N, информация с которых будет использоваться для вычисления текущей оценки.

Пример 2

Рассмотрим построение аппроксимации информационного множества на примере математической модели самолёта F16 [14]:



---- - аппроксимация на 5 шагов, − - аппроксимация на 1 шаг,
■ – информационное множество
Информационные множества $\bar{X}_6$, $\bar{X}_7$, $\bar{X}_8$

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A} \cdot x(t) + \mathrm{B} \cdot u(t) + \Gamma \cdot w(t),$$
$$y(t) = G \cdot x(t) + H \cdot v(t),$$

где $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -0.3220 & 0.0640 & 0.0364 & -0.9917 & 0.0003 & 0.0008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0037 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30.6492 & 0 & -3.6784 & 0.6646 & -0.7333 & 0.1315 & 0 & 0 \\ 8.5395 & 0 & -0.0254 & -0.4764 & -0.0319 & -0.0620 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20.2 & 0 & -0.01 & -5.47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20.2 & -0.168 & 51.71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \ \Gamma = I,$$

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 57.295800 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 57.295800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$w_k \sim N(0,Q),\ Q=diag(0.01\quad 0.01\quad 0.01\quad 0.01\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1),$$

$$v_k \sim N(0,R),\ R=I\,.$$

Для демонстрации работы алгоритма, не нарушая общности, исключим из системы две последние координаты. Приведем непрерывную модель к дискретному виду (1), (2) с шагом 0.01с. Параметры полученной модели:

$$A=\begin{pmatrix} 0.996306 & 0.000639 & 0.000361 & -0.009876 & 0.000003 & 0.000010 \\ -0.001531 & 1 & 0.009816 & 0.0000701 & -0.000037 & 0.000007 \\ -0.300078 & -0.000098 & 0.963836 & 0.008028 & -0.006459 & 0.001155 \\ 0.085093 & 0.000027 & -0.000233 & 0.994823 & -0.000285 & -0.000556 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.818402 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.818402 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0.0000003 & -0.0000023 & -0.0006847 & -0.000030 & 0.182900 & 0 \\ 0.0000010 & 0.0000004 & 0.0001225 & -0.0000585 & 0 & 0.182900 \end{pmatrix}^T,$$

$$\Gamma=I\,.$$

Зададим начальные ограничения состояния, возмущений и помех в соответствии с ковариационными матрицами: опишем сверху эллипсоиды, заданные ковариационными матрицами, параллелепипедами. Множество $\bar{X}_0$ является шестимерным параллелепипедом с центром в начале координат и со сторонами равными 0,6, множество W – четырёхмерным параллелепипедом с центром в начале координат и со сторонами равными 0,6, множество V – двумерный параллелепипед с центром в начале координат и со сторонами равными 6.

Рассмотрим некоторую реализацию процесса. Информационные множества на k-м шаге будем аппроксимировать сверху параллелепипедом с гранями, параллельными координатным плоскостям: $A_{x_k} x_k \le b_{x_k}$, $A_{x_k} = \begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix}^T$, где I – единичная матрица размера 6.

Из результатов работы алгоритма 1 для k=1…8 (таблица) следует, что размер по пятой и шестой координатам уменьшается с течением времени. Это связано с тем, что по этим координатам возмущения не действуют, а матрица A в уравнении (1) для модели истребителя F16 является сжимающей по этим координатам. Размер по первой и второй координатам уменьшается благодаря тому, что эти координаты измеряемые, а возмущения и помехи реализовались таким образом, что пересечение множеств прогнозов и множеств, совместимых с измерением, оказалось мало.

Таблица

Значения b_{x_k} при аппроксимации информационных множеств для математической модели F16 многогранниками $X_k = \left\{ x \middle| A_{x_k} \cdot x \le b_{x_k}, A_{x_k} = \begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix}^T \right\}$, $k = 1..8$

