УДК 514.144.24 + 004.92

КОНСТРУКЦИЯ ДАНДЕЛЕНА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КВАДРИК ВРАЩЕНИЯ В AUTOCAD

А.Л. Хейфец, В.Н. Васильева

Предложен метод построения сфер Данделена для произвольных поверхностей вращения второго порядка, основанный на параметризации в пакете AutoCAD. Приведены примеры. Дана оценка точности определения точек фокуса и директрис предложенным методом. Показано, что погрешность находится в пределах $10^{-3}…10^{-8}$. Сделан вывод о высокой эффективности параметризации как инструмента геометрического моделирования.

Ключевые слова: сферы Данделена; шары Данделена; конические сечения; коники; кривые второго порядка; квадрики; поверхности второго порядка; директриса; параметризация; AutoCAD.

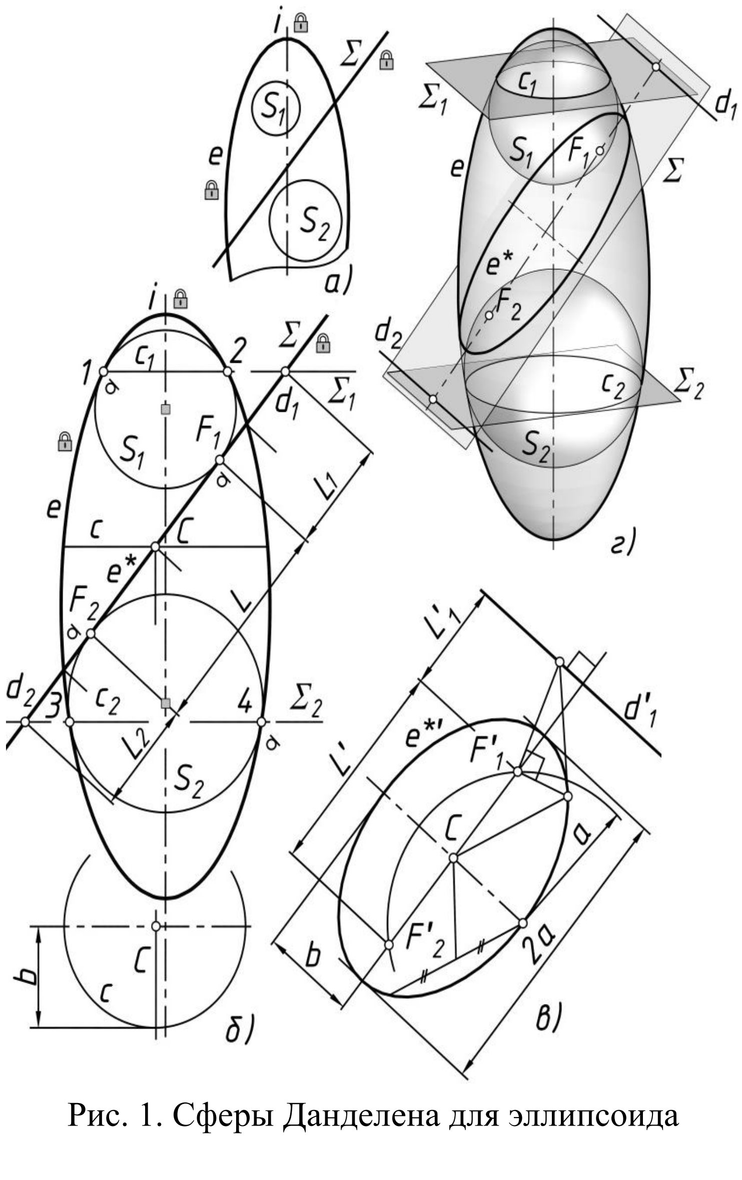

Рис. 1. Сферы Данделена для эллипсоида

При изучении сечений кругового конуса (коник) и цилиндра используют [1, 2] теорему Ж. Данделена о том, что сферы, вписанные в конус, пересеченный плоскостью, в точках касания с плоскостью определяют фокусы конических сечений. Конструкция Данделена, наглядно демонстрирует в пространстве положение фокусов и директрис коник. О сферах Данделена для других поверхностей вращения второго порядка (далее произвольных квадрик вращения, ПКВ) найдено упоминание лишь в работе М. Шаля [3]. Доказательное рассуждение существования сфер Данделена для ПКВ найдено в работе [4].

