УДК 624.07+ 624.04

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОНИЧЕСКИХ СТЕРЖНЯХ, ИМЕЮЩИХ ЗАМКНУТЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ, НЕДЕФОРМИРУЕМЫЙ КОНТУР, НАХОДЯЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ СТЕСНЁННОГО КРУЧЕНИЯ

В.Ф. Сбитнев

Излагается метод МКЭ в форме метода перемещений, разработанный применительно к вычислению частот свободных колебаний в слабоконических тонкостенных стержнях, находящихся в условиях стеснённого кручения и имеющих односвязный прямоугольный недеформируемый контур.

Ключевые слова: тонкостенный стержень, частота свободных колебаний, определитель, детерминант, МКЭ, метод перемещений, замкнутый контур, депланация, угол закручивания.

В динамических расчётах есть понятие резонанса. Это колебательный процесс, при котором частоты активной нагрузки и свободных колебаний совпадают Сооружение быстро разрушается. Естественно, такой режим работы конструкций не допустим. В то же время, многочисленные примеры показали, что влияние стеснения депланации сечения в тонкостенном стержне при действии динамических нагрузок, оказывается гораздо бóльшим, чем в случае действия аналогичных нагрузок, действующих статически.

Первостепенной в этом случае становится задача вычисления частот свободных колебаний. В некоторых конструкциях частоты свободных колебаний находятся в замкнутой форме, в других их находить сложнее, а в некоторых их вычислить невозможно. К последним относят задачу вычисления частот свободных колебаний в тонкостенных стержнях переменного сечения. В этом случае для решения задачи применяют приближенные методы, например, методы численного анализа, к которым относится МКЭ. В стержнях с произвольным замкнутым контуром крутильные колебания происходят одновременно с изгибными колебаниями; такие колебания называют изгибно-крутильными. В работах русских учёных [2, 3] доказано, что в тонкостенных стержнях, имеющих две оси симметрии, происходит разделение изгибных и крутильных колебаний и изгибные колебания в работе не рассматривается, а рассматриваются только крутильные колебания.

В работе рассматривается задача вычисления частот свободных колебаний в тонкостенных стержнях переменного сечения, имеющих коробчатое сечение с жёстким контуром (рис. 1, а, б, в) и находящихся в условиях стеснённого кручения. Предлагается МУЭ (метод укрупнённых элементов) в форме метода перемещений.

Точные расчёты тонкостенных стержней переменного сечения описываются дифференциальным уравнением 4-го порядка с переменными коэффициентами. Решить его в замкнутой форме пока не удалось.

