УДК 624.04:539.3:534

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И КОНСТРУКТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

А.Н. Потапов

Предложены математические модели нелинейного расчета дискретных диссипативных конструкций. Уравнения реакции физически и конструктивно-нелинейной системы записываются с единых позиций на основе теории временного анализа.

Ключевые слова: конструкция, колебание, деформация, перемещение, диаграмма, жесткость, матрица, вектор.

Введение. Современные конструкции испытывают интенсивные динамические воздействия, что вынуждает нагруженные элементы работать на пределе своих возможностей. По этой причине в несущих элементах и узлах конструкции накапливаются пластические деформации, в отдельных случаях происходит разрушение связей, что требует проведения проверки прочности системы в поврежденном состоянии и оценки последствий этих разрушений.

В связи с этим, в последнее время возрос интерес специалистов к колебаниям систем с физической и конструктивной нелинейностью. Данная проблема находит широкое обсуждение в печати, на конференциях и на «круглых столах, где отмечается, что до сих пор нет ясности, как адекватно учитывать эффект разрушения связей [1–3]. Подчеркивается недостаток исследований теоретического характера в отношении задач колебаний конструкций с разрушающими связями и отмечается отсутствие эффективных аналитических методов расчета поврежденных конструкций.

В настоящей статье дается краткий обзор результатов исследований, проводимых на кафедре строительной механики по направлению, связанному с анализом колебаний диссипативных систем с учетом физической и конструктивной нелинейности. В качестве метода решения используется временной анализ реакции конструкции, моделируемой дискретной расчетной схемой. При колебаниях системы с физически нелинейными свойствами материала учет пластических деформаций проводится с помощью билинейной диаграммы деформирования ($\sigma - \varepsilon$). С целью удобства записи математических моделей эта диаграмма представляется в координатах «восстанавливающая сила – относительное перемещение», как для отдельного несущего элемента, так и всей конструкции в целом. При колебаниях конструктивно нелинейных систем эффект от выключения связи учитывается диаграммой деформирования разрывного вида, что обусловлено внезапным изменением жесткостных характеристик системы.

Диаграммы деформирования. Исследования показывают, что нелинейные составляющие динамической восстанавливающей силы (ДВС) тесно связаны с параметрами пластического гистерезиса (ширина a и высота h петли на рис. 1 a). В общем случае упругопластических колебаний вектор ДВС $R(t)$ может быть выражен так: $R(t) = K_iY(t) + B$, где $Y(t)$ – вектор перемещений. Матрица жесткости K_i и вектор постоянных значений B формируются в зависимости от i-го состояния системы.

При упругом режиме колебаний (1-й участок диаграммы) $K_i = K$, где K – матрица жесткости исходной системы; вектор $B = 0$. С началом нелинейного деформирования (2-й участок: снижение жесткости в j-м элементе) состояние системы выражается новой матрицей жесткости K_i. Вектор $B = R_u = \Delta K_iY_u$, где R_u, Y_u – векторы предельных значений ДВС и предельных перемещений (Y_u строится в момент перехода системы в промежуточное состояние); $\Delta K_i = K – K_i$. При разгрузке в j-м элементе (3-й участок) система возвращается к первоначальной жесткости $K_i = K$ (линии разгрузки и нагрузки параллельны друг другу), а $B = R_p = KY_p$, где R_p, Y_p – векторы остаточных усилий и перемещений.

Отсюда следуют выражения вектора ДВС для различных состояний:

$$R(t) = KY(t), \qquad R(t) = K_iY(t) + R_u(t_i), \qquad R(t) = KY(t) – R_p(t_i). \tag{1}$$

Формулы (1) позволяет сформировать дифференциальное уравнение движения квазиупругой системы (2), которое совместно с начальными условиями (3) на любом интервале движения имеет вид ($t \in [t_i, t_{i+1}]$):

$$\left.\begin{aligned} &M_i\ddot{Y}(t)+C_i\dot{Y}(t) + K_iY(t) = P(t) + Q – R_u(t_i) + R_p(t_i). &(2)\\ &Y(t_i) = Y_0, \qquad \dot{Y}(t_i)=\dot{Y}_0, &(3)\end{aligned}\right\}$$

где M_i, C_i, K_i – матрицы масс, демпфирования и жесткости в i-м состоянии системы; $P(t)$, Q – векторы динамической и постоянной нагрузки.

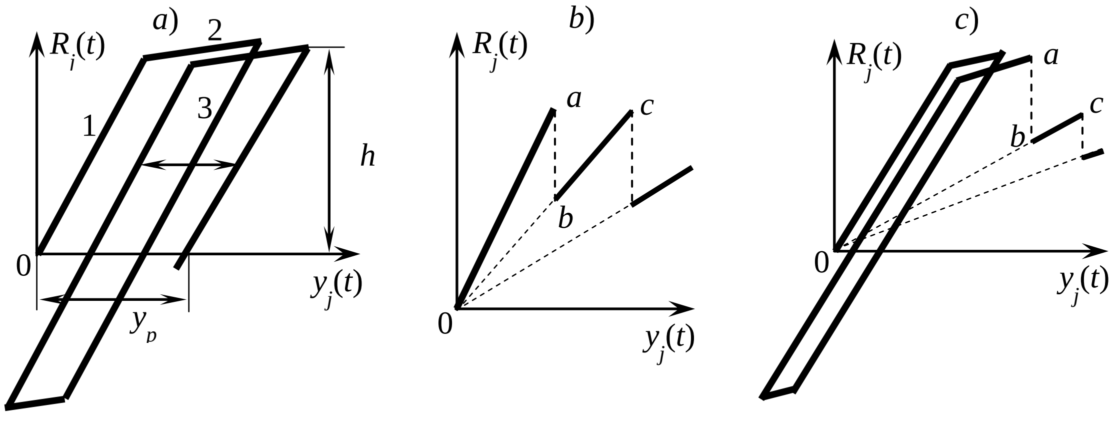

Рис. 1. Диаграммы деформирования ($R_j – y_j$) j-го несущего элемента:
a – физически нелинейного; b – конструктивно нелинейного;
c – комбинированного