Цель работы – показать возможность построения сфер Данделена для ПКВ средствами параметризации AutoCAD.

Квадрики получали как тела вращения коник. Коники (гиперболу и параболу) получали как сечения кругового конуса, эллипс является «штатным» примитивом пакета.

Учитывая, что задача Данделена планиметрическая, построения выполняли в плоскости симметрии квадрик, где они представляются своими сечениями – гиперболой, параболой, эллипсом, сферы Данделена – окружностями S_1 и S_2, секущая плоскость – отрезком Σ.

Сложность построения сфер Данделена для ПКВ заключается в реализации касания окружности и очерковой коники. Технология параметризации позволяет решить эту задачу присвоением геометрических зависимостей, отвечающих свойствам коник и условиям касания [5, 6]. Под воздействием этих зависимостей окружность автоматически приводится в положение касания конике и секущей плоскости.

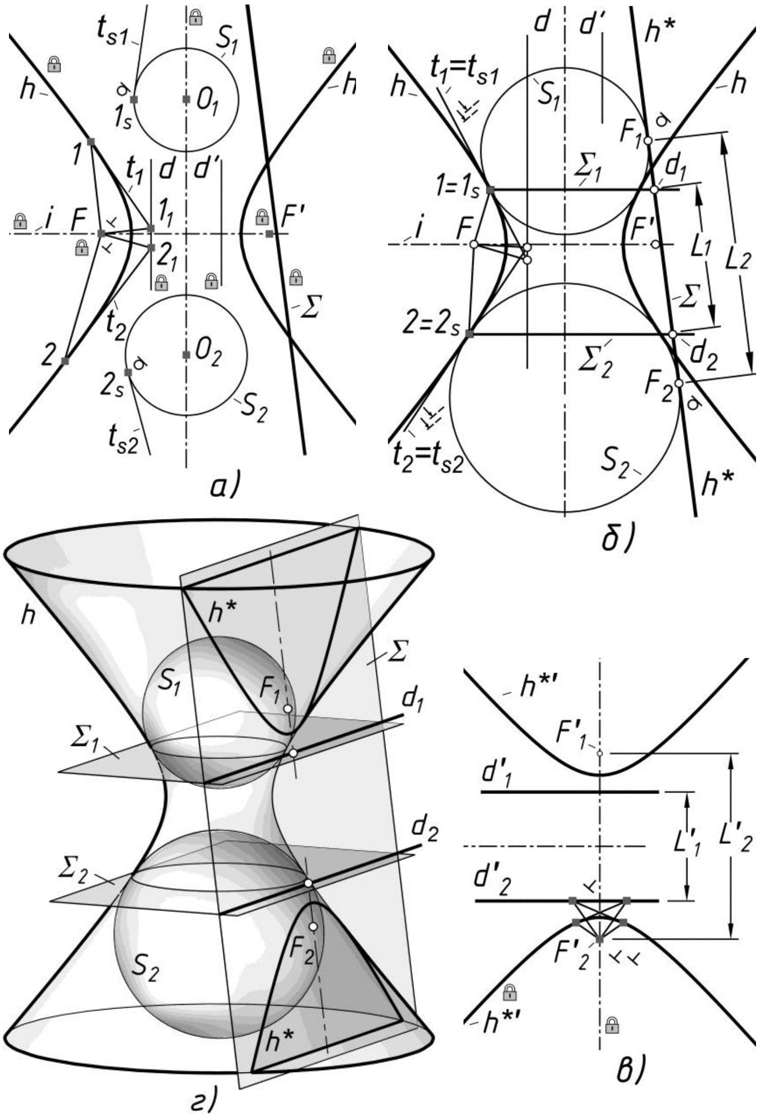

Рис. 2. Сферы Данделена для однополостного гиперболоида, рассеченного по гиперболе

Построение сфер Данделена S_1 и S_2 для эллипсоида вращения *e*, рассеченного плоскостью Σ (рис. 1) является наиболее простым примером, т.к. для эллипса распространяется геометрическая зависимость касания.