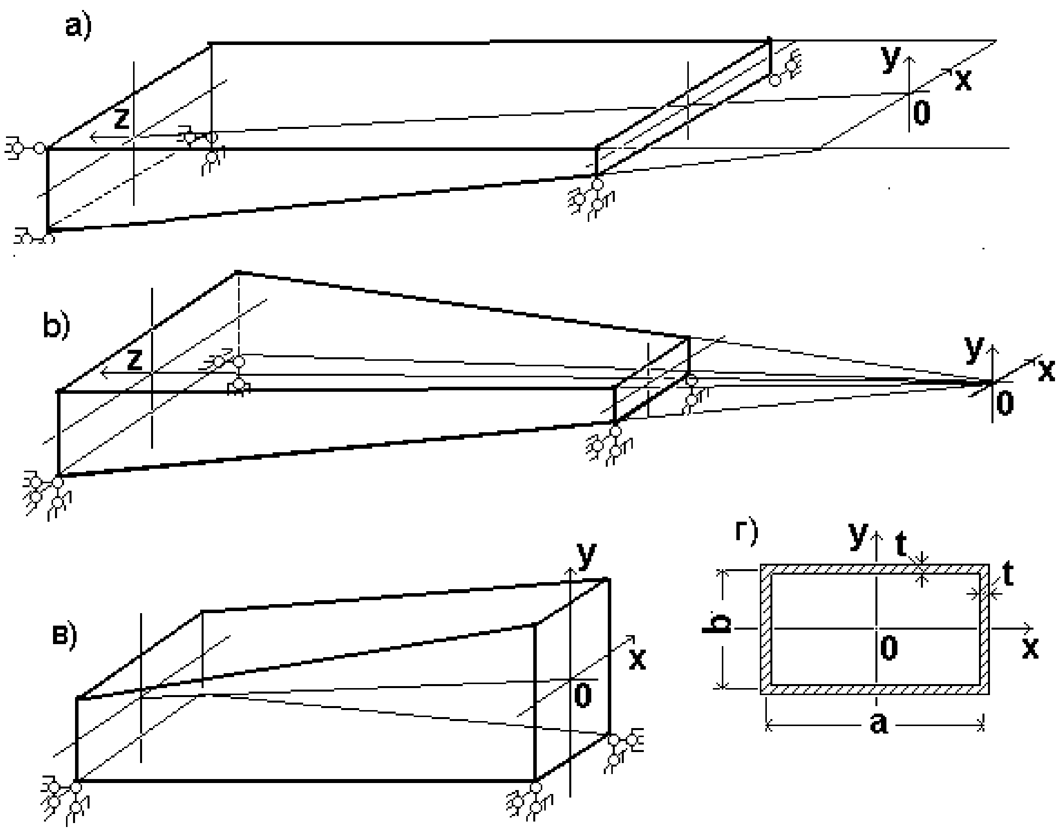

Рис. 1. Виды слабоконических стержней-оболочек

Уравнение крутильных колебаний для тонкостенного стержня с постоянным поперечным сечением описывается однородным дифференциальным уравнением 4-порядка с постоянными коэффициентами [1, 2, 3]:

$$EJ_{\omega}\frac{\partial^4\theta}{\partial z^4} + J_O\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - GJ_{\alpha}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.1)$$

В этом уравнении E, G, J_{ω}, J_O, J_{α}, J_{ρ}, θ, γ, g – различные физико-геометрические характеристики [3], о которых будет сказано ниже.

Для тонкостенного стержня коробчатого (прямоугольного) сечения секториальные характеристики равны [2]:

$J_{\omega} = ta^2b^2(a + b)/24$; $J_{\rho} = tab(a + b)/2$; $J_{\alpha} = 2ta^2b^2/(a + b)$; $D = (a - b)^2/(a + b)^2$.

В основе приводимых исследований лежат: динамические исходные уравнения для тонкостенных стержней [2, 3], метод начальных параметров [2, 3] и классический метод перемещений строительной механики.

Имея ввиду дать в данной работе общий метод расчёта указанных выше тонкостенных стержней по вычислению частот свободных колебаний при произвольно заданных граничных условиях, будем исходить из метода перемещений, изложенного в [4]. В этих работах приведены основные положения этого метода (применительно к расчёту на прочность).

Итак, рассмотрим тонкостенный слабоконический стержень, у которого размеры поперечного сечения в произвольном сечении с координатой z можно выразить через размеры поперечного сечения в «базовом» сечении, которое может находиться как в начале, так и в конце стержня. Пусть этот стержень находится в условиях стеснённого кручения.

За неизвестные принимаются перемещения $z_к$ в намеченных сечениях (узлах): это депланация контура и угол закручивания.

Согласно идее МКЭ для расчёта выбираем основную систему. Это делается так: мысленно стержень разбиваем на несколько укрупнённых элементов, принимая ширину каждого элемента равной ΔL (рис. 2). Это элементы типа рамы-полоски с замкнутым прямоугольным сечением. В намеченные сечения вводятся дополнительные условные связи, препятствующие депланации сечения и углу закручивания, как изображено на рис. 2.