Запись уравнения в форме (2) обладает тем достоинством, что все нелинейные составляющие вектора (1) перенесены в правую часть, в результате чего интегрирование (2) протекает по схеме решения упругой задачи.

При колебаниях конструктивно-нелинейной системы (внезапное выключение j-го несущего элемента, рис. 1 b) и при условии отсутствия пластических деформаций все нелинейные составляющие в выражениях вектора (1) будет равны нулю: $R_u = R_p = 0$. Если же при этом в элементах конструкции возникают пластические деформации, то $R_u \neq 0$, $R_p \neq 0$ (рис. 1 c). В обоих случаях уравнения движения сохраняют свою структуру в форме записи (2).

Уравнение (2) описывает движение квазиупругой системы на интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}]$, находясь в i-м промежуточном состоянии. При переходе системы в новое (i+1)-е состояние происходит корректировка (изменение) параметров расчетной динамической модели (РДМ: в левой части уравнения – матрицы M_{i+1}, C_{i+1}, K_{i+1}, в правой части – векторы $R_u(t_{i+1})$, $R_p(t_{i+1})$ с обязательной сменой начальных условий (3).

Такое моделирование физически и конструктивно-нелинейного процесса позволяет сводить динамическую задачу к разработанному расчетному алгоритму, при котором неупругий анализ рассматривается как последовательность расчета упругих систем [4].

Математические модели нелинейного расчёта. Часть математических моделей нелинейного расчета представлена в предыдущем пункте уравнениями (1) – (3). Ниже приведена система уравнений, выражающая динамическую реакцию квазиупругой модели диссипативной конструкции на интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}]$ при произвольном внешнем воздействии:

$$\left.\begin{aligned} &Y(t) = 2\mathrm{Re}\,\{Z(t)\}, \qquad \dot{Y}(t) = 2\mathrm{Re}\,\{SZ(t)\},\\ &\ddot{Y}(t) = 2\mathrm{Re}\,\{S^2 Z(t)\} + M^{-1}[Q + P(t) - R_u(t_i) + R_p(t_i)] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где:

$$\left.\begin{aligned} Z(t) &= Z_0(t-t_i) + Z^{QR}(t-t_i) + Z^P(t-t_i),\\ Z_0(t-t_i) &= \Phi(t-t_i)U^{-1}M[-\bar{S}\,Y_0 + \dot{Y}_0\,],\\ Z^{QR}(t-t_i) &= [\Phi(t-t_i) - E](US)^{-1}[Q - R_u(t_i) + R_p(t_i)],\\ Z_0(t-t_i) &= U^{-1}\int_{t_i}^{t} \Phi\,(t-\tau)^{\mathrm{T}}\,P(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь: $\Phi(t-t_i) = e^{S(t-t_i)}$; $U = MS + S^{\mathrm{T}}M + C$. Матрица S является корнем характеристического матричного уравнения $M_i\,S^2 + C_i\,S + K_i = 0$, вытекающего из однородного дифференциального уравнения, соответствующего (2). Чтобы не усложнять запись формул, индекс «i», отвечающий за номер состояния системы, у матриц U и S опущен.

Уравнения (4), (5) позволяют с единых позиций определять динамическую реакцию системы в ее i-м состоянии независимо от вида нелинейности (физической или конструктивной).

Силовые параметры реакции (векторы восстанавливающих, диссипативных и инерционных сил) вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{array}{c} R(t) = K_i Y(t) + R_u(t_i) - R_p(t_i), \qquad F(t) = C_i \dot{Y}(t), \\ I(t) = -M\ddot{Y}(t) = -2M\mathrm{Re}\,\{S^2 Z(t)\} - [Q + P(t) - R_u(t_i) + R_p(t_i)]. \end{array}\right\}$$

Выводы. Представленные математические модели позволяют с единых позиций проводить нелинейный временной анализ при сложных динамических воздействиях, включая запроектные воздействия. Динамическая реакция строится в аналитическом виде для конструкций, моделируемых дискретной расчетной схемой с физически и конструктивно-нелинейными свойствами.

Библиографический список

1. Андросова, Н.Б. Некоторые предложения к нормированию параметров живучести сооружений / Н.Б. Андросова, Н.В. Клюева, В.И. Колчунов // Вестник отделения строительных наук. – 2011. – Выпуск № 15. – С. 17–25.

2. Еремеев, П.Г. Предотвращение лавинообразного (прогрессирующего) обрушения несущих конструкций уникальных большепролетных сооружений при аварийных воздействиях / П.Г. Еремеев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2006. – № 2. – С. 65–72.

3. Чернов, Ю.Т. К расчету систем с выключающимися связями / Ю.Т. Чернов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 4. – С. 53–57.

4. Потапов, А.Н. Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях: монография / А.Н. Потапов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.

К содержанию