УДК 621.396.67.08

ИТЕРАТИВНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ АНТЕНН

А.Б. Хашимов

Задача восстановления диаграммы направленности антенной системы в строгой электродинамической постановке сформулирована в виде системы функциональных уравнений I рода. Предложен метод численного решения системы уравнений по ограниченному множеству результатов измерений амплитудно-фазового распределения поля в ближней зоне. Для согласования размерностей определяемых распределений токов и результатов измерений в ближней зоне предложены эффективные интерполяционные схемы. Применение итеративной регуляризирующей процедуры позволяет получить устойчивые решения некорректной задачи с приемлемой точностью при наличии случайных погрешностей измерений.

Ключевые слова: сплайн-интерполяция, функциональные уравнения, итеративная регуляризирующая схема.

Определение диаграммы направленности (ДН), поляризационных свойств, коэффициента направленного действия (КНД) антенн в заданной полосе частот амплифазометрическим (радиоголографическим) методом основано на применении целого комплекса мер по преобразованию результатов измерения ближнего поля антенны в поле излучения в дальней зоне [1]. Поиск оптимальных алгоритмов восстановления ДН антенн в дальней зоне по измерениям в ближней зоне на поверхностях, вид и форма которых определяются специфическими свойствами измеряемой антенны и условиями измерений, может значительно расширить возможности радиоголографического метода.

Для построения математической модели (ММ) задачи восстановления ДН в дальней зоне и определения амплитудно-фазового распределения (АФР) возбуждения антенны по результатам измерений поля излучения в ближней зоне будем использовать строгие электродинамические соотношения. Такие задачи в электродинамике относятся к классу обратных задач, но с одной очень важной особенностью – все геометрические размеры измерительной схемы считаются известными с заданными пределами погрешностей их определения. Кроме того, при построении ММ необходимо учитывать, что задачи восстановления АФР имеют принципиальную особенность – результаты измерения полей определяются экспериментально, поэтому они искажены помеховыми полями и измерительными погрешностями, которые имеют случайный характер, статистические характеристики которых зачастую неизвестны. Это означает, что функциональные уравнения восстановления АФР антенны и ДН в дальней зоне относятся к некорректным уравнениям [2], для решения которых должны быть использованы методы регуляризации. Будем считать, что на произвольной незамкнутой поверхности S_d задано множество точек с координатами $(x_n, y_n, z_n), n = \overline{1:N}$, при этом координаты точек определены со случайными ошибками $(\Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n)$. Тогда $(x_n, y_n, z_n) = \left(x_n^e, y_n^e, z_n^e\right) + (\Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n)$, где $\left(x_n^e, y_n^e, z_n^e\right)$ – точные координаты. Это множество точек определяет измерительную сетку. Рассмотрим вариант построения измерительной схемы, когда в качестве зонда используется электрический диполь. В [1] показано, что в этом случае ток и напряжение, возбужденные в диполе, пропорциональны напряженности той компоненты вектора электрического поля, вдоль которой ориентирована ось диполя. Такой зонд позволяет непосредственно измерить относительное распределение компонент тангенциальной составляющей $\mathbf{E}_\tau$ к поверхности S_d. При этом зонд необходимо располагать так, чтобы в каждой точке поверхности измерений S_d его ось лежала в плоскости, касательной к этой поверхности, и была ориентирована соответственно поляризации измеряемого поля. При расположении зонда на расстоянии несколько длин волн от антенны его влияние на результаты измерений пренебрежимо мало [1]. Необходимо отметить, в рассматриваемой измерительной схеме фактически измеряются не составляющие вектора поля в ближней зоне, а комплексные амплитуды сигнала зонда, соединенного со входом приемника [1]. Это требует дополнительного преобразования результатов измерений с учетом характеристик самого зонда.