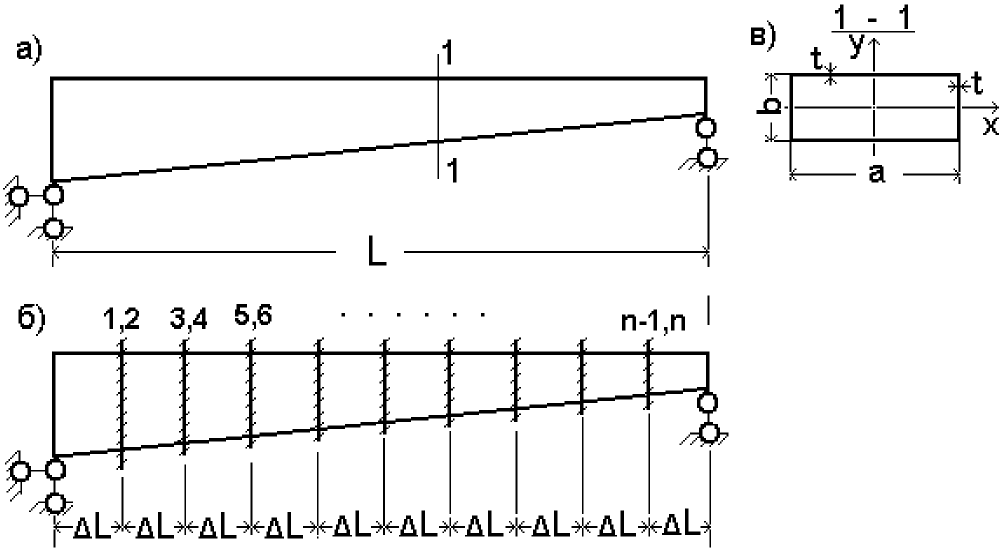

Рис. 2. К выбору основной системы метода

Связь, препятствующую депланации сечения обозначим буквой i, а связь, препятствующую углу закручивания через j.

В состав основной системы будут входить стандартные элементы, зависящие от условий закрепления стержня. Это:

1) элемент, защемлённый с двух концов;

2) элемент, защемлённый на одном конце, и со связью, препятствующей только углу закручивания на другом;

3) элемент, защемлённый на одном конце, и со связью, препятствующей только депланации сечения на другом;

Все эти случаи решены заранее методом сил на единичные воздействия и сведены в таблицы, которые можно использовать в методе перемещений.

В отношении выбора размеров элементов-полос можно утверждать лишь то, что уменьшение ширины полосы ΔL элемента и связанного с этим увеличение числа намечаемых сечений, приводит к повышению точности.

При одном и том же числе намечаемых сечений возможны различные схемы основной системы. Например, ширину элементов можно принимать различной, конические элементы заменять призматическими, а размеры поперечного сечения призматических элементов принимать либо: осреднёнными, по наименьшему или по наибольшему размеру. В работе предлагается конический стержень аппроксимировать ступенчато-переменным. Тогда основная система – это совокупность последовательно соединённых призматических элементов с одним или двумя защемлёнными концами.

Различные основные системы дают различные результаты в окончательных расчётах. Расчёт по наименьшему размеру даёт приближение сверху, по наибольшему – снизу, а усредненному – близко к среднему.

Пусть стержень будет разбит на k участков. Количество неизвестных в этом случае будет $n = 2(k - 1)$, если иметь в виду, что в каждом сечении будет введено две дополнительные связи. Следовательно, замена заданной системы основной сводит решение задачи к составлению и решению однородной системы уравнений $2(k - 1)$ порядка. В канонической форме метода перемещений в общем виде уравнения имеют следующий вид:

$$\ldots\ r_{i-2,j-2}Z_{n-2} + r_{i-1,j-1}Z_{n-1} + r_{i,j}Z_n + r_{i+1,j+1}Z_{n+1} + r_{i+2,j+2}Z_{n+2}\ \ldots = 0;$$

Поскольку основная система будет состоять из стандартных призматических элементов, то при наличии табличных данных вычисление опорных реакций от единичных смещений дополнительных связей не будет вызывать больших затруднений. К сожалению, из-за ограничения, наложенного на размеры статьи, табличные данные в работе не приводятся.

В общем случае $Z_1, Z_2, \ \ldots \ Z_n$ во время свободных колебаний не равны нулю. Поэтому, для получения решения определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, должен равняться нулю:

$$\mathrm{Det} = \left|\ \ldots\ r_{i-2,j-2}\quad r_{i-1,j-1}\quad r_{i,j}\quad r_{i+1,j+1}\quad r_{i+2,j+2}\ \ldots \right| = 0; \qquad (1.2)$$

Получаемая матрица квадратная порядка **n**, ленточная, в общем случае, имеющая в одной строке не более 6-ти членов.

Развёрнутый определитель даёт сложное трансцендентное уравнение, имеющее бесконечное число корней. Эти корни позволяют определяют множество частот свободных колебаний ω_K. ЭВМ – лучший способ решения трансцендентного уравнения, используя специальные программы.

В данной работе основными расчётными являются параметры:

$$\alpha^2 = GJ_\alpha/EJ_\omega;\ k^4 = J_O\omega_i^2/EJ_\omega;\ \lambda = [\alpha^2/2 + \sqrt{\alpha^4/4 + k^4}]^{1/2};\ \mu = [-\alpha^2/2 + \sqrt{\alpha^4/4 + k^4}]^{1/2}.$$

Так как элементы основной системы будут иметь разные значения λ и μ, то их следует привести к одному, выбранному за главный элемент.