Вычерчиваем очерковый эллипс *e*, его ось вращения *i* и отрезок Σ (рис. 1, *а*), накладывая на них зависимость фиксации. На произвольно вычерченные окружности S_1 и S_2 налагаем геометрические зависимости (рис. 1, *б*): совпадение их центров с осью эллипсоида; касание окружностей S_1 и S_2 очеркового эллипса *e* и отрезка секущей плоскости Σ. Под действием зависимостей окружности автоматически занимают положение очерков сфер Данделена S_1, S_2.

Определяются фокальные точки сечения F_1 и F_2 и окружности c_1, c_2 касания сфер и эллипсоида. На пересечении плоскостей Σ_1, Σ_2 этих окружностей и Σ найдены точки d_1, d_2 как проекции директрис эллипса сечения e^*.

Для проверки точности решения строили «контрольный» эллипс $e^{*\prime}$ как истинный вид эллипса e^* сечения (рис. 1, *в*). Для него методами [1, 2] находили точки фокуса F'_1, F'_2 и одну из директрис d'_1. Простановкой размеров определили значения L, L_1, L_2 и сравнили их с соответствующими контрольными значениями L', L'_1. Погрешность не превысила до 10^{-8} (это соответствует предельной точности построений и измерений AutoCAD'а). Для наглядности простроена геометрически точная 3d модель (рис. 1, *г*).

В качестве второго примера рассмотрим построение сфер S_1, S_2 для однополостного гиперболоида, рассеченного по гиперболе h^*(рис. 2).

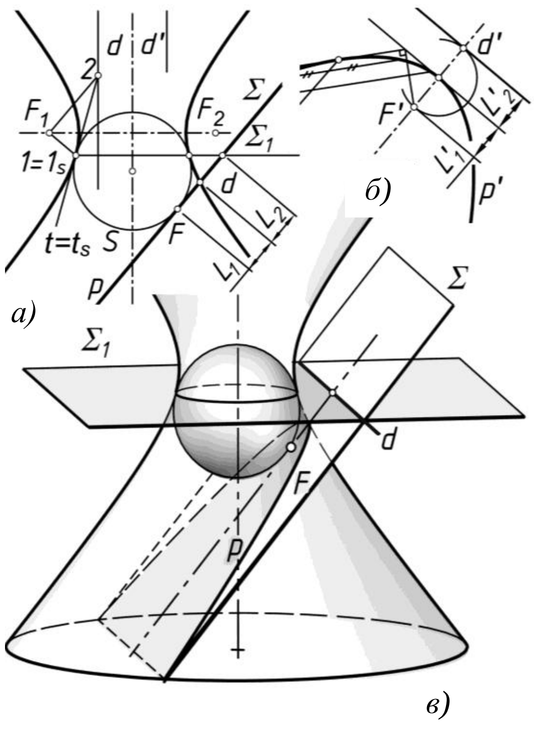

Рис. 3. Сфера Данделена для однополостного гиперболоида, рассеченного по параболе

Исходными данными является секущая плоскость Σ и очерковая гипербола h, которая строится как сечение кругового конуса. Оси гиперболы определяются при ее построении. Точки фокусов F, F' и директрисы d, d' гиперболы h находятся по методике [2, 5]. Фиксируем (рис. 2, *а*) положение ветвей гиперболы h, ее осей, директрис, маркеров точек фокусов и плоскость Σ. Вычерчиваем окружности S_1, S_2 в предварительном произвольном положении.