Пусть в точках (x_n, y_n, z_n) с помощью зонда измерены АФР составляющих вектора напряженности электрического поля E_{xn}, E_{yn}, E_{zn}, также определяемые со случайными ошибками. Без ограничения общности будем считать, что исследуемая антенна представляет собой идеально проводящую поверхность S_a, на которой распределен поверхностный ток $\mathbf{j}$. В случае сложной антенной системы поверхность S_a представляет собой совокупность нескольких поверхностей. Введем координаты точек (x'_m, y'_m, z'_m) на поверхности S_a, которые определяются с погрешностью. В этих точках будут определяться составляющие поверхностного тока $\left(j_{xn}, j_{yn}, j_{zn}\right)$. Отметим, что по условиям рассматриваемой задачи восстановления всегда $N \neq M$, при этом $N < M$, так как известные критерии оценки точности численного решения краевых задач электродинамики требуют декомпозиции поверхности S_a на конечные элементы с размерами сторон не менее $\lambda/10 ... \lambda/15$, что для антенн больших электрических размеров может приводить к числу измерений N в несколько тысяч. Реализовать такие измерительные схемы технически очень сложно, поэтому необходимо применение таких методов восстановления, когда размерность цифровых массивов результатов измерений ограничена и не зависит от общей размерности дискретной ММ антенны.

Введем функциональные уравнения следующего вида [3]:

$$E_x = \frac{Z_c}{ik}\int\limits_{S_a}\left[\quad j_x\left(2B_r + \frac{r_y^2 + r_z^2}{r}D_r\right) - j_y\frac{r_x r_y}{r}D_r - j_z\frac{r_x r_z}{r}D_r\right]ds';$$

$$E_y = \frac{Z_c}{ik}\int\limits_{S_a}\left[-j_x\frac{r_x r_y}{r}D_r + j_y\left(2B_r + \frac{r_x^2 + r_z^2}{r}D_r\right) - j_z\frac{r_y r_z}{r}D_r\right]ds'; \qquad (1)$$

$$E_z = \frac{Z_c}{ik}\int\limits_{S_a}\left[-j_x\frac{r_x r_z}{r}D_r - j_y\frac{r_y r_z}{r}D_r + j_z\left(2B_r + \frac{r_x^2 + r_y^2}{r}D_r\right)\right]ds',$$

связывающие составляющие АФР восстанавливаемого поверхностного тока $\mathbf{j}$ с измеренными составляющими вектора напряженности электрического поля, где $Z_c = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$ – волновое сопротивление среды; $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$; $r_x = x - x'$; $r_y = y - y'$; $r_z = z - z'$; $(x, y, z), (x', y', z')$ – координаты точек наблюдения и интегрирования, соответственно; $B_r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\varphi$; $D_r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{k^2}{r} - \frac{3ik}{r^2} - \frac{3}{r^3}\right)\varphi$; $\varphi = \exp(-ikr)/r$. Подчеркнем, что в системе (1) поверхность измерений S_d может быть произвольной и незамкнутой, а для радиоголографического метода эта поверхность принципиально должна быть замкнутой, с вектором нормали к ней в произвольной точке удовлетворяющим условию непрерывности Ляпунова. В системе (1) уравнения являются не интегральными, а функциональными, так как области определения решения и известной левой части не совпадают, следовательно, операторы задачи не являются фредгольмовыми. Таким образом, ММ задачи восстановления АФР поверхностного тока по заданному распределению вектора напряженности электрического поля на поверхности S_d формулируется в виде системы функциональных уравнений I рода с гиперсингулярными ядрами. Для численного исследования ММ рассматриваемой задачи необходим выбор метода дискретизации системы (1), приводящего к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Этот метод должен учитывать еще одну специфическую особенность ММ, связанную с необходимостью использования квадратурных формул высокой точности, например, Гаусса-

Лежандра с числом узлов не менее 16 и выше. Это требуется для обеспечения необходимой устойчивости численного решения, в значительной степени зависящей от случайных факторов задачи. Поэтому любое повышение точности вычислительных процедур в конечном итоге приводит к дополнительной стабилизации математического моделирования. Для построения дискретной ММ задачи восстановления используем метод моментов [3], в котором выбор базисных и весовых функций соответствуют варианту метода коллокаций. Применение этого метода для численного решения электродинамических задач показывает его высокую эффективность и результативность, удобство для программной реализации.