Основную систему можно выбрать и другим образом. А именно, ввести дополнительные связи, недостающие до абсолютной заделки, и в торцевые сечения. В этом случае количество намечаемых неизвестных увеличится (максимум на две единицы), порядок матрицы жёсткости повышается. Но выбор такой основной системы оправдан тем, что сводит табличные данные всего к одному элементу: это стержень, защемлённый на обоих торцах.

Теоретические соображения проиллюстрируем на тестовом примере. Арифметические выкладки при решении задачи приведены не полностью.

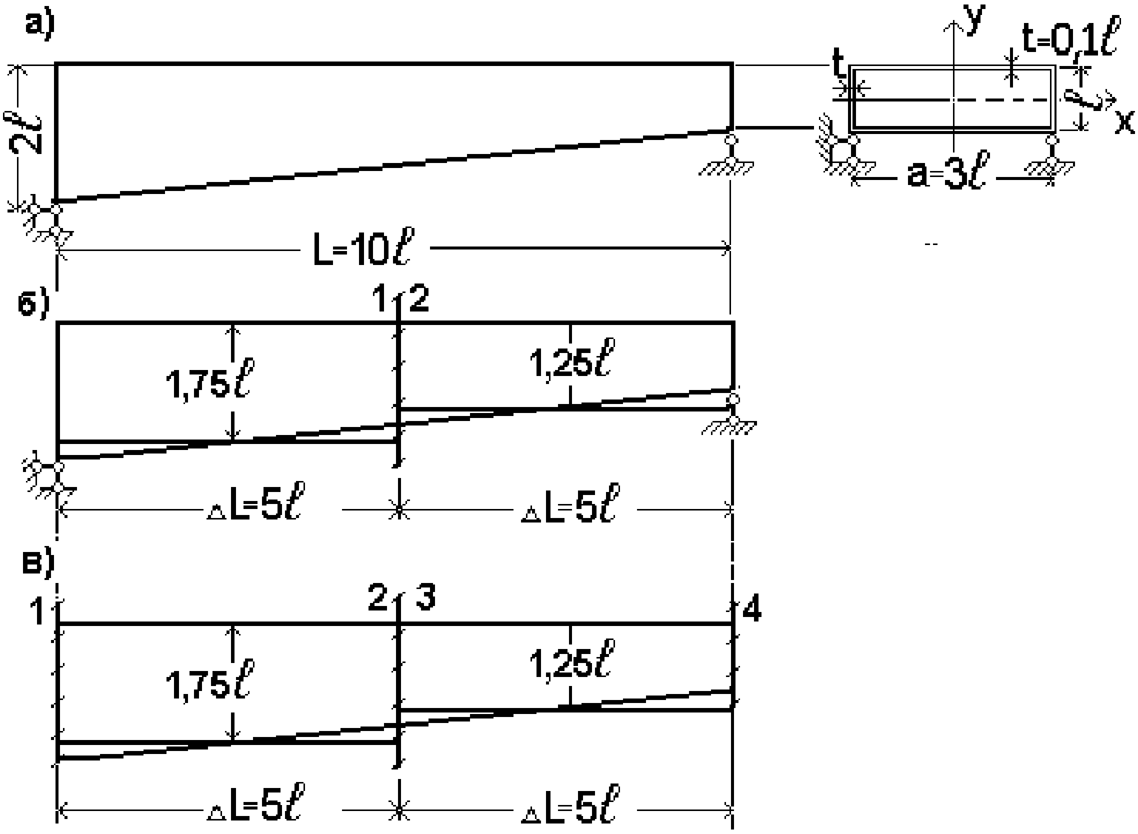

Рис. 3. Тестовый пример расчёта сдабоконического стержня

В качестве расчётной схемы принят тонкостенный стержень переменного сечения, «шарнирно» опертый по торцам (рис. 3). Так как целью примера является не расчёт стержня, а существо подхода к расчёту, то арифметические выкладки при решении задачи приведены не полностью. В качестве расчётной схемы принят тонкостенный стержень переменного сечения, «шарнирно» опертый по торцам (рис. 3). Так как целью примера является не расчёт стержня, а существо подхода к расчёту, то арифметические выкладки при решении задачи приведены не полностью.

