УДК 519.852 + 53.088

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МИНИМАКСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Е.Д. Ильин, В.И. Ширяев

Рассматривается способ оценивания возмущений и ошибок измерений с помощью решения задач линейного программирования в задаче гарантированного оценивания. Приводится пример оценивания постоянной составляющей ошибки измерений.

Ключевые слова**:** минимаксная фильтрация; оценка возмущений; оценка ошибок измерений; системы линейных неравенств.

Оценка внешних воздействий и ошибок измерений является важной задачей при построении динамических систем. С помощью этой информации можно обнаружить разладку датчиков или механизмов системы, а также улучшить адаптивные способности алгоритма идентификации системы [1]. Алгоритмы динамического восстановления неизвестных внешних воздействий для некоторых классов систем, описываемых дифференциальными уравнениями, приведены в [2, 3, 4]. В [5] задача идентификации состояния среды сводится к задаче дискретного чебышевского приближения, которая решается методом полиэдрального программирования.

Большой интерес представляет оценка внешних воздействий в задачах идентификации и управления в гарантированной постановке [6, 7]. В такой постановке задачи априорные сведения о внешней среде ограничиваются лишь заданием всех возможных значений внешних воздействий [8, 9]. Но для отдельно взятой реализации процесса реальное множество возмущений может быть меньше априорно заданного. Уточнение априорного множества так, что возмущения оказываются близко к границе этого множества, позволяет значительно повысить точность минимаксной фильтрации [9, 10].

Рассмотрим задачу гарантированного оценивания в следующей постановке:

$$\begin{gathered} x_{k+1} = Ax_k + \Gamma w_k, \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \\ k = 0,1,\ldots,N-1, \end{gathered} \tag{1}$$

где $x_k \in R^n, y_k \in R^m$ – векторы состояния системы и измерений $n>m$; w_k и v_k – векторы возмущений и ошибок измерений соответственно; A, Γ, G, H – известные матрицы. Про начальное состояние системы x_0, а также вектора w_k и v_k известно, что они могут принимать любое значение из заданных выпуклых множеств X_0, W, V.

Задача оценивания решается путем построения на каждом шаге информационного множества $\bar{X}_{k+1}$, которое гарантированно содержит в себе истинное значение $x_{k+1} \in \bar{X}_{k+1}$ [9, 11]:

$$\begin{gathered} \bar{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], \\ X_{k+1/k} = A\bar{X}_k + \Gamma W, \\ X[y_{k+1}] = \left\{ x \in R^n \middle| Gx + v = y_{k+1}, v \in V \right\}, \\ k = 0,1,\dots,N-1, \end{gathered} \tag{2}$$

где $X_{k+1/k}$ – множество прогнозов; $X[y_{k+1}]$ – множество совместимое с измерениями y_{k+1}.

Все операции производятся над множествами: линейное преобразование, пересечение множеств, сумма множеств понимается в смысле Минковского.

Априорные оценки множеств X_0, W, V. могут оказаться сильно завышенными для конкретной реализации процесса, т.е. $v_k \in \tilde{V} \subset V$ при этом множество $\tilde{V}$ значительно меньше множества V. Также для векторов w_k и v_k в конкретном случае может быть задана их параметрическая модель [5]. В этих случаях полезны адаптивные процедуры, позволяющие уточнять оценки множеств W и V в зависимости от реальной ситуации, тем самым повышая точность оценивания вплоть до получения точных гарантированных оценок. Для уточнения множеств W и V необходимо получить оценки $\tilde{w}_k$ и $\tilde{v}_k$ значений возмущений w_k и ошибок измерений v_k по результатам текущих измерений y_{k+1}, k=0,1,...,N-1.