Важное практическое значение в методах восстановления ДН в дальней зоне по результатам измерений в ближней зоне отводится вопросам организации рациональных интерполяционных схем. Это связано с необходимостью согласования большого количества неизвестных значений АФР распределения токов в правой части (1) – до нескольких тысяч, с ограниченным массивом цифровой радиоголограммы в левой части – не более 300…500. Следовательно, численное решение (1) должно быть построено с использованием такой интерполяционной схемы, которая учитывает как априорную информацию о степени гладкости функции АФР ближнего поля, так и влияние случайных погрешностей измерений в заданных узлах пространственной сетки. Численные эксперименты показали неэффективность алгебраической интерполяции Лагранжа и Ньютона-Грегори, требующих использования полиномов высокой степени. Наилучшие результаты с точки зрения точности приближения и скорости вычислений показали схемы сплайн-интерполяции. С их помощью размерность массива цифровой радиоголограммы с шагом координатной сетки измерений $0,25...0,5\lambda$ может достигать всего несколько десятков при использовании кубических сплайнов. Численные эксперименты для тестовых задач показали приемлемую точность восстановления ДН при небольших затратах компьютерного времени.

Система функциональных уравнений (1) с учетом особенностей дискретизации ММ приводит к СЛАУ, где коэффициенты СЛАУ определяются численным интегрированием соответствующих функциональных зависимостей ядра системы уравнений (1) по поверхностям конечных элементов. Необходимо отметить, что для трехмерных задач большой электрической размерности СЛАУ может иметь очень высокий порядок. В этом случае компьютерные ресурсы являются естественным ограничением возможностей математического моделирования задач восстановления в строгой электродинамической постановке.

На практике достаточно часто встречаются задачи, в которых трехмерные асимптотические представления ДН антенны в дальней зоне соответствуют ДН в плоскости, перпендикулярной оси эквивалентных двумерных излучателей – случай E-поляризации [4]. Например, для модуля ФАР в виде линейной решетки вибраторов вертикальной поляризации, расположенных над протяженным экраном, соответствующий двумерный аналог имеет вид линейной решетки бесконечно протяженных нитей электрических токов над двумерной идеально проводящей полосой, контур которой образован сечением экрана плоскостью, перпендикулярной оси вибраторов и проходящей через их центры. Тогда в этой плоскости асимптотические представления ДН в дальней зоне будут одинаковыми для этих излучающих систем. Такой частный случай приводит к значительному упрощению системы (1), которая может быть представлена одним уравнением. Будем считать, что ось z совпадает с продольной осью вибраторов, тогда

$$E_z(x,y) = -\frac{i}{4}\int\limits_L j_z(x',y')H_0^2(kr)dl', \qquad (2)$$

где L – контур, образованный сечением антенны плоскостью, перпендикулярной оси z; $r=\sqrt{r_x^2+r_y^2}$; $H_0^2(kr)$ – функция Ганкеля второго рода нулевого порядка. В идеализированной постановке, когда отсутствуют погрешности определения поля излучения и координат точек, в которых находятся АФР токов, численное решение уравнения (2) может быть получено как прямыми, так и итерационными методами.