Разбиваем стержень на два элемента длиной по 5***l***. Пусть высота левого элемента $b_Л = 1{,}75\boldsymbol{l}$, а правого $b_П = 1{,}25\boldsymbol{l}$. Стержень стальной. Принимаем $E = 2\cdot10^5$ МПа, $G = 8\cdot10^4$ МПа, $\gamma = 7{,}854$ кН/м^3, $g = 9{,}8156$ м/сек^2, $\boldsymbol{l} = 1{,}0$ м. Параметры левого элемента $\alpha_Л = \alpha_О$, $k_Л = k_О$ и $J_{\omega Л} = J_{\omega О}$ примем за главные. Выраженные через них параметры правого элемента: $\alpha_П^2 = 1{,}2491\alpha_О^2$, $k_Л^2 =$ $= 1{,}40k_О^2$, $J_{\omega П} = 0{,}4565J_{\omega О}$.

Исследуем два случая выбора основной системы:

1) первый, когда вводятся только две дополнительные связи (рис.3 б);

2) второй - вводятся дополнительные связи в торцах стержня (рис.3 в).

Первый вариант. В этом случае табличным элементом будет стержень, защемлённый на одном конце, а на другом «шарнирный». Основная система будет дважды кинематически неопределимой. Составлялся и раскрывался определитель 2-го порядка. Полученное трансцендентное уравнение решалось с применением функции root(f(z),z) в системе MATHRAD.

В уравнение входили гиперболо-тригонометрические функции A, B, C, D, E, F, G, взяты из [3]. Подставив их в уравнение и обозначив:

$$\varphi_1 = (AF - \lambda^2\mu^2C^2)/(AD - BC), \qquad \varphi_2 = (BE - \lambda^2\mu^2D^2)/(AD - BC),$$

$$\psi_1 = (AE - \lambda^2\mu^2CD)/(AD - BC), \qquad \psi_2 = (BF - \lambda^2\mu^2CD)/(AD - BC),$$

получаем следующее однородное уравнение:

$$(\varphi_1 + 0{,}4565\varphi_{1Л})(\psi_1 + 0{,}4565\psi_{1П}) - (\psi_2 - \varphi_{2П})^2 = 0.$$

Функции задавали $\omega_1^2 = 980$ 1/сек^2. Она возвратила значение переменной, которое обращает выражение в нуль $\omega_1^2 = 951$ 1/сек^2. Это главная частота.

Второй вариант. Дополнительные связи, препятствующие депланации вводились и на торцах стержня. Здесь табличным элементом стал стержень, защемлённый на обоих торцах. Искомых неизвестны теперь будет четыре. Составлялся и раскрывался определитель 4-го порядка. Полученное уравнение решалось по той же программе, которая возвратила $\omega_1^2 = 969$ 1/сек^2.

Интересно сравнить полученные результаты с другими. Для этого были вычислены первые частоты свободных колебаний в призматических стержнях с различными высотами. Приняв высоту стержня равной b = 1,0***l***, имеем $\omega_1^2 = 894$ 1/сек^2; при b = 1,5***l*** $\omega_1^2 = 983$ 1/сек^2; при b = 2,0***l*** $\omega_1^2 = 1033$ 1/сек^2.

Теперь сравним первые частоты, полученные по предлагаемой методике, и призматического стержня с усреднённой высотой. Имеем: $\omega_1^2 = 969$ 1/сек^2 по методике и $\omega_1^2 = 983$ 1/сек^2. Они расходятся лишь на 1,5%.

Библиографический список

1. Власов, В.З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем / В.З. Власов. – М.: Стройиздат, 1949. – 427 с.

2. Карякин, Н.И. Основы расчёта тонкостенных конструкций / Н.И. Карякин. – Высшая школа, 1960. – 239 с.

3. Безухов, Н.И. К расчёту тонкостенных стержней на вынужденные колебания / Н.И. Безухов, О.В. Лужин // Исследования по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1957. – С. 7–41.

4. Сбитнев, В.Ф. Применениие метода перемещений к расчёту на стеснённое кручение тонкостенных стержней с замкнутым контуром / В.Ф. Сбитнев // Сб. науч. тр. Исследования по строительной механике и механике трудов. – Челябинск: ЧПИ. – 1979. – № 225. – С. 89–96.

К содержанию