Для решения этой задачи можно использовать расширенный минимаксный фильтр [12], однако такой подход является вычислительно сложным [13]. Другой способ – это представление модели (1) в виде эквивалентной системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_{k+1} - Ax_k + \Gamma w_k = 0; \\ Gx_{k+1} + Hv_{k+1} = y_{k+1}; \\ A_{x_k} x_k \le b_{x_k}; \\ A_w w_k \le b_w; \\ A_v v_k \le b_v. \end{cases} \tag{3}$$

Равенства в системе (3) описывают модель процесса, а неравенства задают множественные ограничения $x_k \in \bar{X}_k$, $w_k \in W$, $v_k \in V$, где $\bar{X}_k$ – информационное множество на k-м шаге. При этом если для множества неизвестно точное описание линейными неравенствами, то используется аппроксимация сверху этого множества фигурой, которую можно описать таким образом.

Для получения оценки множества возмущений $\tilde{W}_k$ на k-ом шаге необходимо решить систему (3) относительно w_k. Для этого можно воспользоваться методом свертывания [14]. Однако при большой размерности системы (3) данный метод требует значительных вычислительных затрат [13]. Вместо точного решения $\tilde{W}_k$ системы (3), можно найти его аппроксимацию сверху $\widehat{W}_k \supset \tilde{W}_k$. Для этого будем решать задачи линейного программирования при ограничениях (3):

$$< c, w_k > \to \min_{w_k \in W}, \qquad (4)$$

где c – вектор, задающий направление поиска границы множества $\tilde{W}_k$.

Например, если вектор $w_k \in R^3$, то для того, чтобы найти аппроксимацию $\widehat{W}_k$ множества $\tilde{W}_k$ в виде бруса со сторонами параллельными осям координат, необходимо решить 6 задач линейного программирования со следующими векторами:

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ c^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ c^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$c^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ c^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } c^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решения таких задач линейного программирования дают наибольшее и наименьшее возможные значения проекций множества $\tilde{W}_k$ на каждую координатную ось.

Для получения более точных оценок имеет смысл построить систему линейных неравенств (3) за N шагов $k = 0,1,...,N-1$, которые без потери общности будем нумеровать с 0. При выборе числа шагов N следует обратить внимание на то, что увеличение числа N приводит к росту вычислительных затрат на решение задач линейного программирования (4). Однако, начиная с некоторого числа шагов $N=n$, дальнейшее увеличение числа шагов $N>n$ позволяет лишь незначительно повысить точность оценки векторов w_k и v_k. Поэтому для конкретной системы следует подобрать оптимальное число шагов N, при котором будет достигаться достаточная точность оценки векторов возмущения w_k и ошибок измерения v_k при заданных ограничениях на вычислительные ресурсы.

При решении системы (3) не требуется вычислять информационные множества $\bar{X}_k$ для всех шагов $k = 0,1,...,N-1$, достаточно лишь знать ограничения на начальное значение вектора состояния $x_0 \in \bar{X}_0$. Это значительно снижает вычислительную нагрузку, ведь в промежуточные моменты времени в качестве решения задачи гарантированного оценивания можно использовать аппроксимации информационных множеств [13].

Работу алгоритма в целях наглядности изложения продемонстрируем для случая, когда $x_k \in R^2$ и следующих исходных данных:

$$A=\begin{pmatrix} 0.9976 & 0.04639 \\ -0.09278 & 0.8584 \end{pmatrix},\ \Gamma=\begin{pmatrix} 0.1189\cdot10^{-3} \\ 4.639\cdot10^{-2} \end{pmatrix},$$

$$G=I,\ H=I,$$

$$X_0=\{x\in R^2\,|\,-7.5\cdot10^{-4}\le x(1)\le 7.5\cdot10^{-4}, -3\cdot10^{-2}\le x(2)\le 3\cdot10^{-2}\}, \qquad (5)$$

$$V=\{v\in R^2\,|\,-9.5\cdot10^{-4}\le v(1)\le 9.5\cdot10^{-4}, -2.28\cdot10^{-2}\le v(2)\le 2.28\cdot10^{-2}\},$$

$$W=\{w\in R\,|\,-1.5\le w\le 1.5\},$$

где I – единичная матрица; $v(i)$ – i-ая координата вектора v, i=1,2; $x(i)$ – i-ая координата вектора x, i=1,2.