Особенностью функциональных уравнений (1), (2) является ярко выраженная неустойчивость численного решения, характерная для некорректных задач. Это подтверждает следующий численный пример. Пусть исследуемая антенна представляет собой линейную ФАР, излучатели – 64 вибратора вертикальной поляризации, расстояние между излучателями $d=0,62\lambda$, излучатели расположены на расстоянии $h=0,25\lambda$ от идеально проводящего экрана, размеры которого $40,8\lambda\times 0,72\lambda\times 0,08\lambda$. Переходя к модели эквивалентной двумерной антенны, будем считать, что контур L представляет собой прямоугольник, размеры которого $40,8\lambda\times 0,08\lambda$, а излучатели представляют собой нити электрических токов, расположение и АФР которых совпадает с расположением и АФР линейки вибраторных излучателей. Введем интервал дискретизации контура $\Delta=0,12\lambda$, в процессе моделирования эта величина может меняться с учетом условий устойчивого численного решения и достижения заданной точности восстановления АФР. На первом этапе будем считать, что все исходные данные определяются точно, то есть все погрешности отсутствуют. Интервал Δ и число излучателей определяют общую размерность ММ. Введем некоторую вспомогательную линию L_d, на которой расположены точки измерений поля излучения антенны, пусть число точек совпадает с размерностью ММ. Подчеркнем, что расположение линии измерений и ее форма могут быть произвольными, например, в [2] предложена схема измерений на линии, перпендикулярной контуру L и расположенной в стороне от него. Введем исходное возбуждение излучателей ФАР в виде равноамплитудного синфазного распределения. Тогда численное решение ИУ (3) для заданного возбуждения определяет АФР тока на контуре L, при этом точки наблюдения и точки источников принадлежат L. С помощью этого тока в заданных точках L_d можно определить составляющую поля излучения антенны E_z. Пусть L_d без ограничения общности представляет собой прямую, расположенной параллельно контуру L на расстоянии 4λ, расстояние между точками измерений $0{,}1\lambda$. Будем считать, что это поле является исходным для решения обратной задачи восстановления. В отсутствии погрешностей относительное изменение нормы токов прямой и обратной задачи не превышает величины 10^{-6}, что позволяет считать такую задачу устойчивой. На втором этапе введем случайные изменения амплитуды и фазы заданного поля E_z. Будем считать, что случайные изменения имеют равномерный закон распределения. С помощью генератора случайных чисел *rand* и процедуры масштабирования введем аддитивные случайные изменения амплитуды и фазы с относительной погрешностью 10^{-8}. Норма тока в этом случае имеет порядок 10^{6} относительно той же величины для устойчивой задачи. Если относительные случайные изменения значений поля имеют величину порядка 10^{-2}, что соответствует практическим методам измерений с повышенной точностью в сверхвысокочастотном диапазоне, то норма восстановленного тока имеет порядок 10^{11}. Следовательно, рассматриваемая задача восстановления АФР тока может быть решена только с использованием методов регуляризации.

Для детализации постановки задачи введем на паре линейных нормированных пространств X,Y линейное операторное уравнение I рода:

$$Ax = y, \qquad (3)$$

которое в условиях нарушения корректности по Адамару предполагает, что A^{-1} разрывное (многозначное) отображение. Исходные данные задачи – пара $(A;x)$ известны приближенно с уровнем погрешности δ,h:

$$\|y - y_\delta\| \le \delta, \; \|A - A_h\| \le \eta(h,x), \qquad (4)$$

где $\eta(h,x) \to 0$ при $h \to 0$ на каждом ограниченном подмножестве $D \subset X$. Нам необходимо построить регуляризованное (устойчивое к возмущениям исходных данных) семейство приближенных решений. Обозначим через U множество допустимых возмущений линейного ограниченного оператора. Тогда семейство отображений $R_{\delta h} : Y \times U \to X$ называется регуляризирующим алгоритмом (РА) для решения уравнения (4), если [5]:

$$\sup_{\substack{\|y-y_\delta\|\le\delta \; \|A-A_h\|\le h \\ y_\delta\in Y \quad A_h\in U}} \operatorname{dist}\left\{R_{\delta h}\left(y_\delta,h\right),A^{-1}y\right\}\to 0 \tag{5}$$

при $\delta,h\to 0$ для любого $y\in R(A)=A(X), A\in L(X,Y)$, тогда:

$$\left\{R_{\delta h}\left(y_\delta,A_h\right),0<\delta\le\delta_0,0<h\le h_0\right\} \tag{6}$$

называется регуляризованным семейством приближенных решений.