b_{x_1}	b_{x_2}	b_{x_3}	b_{x_4}	b_{x_5}	b_{x_6}	b_{x_7}	b_{x_8}
0,107720	0,000022	-0,002912	0,000495	0,003916	0,000179	-0,002747	0,000583
0,003000	0,005968	0,011877	0,017744	0,003023	0,005999	0,011678	0,017304
0,295984	0,292294	0,290620	0,285475	0,278906	0,272098	0,266735	0,261135
0,311491	0,313560	0,314912	0,010436	0,013374	0,016554	0,019430	0,008753
0,245521	0,139423	0,145914	0,242891	0,207578	0,038902	0,067579	0,285803
0,245521	0,654514	0,634472	0,480982	0,426543	0,423594	0,412762	0,400535
-0,003000	0,003270	0,009467	-0,000138	-0,003148	0,000106	0,003371	-0,000309
0,101720	0,098752	-0,002969	-0,000011	0,006014	0,011976	-0,003005	-0,000047
0,329341	0,322831	0,315001	0,307039	0,300673	0,294430	0,287041	0,279960
0,302032	0,024323	0,027984	0,031587	0,034827	0,018173	0,021425	0,024940
0,245521	0,262446	0,182976	0,026273	0,012707	0,141380	0,079964	-0,165054
0,245521	-0,252645	-0,305582	-0,211817	-0,206258	-0,243312	-0,265219	-0,279786

Заключение

Приведена процедура построения аппроксимации информационного множества сверху многогранником любой формы. При этом процедура построена без выполнения вычислительно затратных операций суммы и пересечения множеств, используется неявное задание информационного множества системами линейных неравенств и уравнений. В некоторых случаях чебышевский радиус истинного информационного множества и аппроксимации совпадает, хотя форма и объём у них не одинаковы. Также рассмотрена возможность уточнения аппроксимации благодаря расширению системы за счёт накопления данных с предыдущих шагов. По сравнению с одношаговой аппроксимацией, аппроксимация на несколько шагов на некоторых итерациях позволяет уменьшить чебышевский радиус и объём аппроксимирующего многогранника. Были получены гарантированные оценки для модели истребителя F16, вектор состояния которого является шестимерным. Вычисления проводились в среде Matlab на компьютере с тактовой частотой 2ГГц и ОЗУ 4ГБ.

Библиографический список

1. Бушенков, В.А. Методы и алгоритмы анализа линейных систем на основе построения обобщенных множеств достижимости / В.А. Бушенков, А.В. Лотов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1980. – Т. 20. – № 5. – С. 1130–1141.

2. Кац, И.Я. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях / И.Я. Кац, А.Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 11. – С. 79–87.

3. Костоусова, Е.К. О полиэдральных оценках множеств достижимости линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление / Е.К. Костоусова // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8. – № 4. – С. 55–74.

4. Куржанский, А.Б. Идентификация билинейных систем. Гарантированные псевдоэллипсоидальные оценки / А.Б. Куржанкий, В.Д. Фурасов // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 1. – С. 41–53.

5. Панюков, А.В. Представление суммы минковского для двух полиэдров системой линейных неравенств / А.В. Панюков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 40. – С. 108–119.

6. Подивилова, Е.О. О подходе к оцениванию состояния динамических систем как к решению системы линейных неравенств / Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2013. – Вып. 17, № 3(13). – С. 133–136.

7. Уханов, М.В. Алгоритмы построения информационных множеств при реализации минимаксного фильтра / М.В. Уханов, В.И. Ширяев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Физика. Химия». – 2002. – Вып. 2. – № 3. – С. 19–33.

8. Ширяев, В.И. Синтез управления линейными системами при неполной информации / В.И. Ширяев // Изв. РАН. Техническая кибернетика. – 1994. – № 3. – С. 229–237.

9. Филимонов, Н.Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования / Н.Б. Филимонов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2003. – № 2. –С. 11–15.

10. Фокин, Л.А. Об использовании калмановского и минимаксного алгоритмов оценивания погрешностей интегрированной навигационной системы / В.И. Ширяев, Е.О. Подивилова // Труды ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления. – 2013. – № 3. – С. 65–79.

11. Эльясберг, П.Е. Измерительная информация: сколько её нужно? Как её обрабатывать? / П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1983. – 208 с.

12. Chernousko, F.L. Minimax control for a class of linear systems subject to disturbances / F.L. Chernousko // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2005. – Vol. 127. – № 3. – pp. 535–548.

13. Schweppe, F.C. Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs / F.C. Schweppe // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – № 13(1). – pp. 22–28.

14. Tsai, Huan-Liang Generalized Linear Quadratic Gaussian and Loop Transfer Recovery Design of F-16 Aircraft Lateral Control System / Huan-Liang Tsai // Engineering Letters. – 2007. – Vol. 14, Issue 1. – pp. 1–6.

15. Zhou, B. A New Nonlinear Set Membership Filter Based on Guaranteed Bounding Ellipsoid Algorithm / Bo Zhou, Kun Qian, Xu-Dong Ma, Xian-Zhong Dai // Acta Automatica Sinica. Vol.39. – 2013. – No. 2. – pp. 146–154.

К содержанию