Пусть реализация процесса такова, что $|w_{k+1}-w_k|\le\omega$, где $\omega=0{,}15$ – ограничения на скорость изменений возмущений. Вектор v_k принимает случайные значения из множества V. Составим систему линейных неравенств за 20 шагов для данного случая с учетом особенностей изменения вектора ошибок измерений w_k:

$$\begin{cases} x_{k+1}-Ax_k-\Gamma w_k=0, k=0,1,\dots,19; \\ x_{k+1}+v_{k+1}=y_{k+1}; \\ A_{x_0}x_0\le b_{x_0}; \\ A_w w_k\le b_w; \\ A_v v\le b_v; \\ w_{k+1}-w_k\le\omega; \\ A_\omega\omega\le b_\omega, \end{cases} \qquad (6)$$

где

$$A_{x_0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,\ A_v=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$A_w=\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T,\ A_\omega=\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T,$$

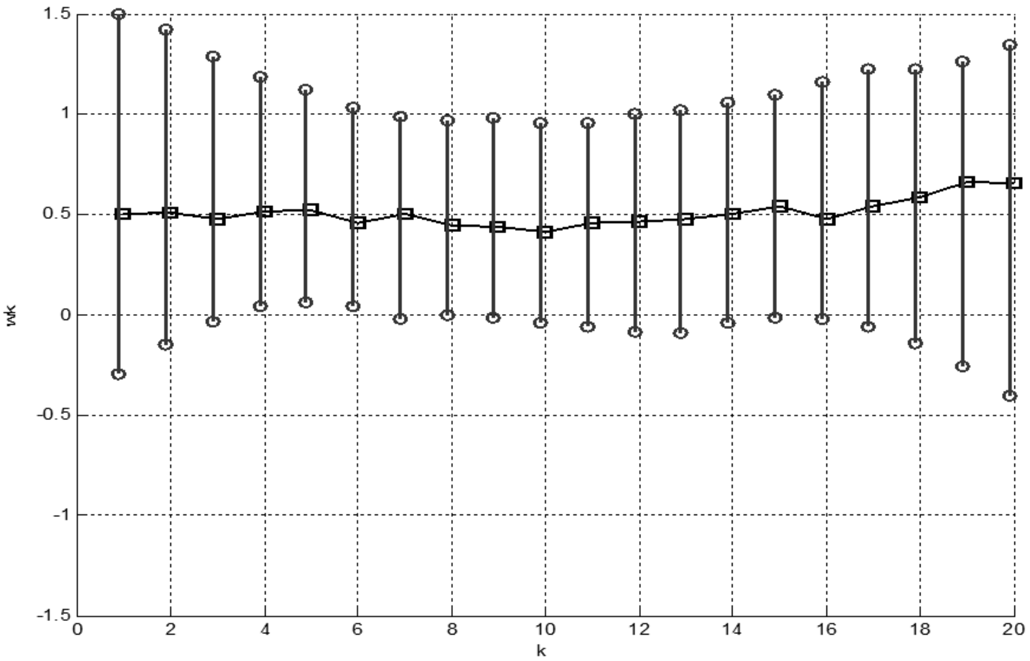
$$b_{x_0}=\begin{pmatrix} 7.5\cdot10^{-4} & 7.5\cdot10^{-4} & 3\cdot10^{-2} & 3\cdot10^{-2} \end{pmatrix}^T,$$

$$b_v=\begin{pmatrix} 9.5\cdot10^{-4} & 9.5\cdot10^{-4} & 2.28\cdot10^{-2} & 2.28\cdot10^{-2} \end{pmatrix}^T,$$

$$b_w=\begin{pmatrix} 1.5 & 1.5 \end{pmatrix}^T,\ b_\omega=\begin{pmatrix} 0.15 & 0.15 \end{pmatrix}^T.$$

Решим задачи линейного программирования (4) относительно w_k, $k=0,1,\dots,19$ при ограничениях (6) и векторах $c=1$ и $c=-1$. Решения задач линейного программирования задают наибольшие и наименьшие значения векторов w_k.