Геометрическая зависимость касания на гиперболу (параболу) не распространяется. Поэтому для построения окружности, касательной к гиперболе предложен алгоритм параметризации [5], приведенный для окружности S_1.

Задаем зависимость совпадения центра окружности с осью гиперболы. Строим отрезок t_{s1}, присваиваем ему зависимость касания к S_1 и совпадение с ней в конечной точке 1_s. После этого перемещение отрезка t_{s1} приводит к его скольжению вокруг S_1 с точкой касания 1_s и перемещению центра окружности по мнимой оси гиперболы.

Реализуем свойство коник [2]: «отрезок касательной от точки касания до директрисы виден под прямым углом». Строим треугольник (см. рис. 2, *а*) (F,1,1_1). Связываем его вершины зависимостью совпадения между собой и с объектами: в т. *1* с гиперболой h, в точке F с маркером точки фокуса, в точке 1_1 с директрисой d. Задаем зависимость перпендикулярности катетов в вершине F. При наложенных зависимостях отрезок t_1 становится касательным к гиперболе h и при перемещении скользит по гиперболе с точкой касания *1*.

Чтобы S_1 стала очерком сферы Данделена, осталось задать геометрические зависимости (рис. 2, *б*): коллинеарность отрезков t_{s1} и t_1, совпадение точек *1* и 1_s, касание окружности S_1 и отрезка Σ.

Такие же построения выполняем и для второй сферы S_2.

В результате решения найдены точки F_1, F_2 и директрисы d_1, d_2 гиперболы сечения h^*. Для оценки точности решения строили (рис. 2, *в*) контрольную гиперболу $h^{*\prime}$ как сечение гиперболоида, определяли ее фокусы и директрисы [5]. Расхождение значений L_1, L_2 со значениями L'_1, L'_2 находится на уровне 10^{-4}. Снижение точности связано с тем, что очерковая и контрольная гиперболы являются сплайн-кривыми. Конструкция Данделена наглядно с высокой точностью воспроизведена на 3d модели (рис. 2, *г*).

На рис. 3 приведено построение сферы для однополостного гиперболоида, рассеченного по параболе.

По приведенному алгоритму параметризации конструкция Данделена была построена для всех ПКВ (параболоида, одно- и двуполостного гиперболоидов) и типов их сечений (эллипс, парабола, гипербола). Имея параметризированную геометрическую модель можно исследовать конструкцию Данделена. Так, перемещая и вращая отрезок Σ, можно наблюдать как окружности S_1, S_2 «подстраиваются к новым условиям», изменяясь в размере, но оставаясь касательными к ПКВ и Σ.

Полученные результаты показывают эффективность параметризации как инструментального средства современных графических пакетов САПР, его доступность для решения сложных инженерных прикладных задач.

Библиографический список

1. Четверухин, Н.Ф. Начертательная геометрия / Н.Ф. Четвертушин и др. – М.: «Высшая школа», 1963. – 420 с.

2. Пеклич, В.А. Начертательная геометрия / В.А. Пеклич. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 272 с.

3. Шаль, М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов: Т. 2: Примечание IV. О способе построения фокусов и доказательства их свойств на косом конусе / М. Шаль. – М.: Моск. мат. о-во, 1883. – 748 с.

4. Нилов, Ф.К. Сферы Данделена. Лекция на Малом мехмате МГУ, 2011 г. / Ф.К. Нилов. – URL: http://www.geometry.ru/video.html.

5. Хейфец, А.Л. Алгоритмы моделирования коник в пакете AutoCAD / А.Л. Хейфец // Совершенствование подготовки учащихся и студентов в области графики, конструирования и стандартизации. Межвузовский научно-методический сборник. – Саратов. СГТУ, 2013. – С. 34–39.

6. Логиновский, А.Н. Решение задач на основе параметризации в пакете AutoCAD / А.Н. Логиновский, А.Л. Хейфец // Геометрия и графика. – М.: ИНФРА-М. – V. 1. I. 2. – С. 58–62.

К содержанию