Привлечение априорных сведений при конструировании приближенного решения принципиально необходимо, так как знание уровня погрешностей в (6) достаточно для построения РА в смысле А.Н. Тихонова, устойчивого к возмущениям [6]. Для рассматриваемой задачи восстановления такими априорными сведениями являются допустимые пределы погрешности позиционирования зонда, точностные характеристики измерительной аппаратуры для определения комплексной амплитуды поля в узлах измерительной сетки. Однако сходимость РА может быть сколь угодно медленной, и приближенное решение может плохо аппроксимировать точное.

Широкое применение для приближенного решения некорректной задачи (3) получили одношаговые линейные итерационные схемы [5],[6],[7]. Важным преимуществом итерационных схем является возможность адаптивного выбора параметров регуляризации по результатам пошаговой сходимости, а также удобные численные процедуры организации останова итерационной схемы по заданным критериям с возможностью оперативной коррекции исходных данных, например, изменением параметров и размерности измерительной сетки. Кроме того, при проведении однотипных измерений (проверка соответствия ДН серии исследуемых антенн заданной), набор оптимальных параметров итерационной схемы определяется только один раз, и может считаться базовым и для других типов исследуемых антенн. Общая линейная итерационная схема имеет следующий вид [5]:

$$x_{n+1}=x_n-\mu A_h^{\delta}\left(A_h x_n-y_\delta\right),\; x_0=0,\; 0<\mu<2\big/\left\|A_h\right\| \tag{7}$$

где μ – параметр итеративной регуляризации, зависящий от спектра оператора; A_h^* – оператор, сопряженный к A_h.

Большое количество вычислительных экспериментов численного решения задачи (4) с помощью схемы (8) позволяет предложить следующую методику определения оптимального параметра μ.

1. Вводится серия параметров $\mu_1,\mu_2,...\mu_k$. Для рассматриваемой задачи эксперименты показывают, что эти значения находятся в интервале $2...5$.

2. Для этой серии параметров μ последовательно применяется схема (8) для одинакового числа итераций m. Для каждого параметра μ из серии находится невязка квазирешения $\|x_m - x_{m-1}\|$.

3. Из серии вычислительных экспериментов находится оптимальный параметр $\mu_{opt} \to \min\|x_m - x_{m-1}\|$, например, методом интерполяции сеточной функции кубическими сплайнами.

4. Для μ_{opt} проводится прогонка итеративной регуляризирующей схемы с введенным правилом останова, если до его выполнения не произошло прерывание процесса при условии достижения заданной точности восстановления $\|x_i - x_{i-1}\|/x_{\max} < \Delta$.

Большое количество вычислительных экспериментов подтверждают эффективность предложенного метода обработки результатов измерений в ближней зоне антенн.

Библиографический список

1. Бахрах, Л.Д. Методы измерений параметров излучающих систем в ближней зоне / Л.Д. Бахрах, С.Д. Кременецкий, А.П. Курочкин, В.А. Усин, Я.С. Шифрин. – Ленинград: Наука, 1985. – 272 с.

2. Гармаш, В.Н. Численные методы решения некоторых обратных задач восстановления характеристик излучающих систем по измеренным полям в дальней и ближней зонах / В.Н. Гармаш, Н.П. Малакшинов, В.Ф. Пузанков // Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. – М.: Высшая школа, 1983. – Вып. 5. – С. 98–130.

3. Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры. – М.: Мир, 1977. – 588 с.

4. Войтович, Н.И. О соответствии асимптотических решений двумерных и трехмерных задач в антенной технике / Н.И. Войтович, А.Б. Хашимов // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т. 55. – № 12. – С. 1471–1476.

5. Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург: Уральская изд. фирма «Наука», 1993. – 263 с.

6. Бакушинский, А.Б. Итеративные методы решения некорректных задач / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. – М.: Наука, 1989. – 128 с.

7. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 183 с.

К содержанию