На рисунке представлены полученные оценки $\widehat{W}_k$ множества возмущений W. С помощью описанной процедуры удалось в 2 раза уточнить априорно заданное множество возмущений W. Наиболее точные оценки возмущений w_k получаются при $k = 6,...,15$.



□ – реализация возмущений w_k; O—O – множественная оценка $\widehat{W}_k$.
Реализация возмущений w_k и оценки $\widehat{W}_k$ в случае, когда известны ограничения на скорость изменений вектора возмущений w_k

Предложен вычислительно простой способ оценивания вектора возмущений w_k и ошибок измерений v_k с помощью решения задач линейного программирования. Рассмотрен пример, когда известны ограничения на скорость изменений возмущений. В этом случае удалось получить оценки вектора возмущений в 2 раза меньшие априорно заданных. Установлено, что при решении системы линейных неравенств, описывающей динамическую систему на несколько шагов $k=k1,...,k2$, наиболее оптимальные оценки получаются для шагов в середине интервала $k=k1,...,k2$.

Библиографический список

1. Бассвиль, М. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / М. Бассвиль, А. Вилски, А. Банвенист и др. – М.:Мир, 1989. – 278 с.

2. Осипов, Ю.С. Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов / Ю.С. Осипов, А.В. Кряжимский, В.И. Максимов // Труды ИММ УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 129–161.

3. Близорукова, М.С. К проблеме динамического восстановления управления при измерении части координат / М.С. Близорукова, А.М. Кодесс // Дифференциальные уравнения. – 2008. – № 11. – С. 1450–1455.

4. Розенберг, В.Л. К задаче динамической реконструкции возмущения в стохастическом дифференциальном уравнении / В.Л. Розенберг // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 10. – С. 1806–1815.

5. Филимонов, Н.Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования / Н.Б. Филимонов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2003. – № 2. – С. 11–15.

6. Кряжимский, А.В. О сочетании процессов реконструкции и гарантирующего управления / А.В. Кряжимский, В.И. Максимов // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 8. – С. 5–21.

7. Гасников, И.В. Оптимизация точности априорного прогнозирования возмущений в задачах гарантирующего управления / И.В. Гасников, В.В. Токарев // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 7. – С. 102–125.

8. Эльясберг, П.Е. Измерительная информация: сколько её нужно? Как её обрабатывать? / П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1983. – 208 с.

9. Кац, И.Я. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределённых ситуациях / И.Я. Кац, А.Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 11. – С. 79–87.

10. Ширяев, В.И. Оценивание состояния динамической системы в условиях неопределенности / В.И. Ширяев, Е.Д. Ильин, Е.О. Подивилова // Мехатроника и робототехника. – 2011. – С. 101–110.

11. Ширяев, В.И. Синтез управления линейными системами при неполной информации / В.И. Ширяев // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1994. – № 3. – С. 229–237.

12. Ильин, Е.Д. Об оценивании постоянных возмущений, действующих на динамическую систему, при использовании минимаксного фильтра / Е.Д. Ильин // Труды научно-практической конференции «Актуальные проблемы автоматиза-ции и управления». – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. – 2013. – С. 31–34.

13. Подивилова, Е.О. О подходе к оцениванию состояния динамических систем как к решению системы линейных неравенств / Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2013. – Вып. 17. – № 3 (13). – С. 133–136.

14. Черников, С.Н. Метод свертывания систем линейных неравенств / С.Н. Черников // Успехи математических наук. – 1964. – 19:5(119). – С. 149–156.

К содержанию